

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 03

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ последовательности

$$x_n = \cos \frac{\pi n}{3} + \frac{\sqrt{4n^2 - 2}}{n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ответ: 3 и 1.

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{3 + a, 2a\}$ сонаправлен с вектором \overrightarrow{BL} , где $B(-1, -1)$, $A(1, 0)$, $C(2, -7)$, BL — биссектриса угла ABC ?

Ответ: $a = -3/7$.

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование

Фурье $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{3ix}}{\sqrt[4]{x^4 + 2}}.$$

Ответ: $\lambda \neq 3$.

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(1, 1)$ к кривой, заданной на плоскости \mathbb{R}^2 уравнением

$$x^3 + y^3 + xy = 3.$$

Ответ: $y = 2 - x$.

5. Выпишите ряд Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{1}{z^2 + 2z}$$

комплексного переменного z , сходящийся в точке $z_0 = 3$.

Ответ: $\sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^n 2^{-n-2} z^n$.

6. Найдите матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

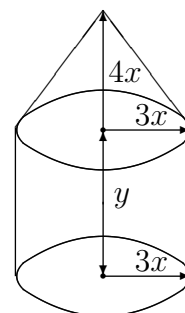
7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \geq 0$ условиями

$$\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0) , при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Ответ: $x_0 = -1$, $y_0 \in \mathbb{R}$ — любое число.

8. Домик состоит из прямого кругового цилиндра с радиусом $3x$ и высотой y и крыши, имеющей форму прямого кругового конуса с радиусом $3x$ и высотой $4x$. Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 48\pi \text{ м}^3$ при условии $y \geq 4x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности конуса). Найдите значения параметров x и y .



Ответ: $x = 1 \text{ м}$, $y = 4 \text{ м}$.

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 04

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ последовательности

$$x_n = \sin \frac{\pi n}{4} + \frac{\sqrt{9n^2 - 5}}{n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ответ: 4 и 2.

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{3a, 2 - a\}$ сонаправлен с вектором \vec{BL} , где $B(2, 2)$, $A(0, 6)$, $C(8, 5)$, BL — биссектриса угла ABC ?

Ответ: $a = 1/5$.

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{2ix}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ответ: $\lambda \neq 2$.

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(-1, -1)$ к кривой, заданной на плоскости \mathbb{R}^2 уравнением

$$x^3 + y^3 - xy = -3.$$

Ответ: $y = -2 - x$.

5. Выпишите ряд Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{1}{z^3 - 3z^2}$$

комплексного переменного z , сходящийся в точке $z_0 = 4$.

Ответ: $\sum_{n=-\infty}^{-3} 3^{-n-3} z^n$.

6. Найдите матрицу X такую, что $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \leq 0$ условиями

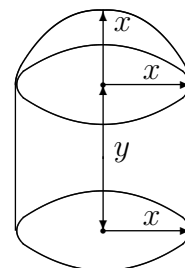
$$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = -y + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0) , при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$.

Ответ: $x_0 \in \mathbb{R}$ — любое число, $y_0 = 1$.

8. Домик состоит из прямого кругового цилиндра с радиусом x и высотой y и крыши, имеющей форму полусферы с радиусом x . Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 45\pi$ м³ при условии $y \geq x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковой поверхности цилиндра и полусферы). Найдите значения параметров x и y .

Ответ: $x = y = 3$ м.



Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 05

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ последовательности

$$x_n = \operatorname{tg} \frac{\pi + 2\pi n}{4} - \frac{3n - 1}{\sqrt{n^2 + 2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ответ: -2 и -4 .

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{2a, a - 4\}$ сонаправлен с вектором \overrightarrow{BL} , где $B(1, 1)$, $A(-1, -2)$, $C(7, -3)$, BL — биссектриса угла ABC ?

Ответ: $a = 4/11$.

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование

Фурье $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt[6]{x^6 + 3}}.$$

Ответ: $\lambda \neq 1$.

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(1, -1)$ к кривой, заданной на плоскости \mathbb{R}^2 уравнением

$$y^3 - x^3 + xy = -3.$$

Ответ: $y = x - 2$.

5. Выпишите ряд Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{z^2}{z - 4}$$

комплексного переменного z , сходящийся в точке $z_0 = -8$.

Ответ: $\sum_{n=-\infty}^1 4^{-n+1} z^n$.

6. Найдите матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \leq 0$ условиями

$$\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 2y + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0) , при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Ответ: $x_0 = -3/2$, $y_0 = -1/2$.

8. Домик состоит из прямой правильной четырехугольной призмы со стороной основания $3x$ и высотой y и крыши, имеющей форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой $2x$. Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 264 \text{ м}^3$ при условии $y \geq 3x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковых поверхностей призмы и пирамиды). Найдите значения параметров x и y .

Ответ: $x = 2$, $y = 6$ м.

