МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет космических исследований

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Под общей редакцией *И. В. Садовничей*

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2022

УДК 512(075.8)
ББК 22.14я73
Л59

Коллектив авторов:
С. В. Панферов, А. М. Савчук, И. В. Садовничая, В. В. Сазонов

В подготовке издания принимали участие студенты:
А. А. Костин, А. И. Моисеева

Линейная алгебра : учебное пособие / С. В. Панферови др.; под ред. И. В. Садовничей.—
Л59 Москва : МАКС Пресс, 2022. — 76 с.
ISBN 978-5-317-06771-7

Учебное пособие представляет собой необходимый минимум теоретических знаний и учит решать характерные задачи.

Предназначено для студентов ФКИ МГУ имени М. В. Ломоносова.

Ключевые слова:

УДК 512(075.8)
ББК 22.14я73

ISBN 978-5-317-06771-7

Содержание

1 Линейные пространства. Базисы **4**

2 Линейные операторы **19**

3 Корневые подпространства. Жорданова форма **39**

4 Евклидовы пространства **53**

5 Операторы в евклидовом пространстве **61**

6 Билинейные и квадратичные формы **67**

1 Линейные пространства. Базисы

Занятие 1

Определение 1. *Линейным векторным пространством (над полем K, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется множество $\mathbb{V}$ произвольных элементов (векторов), в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число:*
1) любым двум векторам $x, y \in \mathbb{V}$ поставлен в соответствие элемент из $\mathbb{V}$, обозначаемый $x + y$ и называемый суммой элементов x и y;
2) любому вектору $x \in \mathbb{V}$ и любому $\lambda \in K$ поставлен в соответствие элемент из $\mathbb{V}$, обозначаемый λx и называемый произведением числа λ и элемента x;
причём справедливы следующие аксиомы:
1. $x + y = y + x \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{V}$ — коммутативность сложения;
2. $(x + y) + z = x + (y + z) \ \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{V}$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists\, 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}, \ \ \forall\, x : \ \ x + 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}} + x = x$ — существование нейтрального элемента по сложению;
4. $\forall x \in \mathbb{V} \ \ \exists\, (-x) \in \mathbb{V} : \ \ x + (-x) = 0_{\mathbb{V}}$ — существование обратного элемента по сложению;
5. $\forall\, \lambda \in K, \forall\, x, y \in \mathbb{V} : \ \ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ — дистрибутивность;
6. $\forall\, \lambda, \mu \in K, \forall\, x \in \mathbb{V} : \ \ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ — дистрибутивность;
7. $\forall\, \lambda, \mu \in K, \ \ \forall\, x \in \mathbb{V} : \ \ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ — ассоциативность умножения;
8. $\forall\, x \in \mathbb{V} : \ \ 1 \cdot x = x$ — свойство единицы.

Определение 2. *Непустое подмножество M линейного пространства $\mathbb{V}$ (над полем K) называется линейным подпространством пространства $\mathbb{V}$, если для любых $x, y \in M$ и для любого $\lambda \in K$ выполнено: $x + y \in M$, $\lambda x \in M$.*

Определение 3. *n−мерным действительным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, называемых компонентами вектора, которая обозначается*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Два вектора называются равными, если они равны покомпонентно:

$$\vec{x} = \vec{y}, \quad \textit{где} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \textit{если} \quad x_i = y_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Несложно проверить, что совокупность всех $n-$мерных действительных векторов с введенными на них операциями сложения и умножения на скаляр образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Это пространство будем обозначать $\mathbb{R}^n$. По определению, сумма двух векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{где} \quad \vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \text{если} \quad z_i = x_i + y_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Умножение вектора на число $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{z} = \lambda\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \text{если} \quad z_i = \lambda x_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Определение 4. *Вектор $\vec{x}$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_m}$, если найдутся такие λ_1, λ_2,…,$\lambda_m \in \mathbb{R}$, что $\vec{x} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_m\vec{a_m}$*

Определение 5. *Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ называется линейно зависимой, если существуют такие константы λ_1, λ_2,…,$\lambda_m \in \mathbb{R}$, не все одновременно равные нулю, что*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = 0. \tag{1}$$

Определение 6. *Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ линейно независима, если соотношение (1) выполняется только при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, …, $\lambda_m = 0$.*

Определение 7. *Говорят, что векторное пространство $\mathbb{V}$ порождается множеством S, если любой вектор $\vec{x} \in \mathbb{V}$ можно представить в виде конечной линейной комбинации векторов множества S. Векторное пространство $\mathbb{V}$ называется конечномерным, если оно порождается множеством S, содержащим конечное число векторов.*

Если пространство нельзя породить никакой конечной системой векторов, то оно, по определению, бесконечномерно.

Определение 8. *Базисом линейного пространства $\mathbb{V}$ называется (упорядоченная) линейно независимая система векторов, порождающая это пространство.*

Теорема 1. *Всякое конечномерное линейное пространство $\mathbb{V}$ обладает базисом. Более точно, из всякого конечного множества векторов S, порождающего пространство $\mathbb{V}$, можно выбрать базис этого пространства.*

Теорема 2. *Все базисы конечномерного пространства $\mathbb{V}$ содержат одинаковое число векторов.*

Доказательства теорем 1 и 2 см. в [?], Лекция 5, п. 10. Там же мы отмечали, что *если система состоит из n векторов, причем $n = \dim \mathbb{V}$, то любое из условий — «система линейно независима» или «система порождает $\mathbb{V}$» — влечет «система является базисом $\mathbb{V}$».*

Определение 9. *Количество векторов в любом из базисов линейного векторного пространства $\mathbb{V}$ называется его размерностью и обозначается $\dim \mathbb{V}$.*

Таким образом, в любом конечномерном пространстве любая система векторов, число которых превышает размерность пространства, заведомо линейно зависима. В бесконечномерном пространстве для любого натурального n можно указать n линейно независимых векторов этого пространства. Более того, это критерий бесконечномерности пространства (докажите это сами).

Утверждение 1. *Любую линейно независимую систему S векторов конечномерного пространства $\mathbb{V}$ можно дополнить до базиса.*

Доказательство. Пусть в системе m векторов, а $\dim \mathbb{V} = n$. Мы уже знаем, что $m \leq n$, причем в случае $m = n$ система уже является базисом, т.е. дополнять ее не нужно. Пусть $m < n$. Если бы $\operatorname{Lin}(S) = \mathbb{V}$, то система была бы базисом, что противоречит $m \neq n$. Значит, есть вектор $\vec{x} \notin \operatorname{Lin}(S)$. Добавим его в систему — новая система останется линейно независимой, а число ее векторов увеличится на 1. Если $m + 1 < n$, то повторим наши рассуждения, добавим еще один вектор, и будем делать так, пока число векторов в системе не сравняется с n. В результате, получим линейно независимую систему из n векторов, т.е. базис в $\mathbb{V}$. $\square$

Пусть в линейном векторном пространстве $\mathbb{V}$ введено два различных базиса: $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ и $\mathcal{E}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$. Представим векторы базиса $\mathcal{E}'$ в виде линейных комбинаций векторов базиса $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n, \\ \dots \\ \vec{e}'_n = c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n. \end{cases} \tag{2}$$

Определение 10. *Матрица* $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ *называется матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.*

Заметим, что в матрице C по столбцам стоят координаты векторов нового базиса $\mathcal{E}'$ в старом базисе $\mathcal{E}$. Несложно проверить, что справедлива следующая

Теорема 3. *1) Если C — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$, а D — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}'$ к базису $\mathcal{E}''$, то CD — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}''$.*
2) Невырожденные матрицы (и только они) являются матрицами перехода от одного базиса к другому.
3) Если C — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$, то C^{-1} — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}'$ к базису $\mathcal{E}$.
4) Пусть C — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Если вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x'_1, \dots, x'_n)$ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ соответственно, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Обратите внимание на формулу (3). Матрица C является матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$, но для координат вектора справедливо соотношение: столбец координат в **старом** базисе равен матрице C, умноженной на столбец координат в **новом** базисе.

Если в пространстве $\mathbb{V}$ введен линейный базис $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, то каждому вектору $\vec{x} \in \mathbb{V}$ мы можем сопоставить его коэффициенты разложения по этому базису $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$, т.е. получаем отображение $\mathcal{A} : \vec{x} \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Это отображение корректно определено, поскольку коэффициенты разложения по базису определяются вектором $\vec{x}$ однозначно. Это отображение линейно (это очевидно). По набору своих коэффициентов вектор восстанавливается однозначно, т.е. $\mathcal{A}$ — линейная биекция $\mathbb{V}$ и $\mathbb{R}^n$.

Определение 11. *Линейные биекции одного линейного пространства на другое называют линейными изоморфизмами пространств.*

Таким образом, *любое n–мерное линейное пространство $\mathbb{V}$ над полем $\mathbb{R}$ изоморфно $\mathbb{R}^n$*. Точно так же можно сказать, что любое n–мерное пространство над $\mathbb{C}$ изоморфно $\mathbb{C}^n$. Этот изоморфизм позволяет нам сводить операции в произвольном абстрактном конечномерном пространстве к привычным операциям над векторами.[1]

Задача 1. Исследуйте на линейную независимость систему функций $\{1, \ln t, \ln(2t)\}$ в линейном пространстве всех непрерывных на $t \in (0, +\infty)$ функций.

Решение. Для доказательства того, что данная система функций является линейно зависимой, достаточно указать такие $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, для которых выполняется равенство

$$\alpha \cdot 1 + \beta \ln t + \gamma \ln(2t) = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Это равенство выполняется, например, для $\alpha = -\ln 2, \beta = -1, \gamma = 1$. Следовательно, данная система функций является линейно зависимой.
Ответ: линейно зависима.

Задача 2. Докажите, что пространство всех вещественных многочленов $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ ($n \in \mathbb{N}$ произвольно) бесконечномерно.

Решение. Заметим, что система многочленов $p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2, \dots$ линейно независима. Действительно, их линейная комбинация есть многочлен $p(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$, который тождественно равен нулю только для нулевых c_j (по основной теореме алгебры вещественный ненулевой многочлен имеет не более n корней). Значит, для любого n мы нашли линейно независимую систему из n векторов, то есть наше пространство бесконечномерно.

[1]Везде далее мы, по умолчанию, считаем, что умножение матрицы на вектор происходит по правилу $A\vec{x}$, т.е. матрица стоит слева от вектора. Таким образом, все наши векторы — это векторы столбцы. Однако мы очень часто будем записывать их координаты в строчку. Это сделано просто для удобства — столбцы на печати занимают очень много места. Можно конечно писать над каждым вектором–строкой знак транспонирования, показывая читателю, что на самом деле записан вектор–столбец, но мы надеемся, что наши читатели сами в состоянии представить себе этот знак транспонирования там, где он нужен. Итак: по умолчанию, все наши векторы — это столбцы.

Определение 12. *Пусть $\mathbb{V}$ — линейное пространство над полем K; $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{V}$. Линейной оболочкой векторов $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ называют множество всех их линейных комбинаций*

$$\mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{a}_k \,|\, c_k \in K, k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Очевидно, что линейная комбинация нескольких таких сумм есть вновь линейная комбинация векторов $\vec{a}_k$, т.е. *линейная оболочка есть линейное подпространство.* При этом, каждый вектор из $L = \mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ раскладывается по системе $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ в линейную комбинацию. Если дополнительно известно, что система $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ линейно независима, то она превращается в базис в L. В частности, любое линейное пространство есть линейная оболочка своих базисных векторов.

Задача 3. Докажите, что векторы вида $(b, -a, a + 3b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдите его базис и размерность. Дополните базис подпространства до базиса всего пространства.

Решение. Обозначим множество таких векторов через M и проверим, что оно является линейным подпространством. Пусть векторы $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in M$. Тогда

$$x_3 = -x_2 + 3x_1, \quad y_3 = -y_2 + 3y_1.$$

Возьмем произвольные α, $\beta \in \mathbb{R}$ и обозначим $\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$. Для координат вектора $\vec{z}$ получим соотношения:

$$z_3 = \alpha x_3 + \beta x_3 = \alpha(-x_2 + 3x_1) + \beta(-y_2 + 3y_1) = -(\alpha x_2 + \beta y_2) + 3(\alpha x_1 + \beta y_1) = -z_2 + 3z_1.$$

Значит, M — действительно линейное подпространство.

Найдем базис. Если положить $x_1 = 1, x_2 = 0$, то получим, что $x_3 = 3$, то есть $\vec{x} = (1, 0, 3)$. Если положить $y_1 = 0, y_2 = 1$, то $y_3 = -1$, то есть $\vec{y} = (0, 1, -1)$. Очевидно, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейно независимы.

Покажем, что они образуют базис в подпространстве M. Возьмем произвольный вектор вида $(b, -a, a + 3b)$. Его можно представить в виде $(b, -a, a + 3b) = b\vec{x} - a\vec{y}$. Значит, это действительно базис. Он состоит из двух векторов, следовательно, размерность подпространства равна двум.

Дополним базис подпространства до базиса всего пространства. Пусть вектор $\vec{z}$ ортогонален векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Тогда

$$\begin{cases} z_1 + 3z_2 = 0, \\ z_2 - z_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, можем взять $z_1 = 3, z_2 = -1, z_3 = -1$, то есть $\vec{z} = (3, -1, -1)$.

Ответ: размерность подпространства равна двум; базис подпространства состоит, например, из векторов $\vec{x} = (1, 0, 3)$ и $\vec{y} = (0, 1, -1)$; дополняется до базиса всего пространства, например, вектором $\vec{z} = (3, -1, -1)$.

Итак, первый способ задать линейное подпространство — указать порождающую систему векторов. Часто приходится решать следующую задачу: дана система векторов $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, которые своими линейными комбинациями порождают некоторое линейное подпространство $\mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$. Необходимо указать базис в этом подпространстве. Решить эту задачу не сложно. Надо составить матрицу, записав координаты векторов по строкам. Затем элементарными преобразованиями над строками привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки финальной матрицы и есть базис в подпространстве.

Действительно, они получены в результате линейных комбинаций исходных строк, т.е. лежат в подпространстве. С другой стороны, проводя все преобразования справа налево, получим исходные строки в виде линейных комбинаций строк финальной матрицы. Ну а тогда и любой вектор подпространства — линейная комбинация исходных строк — есть линейная комбинация строк финальной матрицы. Наконец, строки финальной матрицы линейно независимы (это потому, что финальная матрица ступенчатая — подумайте, почему).

Задача 4. Подпространство $X \subset \mathbb{R}^5$ порождено векторами $\vec{a}_1 = (2, 1, 0, -5, 8)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, -1, -1, 1)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$ и $\vec{a}_4 = (-1, 0, 2, 2, -1)$. Найдите базис в X.

Решение. Запишем данные векторы в матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, базисом являются векторы $\vec{e}_1 = (1, 0, -2, -2, 1)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, -1, -1, 1)$ и $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$.
Ответ: $\vec{e}_1 = (1, 0, -2, -2, 1)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, -1, -1, 1)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$.

Второй способ задать подпространство — указать систему линейных уравнений на координаты векторов, лежащих в подпространстве.

Задача 5. Докажите, что множество M всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию ортогональности: $(\vec{x}, \vec{a}) = 0$, где $\vec{a} = (1, -2, 0)$, является линейным подпространством в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдите его базис и размерность. Дополните базис подпространства до базиса всего пространства.

Решение. Докажем линейность. Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ удовлетворяют условию ортогональности, то есть $(\vec{x}, \vec{a}) = 0$, $(\vec{y}, \vec{a}) = 0$.

Умножим первое из соотношений на α, второе на β и сложим. Получим, что

$$(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{a}) = 0,$$

а значит, вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ ортогонален $\vec{a}$ при любых значениях α и β. Линейность доказана.

Найдем базис. Возьмём, допустим, векторы $\vec{x} = (2, 1, 0)$ и $\vec{y} = (0, 0, 1)$. Они линейно независимы и ортогональны вектору $\vec{a}$. Докажем, что они образуют базис в нашем подпространстве. Пусть произвольный вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ортогонален вектору $\vec{a}$, тогда $b_1 - 2b_2 = 0$. Значит, можем представить его в виде $\vec{b} = 0,5b_1 \cdot \vec{x} + b_3 \cdot \vec{y}$. Доказали, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ действительно образуют базис подпространства. Следовательно, размерность подпространства равна двум.

Дополним базис полученного линейного подпространства до базиса всего пространства. Поскольку размерность всего пространства равна 3, то нам нужно найти еще один вектор, который будет ортогонален векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Пусть он имеет вид $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$, тогда его координаты должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 0, \\ z_3 = 0. \end{cases}$$

Возьмем, например, $z_1 = -1$, получим $z_2 = 2$, то есть $\vec{z} = (-1, 2, 0)$.
Ответ: размерность подпространства равна двум; базис подпространства состоит, например, из векторов $\vec{x} = (2, 1, 0)$ и $\vec{y} = (0, 0, 1)$; дополняется до базиса всего пространства, например, вектором $\vec{z} = (-1, 2, 0)$.

В предыдущей задаче подпространство задавалось одним уравнением: $x_1 - 2x_2 = 0$. Ясно, что в качестве вектора $\vec{a}$ можно было бы взять произвольный вектор, т.е. множество векторов $\vec{x}$, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ всегда есть линейное подпространство.

Заметим простую вещь: *пересечение двух линейных подпространств есть линейное подпространство*, поскольку линейные комбинации векторов из пересечения не выводят за пределы ни первого, ни второго подпространства. Тогда множество векторов, координаты которых удовлетворяют двум уравнениям описанного выше вида, тоже образуют линейное подпространство. То же верно для трех уравнений и т.д. Это и есть второй способ задания подпространства.

Задача 6. Выясните, являются ли заданные множества подпространствами пространства $\mathbb{R}^n$. В случае положительного ответа найдите базис и размерность соответствующего подпространства.

1. Множество всех векторов $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$;
2. Множество всех векторов, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$;
3. Множество всех векторов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, у которых все компоненты x_i — целые числа.

Решение.

1. Множество всех векторов, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Умножение таких векторов на любое число и сложение двух таких векторов дают вектор, сумма координат которого также равна нулю. Следовательно, данные векторы образуют подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. В качестве базиса можно выбрать векторы, образующие базисное решение уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$:

$$\begin{gathered}\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, -1);\\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, -1);\\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, -1);\\ ...\\ \vec{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, -1).\end{gathered}$$

   Значит, размерность подпространства равна $n-1$.

2. Множество всех векторов, удовлетворяющих условию $x_1+x_2+...+x_n = 1$, не образует подпространство, поскольку после умножения такого вектора, например, на 2, получается вектор, для которого данное равенство не выполняется, т.е. не принадлежащий данному множеству.
3. Множество всех векторов, у которых компоненты x_i — целые числа, не образует подпространство, поскольку после умножения такого вектора, например, на π, получается вектор, у которого нет ни одной целочисленной координаты (иначе число π оказалось бы рациональным), т.е. не принадлежащий данному множеству.

Ответ: 1) является, базис: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, -1)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, -1)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, -1)$, ... , $\vec{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, -1)$; размерность равна $n-1$; 2) не является; 3) не является.
Отметим, что множество в пункте 2) предыдущей задачи является *аффинным подпространством* в $\mathbb{R}^n$.

Определение 13. *Множество M в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ называется аффинным подпространством, если найдется такой вектор $\vec{x}_0$, что множество $M_0 = \{\vec{x}-\vec{x}_0 :\ \vec{x} \in M\}$ — линейное подпространство.*

Иными словами, аффинное подпространство — это линейное подпространство, подвергнутое сдвигу (параллельному переносу).

Задача 7. Линейное подпространство X в $\mathbb{R}^5$ задано системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Укажите базис в этом подпространстве.

Решение. Решим систему методом Гаусса. Вычтем из второго уравнения первое, вычтем из третьего уравнения удвоенное первое, получим

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на два и вычтем второе, получим

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Выберем x_4 и x_5 свободными переменными и выразим

$$\begin{cases} x_1 = -4x_4 - 2x_5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3x_4 + x_5. \end{cases}$$

Взяв $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, получим вектор $\vec{x} = (-4, 0, 3, 1, 0)$. Взяв $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, получим вектор $\vec{y} = (-2, 0, 1, 0, 1)$. Они линейно независимы (достаточно посмотреть на их четвертую и пятую координаты) и образуют базис в подпространстве.
Ответ: $\vec{x} = (-4, 0, 3, 1, 0)$, $\vec{y} = (-2, 0, 1, 0, 1)$.

Задача 8. Подпространство L арифметического пространства $\mathbb{R}^5$ является линейной оболочкой, натянутой на вектора $g_1 = (1, 2, 0, 3, 1)$, $g_2 = (1, 0, 1, 2, -1)$, $g_3 = (0, 1, 1, -1, 1)$, $g_4 = (0, 1, -2, 2, 1)$. Найдите систему линейных алгебраических уравнений, все решения которой образуют подпространоство L.

Решение.

1. Пусть вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{L}$, тогда его можно представить в виде $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4 = x$. Это представление в координатах имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & x_4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & x_5 \end{array}\right).$$

Далее, используя метод Гаусса, приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & x_4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & x_5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & x_4 - 3x_3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 + x_4 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_5 \end{array}\right).$$

Получаем, что условия на координаты арифметических векторов дают следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что никаких дополнительных уравнений для задания подпространства L не нужно. Действительно, ранг матрицы, составленной из координат векторов, оказался равен 3 (число ступенек после приведения к ступенчатому виду), т.е. $\dim L = 3$. Мы составили систему из двух независимых уравнений (независимость наших уравнений очевидна) на пять неизвестных. Вспомним курс алгебры — пространство решений будеет иметь размерность $5 - 2 = 3$. Проверкой убеждаемся, что исходные векторы удовлетворяют полученной системе, т.е. подпространство L входит в пространство решений системы. Из совпадения размерностей следует теперь совпадение пространства L и пространства решений системы.

Ответ:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Определение 14. *Обозначим $\mathbb{M}_{n,m}$ линейное пространство матриц размера $n \times m$ с комплексными элементами.*

Задача 9. Установите, являются ли заданные множества подпространствами пространства $\mathbb{M}_{n,n}$, $n \geq 2$. В случае положительного ответа найдите базис и размерность подпространства.

1. Множество всех симметрических квадратных матриц порядка n, то есть матриц, для которых $A^T = A$.

2. Множество всех кососимметрических квадратных матриц порядка n, то есть матриц, для которых $A^T = -A$.

3. Множество всех квадратных вырожденных матриц порядка n, то есть матриц, для которых $\det A = 0$.

Решение.

1. Если $C = \alpha A + \beta B$, то каждый элемент $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$. Если A и B симметрические, то $a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{ij} = b_{ji}$, откуда получаем $c_{ij} = c_{ji}$. Итак, это множество является подпространством — найдем базис в нем. Положим E_{ij} — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением $e_{ij} = e_{ji} = 1$. Индексы i, j будем выбирать так, что $1 \leq i \leq j \leq n$. Теперь заметим, что линейная комбинация таких матриц с коэффициентами a_{ij}

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} E_{ij}$$

как раз равна симметрической матрице с элементами a_{ij}, т.е. мы построили базис $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$. Остается заметить, что число матриц в базисе равно $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. При умножении любой кососимметрической квадратной матрицы порядка n на любое число получается также кососимметрическая квадратная матрица порядка n. Если $A^T = -A$, то $(cA)^T = -cA$; сумма двух кососимметрических квадратных матриц порядка n также является кососимметрической квадратной матрицей порядка n. Следовательно, множество всех кососимметрических квадратных матриц порядка n является подпространством пространства $M_{n,n}$. Базис составляют матрицы E'_{ij}, у которых все элементы нули, кроме $e'_{ij} = 1$ и $e'_{ji} = -1$. Отличие с п 1) в том, что $1 \leq i < j \leq n$ (т.е. исключается случай $i = j$). Действительно, легко видеть, что на диагонали косоисимметрической матрицы стоят нули. Значит, размерность нашего подпространства есть $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Складывая две вырожденные матрицы, легко можно получить невырожденную (придумайте, например, две вырожденные $n \times n$ матрицы, сумма которых равна единичной). Итак, указанное множество не является линейным подпространством.

Ответ: 1) является, базис: $\{E_{ij}\}$, $1 \le i \le j \le n$, где E_{ij} — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением $e_{ij} = e_{ji} = 1$; размерность равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$; 2) является, базис: $\{E'_{ij}\}$, $1 \le i < j \le n$, где E'_{ij} — матрицы, у которых все элементы нули, кроме $e'_{ij} = 1$ и $e'_{ji} = -1$; размерность равна $\dfrac{n(n-1)}{2}$; 3) не является.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Для каждого из следующих множеств векторов на плоскости определите, является ли оно линейным пространством относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число (если не оговорено противное, то предполагается, что все векторы отложены от фиксированной точки O плоскости, являющейся началом прямоугольной системы координат).
   1) Все векторы, концы которых лежат на данной прямой.
   2) Все векторы, начала и концы которых лежат на данной прямой.
   3) Все векторы, концы которых не лежат на данной прямой.
   4) Все векторы, концы которых лежат: а) в первой четверти системы координат; б) в первой или третьей четверти.
   5) Все векторы, которые образуют с данным ненулевым вектором $\vec{a}$ заданный угол φ, $0 \le \varphi < \pi$.

2. Определите, является ли линейным пространством множество
   а) $\mathbb{Z}$ целых чисел,
   б) $\mathbb{Q}$ рациональных чисел,
   в) $\mathbb{R}$ вещественных чисел
   относительно стандартных операций сложения и умножения чисел.

3. Пусть x, y, z — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:
   а) x, $x+y$, $x+y+z$;
   б) $x+y$, $y+z$, $z+x$;
   в) $x-y$, $y-z$, $z-x$?

4. Дополните систему t^5+t^4, t^5-3t^3, t^5+2t^2, t^5-t до базиса пространства $\mathbb{P}_5$ многочленов степени не выше 5.

5. Образуют ли линейное подпространство пространства $\mathbb{V}_2$ всех геометрических векторов плоскости все векторы плоскости,
   а) каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy;
   б) концы которой лежат на данной прямой (начала предполагаются совпадающими с началом координат);
   в) начала и концы которых лежат на данной прямой;
   г) концы которых лежат в первой четверти системы координат; д) концы которых лежат в первой или третьей четверти?

6. Найдите базис и размерность линейной оболочки векторов $\vec{a}_1 = (1,0,0,-1)$, $\vec{a}_2 = (2,1,1,0)$, $\vec{a}_3 = (1,1,1,1)$, $\vec{a}_4 = (1,2,3,4)$ и $\vec{a}_5 = (0,1,2,3)$.

Ответы: 1. 1) Да, если прямая проходит через начало координат. 2) Да. 3) Нет. 4) а), б) Нет. 5) Нет.
2. а), б) Нет. в) Да.
3. а), б) Да. в) Нет.
4. а) Нет. б) Только если прямая проходит через начало координат. в) Да. г) Нет. д) Нет.
5. Размерность равна 3, базис составляют, например, векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$.

Занятие 2

Есть две операции, которые часто приходится выполнять над подпространствами.

Определение 15. *Пусть M и N — два линейных подпространства в линейном пространстве $\mathbb{V}$. Их линейной суммой называется множество*

$$X = M + N = \{\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 : \ \vec{x}_1 \in M, \ \vec{x}_2 \in N\}.$$

Очевидно, что если $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in X$ и $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in X$, где $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1 \in X_1$, а $\vec{x}_2$, $\vec{y}_2 \in X_2$, то и линейная комбинация

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{y}_1) + (\alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{y}_2) = \vec{z}_1 + \vec{z}_2,$$

где $\vec{z}_1 = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{y}_1 \in M$, а $\vec{z}_2 = \alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{y}_2 \in N$.
Таким образом, сумма двух линейных подпространств вновь есть линейное подпространство.

Определение 16. *Пересечением линейных подпространств M и N называется множество*

$$M \cap N = \{\vec{x} \in \mathbb{V} \,|\, \vec{x} \in M \text{ и } \quad \vec{x} \in N\}.$$

Очевидно, что $M \cap N$ — линейное подпространство пространства $\mathbb{V}$.

Теорема 4. *Пусть M, N — подпространства линейного пространства $\mathbb{V}$. Тогда*

$$\dim(M + N) = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N).$$

Доказательство. Пусть $\dim M = m$, $\dim N = n$, $\dim M \cap N = l$. Найдем базис из $m + n - l$ векторов в пространстве $M + N$. Пусть $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_l\}$ — базис в пространстве $M \cap N$. Дополним его векторами $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{m-l}$ до базиса пространства M, а векторами $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-l}$ до базиса пространства N. Рассмотрим систему $\mathcal{E} = \{x_1, x_2, \ldots, x_l, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{m-l}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-l}\}$ и покажем, что она образует базис пространства $M + N$.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in M + N$. Его можно представить в виде $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in M$, $\vec{z} \in N$. Разложим векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ по базисам подпространств M и N соответственно:

$$\vec{y} = \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{x}_l + \alpha_{l+1}\vec{y}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{y}_{m-l}, \quad \vec{z} = \beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_l\vec{x}_l + \beta_{l+1}\vec{z}_1 + \ldots + \beta_n\vec{z}_{n-l}.$$

Тогда

$$\vec{x} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{x}_1 + \ldots + (\alpha_l + \beta_l)\vec{x}_l + \alpha_{l+1}\vec{y}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{y}_{m-l} + \beta_{l+1}\vec{z}_1 + \ldots + \beta_n\vec{z}_{n-l},$$

то есть любой вектор пространства $M + N$ можно представить в виде линейной комбинации векторов системы $\mathcal{E}$.

Осталось проверить, что система $\mathcal{E}$ линейно независима. Для этого представим вектор $\vec{0} \in M + N$ в виде линейной комбинации векторов системы $\mathcal{E}$:

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_l\vec{x}_l + \mu_1\vec{y}_1 + \ldots + \mu_{m-l}\vec{y}_{m-l} + \nu_1\vec{z}_1 + \ldots + \nu_{n-l}\vec{z}_{n-l}. \tag{4}$$

Обозначим $\vec{h} = \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_l\vec{x}_l + \mu_1\vec{y}_1 + \ldots + \mu_{m-l}\vec{y}_{m-l}$. Тогда $\vec{h} \in M$. С другой стороны, из (4) следует, что $\vec{h} = -(\beta_{l+1}\vec{z}_1 + \ldots + \beta_n\vec{z}_{n-l})$, значит, $\vec{h} \in N$. Следовательно, $\vec{h} \in M \cap N$. Тогда этот вектор должен раскладываться по системе $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_l\}$, то есть

$$\vec{h} = \omega_1\vec{x}_1 + \ldots + \omega_l\vec{x}_l = \omega_1\vec{x}_1 + \ldots + \omega_l\vec{x}_l + 0 \cdot \vec{y}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{y}_{m-l}.$$

В силу единственности разложения по базису отсюда получаем, что $\lambda_1 = \omega_1$, ... , $\lambda_l = \omega_l$, $\mu_1 = 0$, ... , $\mu_{m-l} = 0$. Значит, равенство (4) можно переписать в виде

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_l\vec{x}_l + \nu_1\vec{z}_1 + \ldots + \nu_{n-l}\vec{z}_{n-l}.$$

Но система $\{x_1, x_2, \ldots, x_l, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-l}\}$ линейно независима (так как является базисом пространства N), следовательно, $\lambda_1 = 0$, ... , $\lambda_l = 0$, $\nu_1 = 0$, ... , $\nu_{n-l} = 0$. Получили, что все коэффициенты в соотношении (4) равны нулю, что и означает линейную независимость системы $\mathcal{E}$. $\square$

Определение 17. *Сумма $M+N$ подпространств линейного пространства $\mathbb{V}$ называется прямой, если их пересечение $M\cap N=\{0\}$. В этом случае пишут $M\oplus N$.*

Теорема 5. *Пусть $\mathbb{V}$ — линейное пространство, M и N — его линейные подпространства; $\mathbb{V}=M+N$. Следующие условия эквивалентны:*
а) $\mathbb{V}=M\oplus N$;
б) любой вектор $\vec{x}\in\mathbb{V}$ однозначно представляется в виде суммы $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, где $\vec{y}\in M$, $\vec{z}\in N$;
в) найдется вектор $\vec{x}\in\mathbb{V}$, который однозначно представляется в виде суммы $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, где $\vec{y}\in M$, $\vec{z}\in N$;
г) нулевой вектор однозначно представляется в виде суммы векторов из M и из N;
д) если $\mathcal{E}_1$ — базис в M, а $\mathcal{E}_2$ — базис в N, то $\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$ — базис в $\mathbb{V}$;
е) $\dim\mathbb{V}=\dim M+\dim N$.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Из определения суммы линейных пространств сразу следует, что любой вектор $\vec{x}\in\mathbb{V}$ может быть представлен в виде $\vec{y}+\vec{z}$, где $\vec{y}\in M$, $\vec{z}\in N$. Докажем единственность такого представления. Предположим, что некоторый вектор $\vec{x}\in\mathbb{V}$ может быть представлен двумя разными способами: $\vec{x}=\vec{y}_1+\vec{z}_1$ и $\vec{x}=\vec{y}_2+\vec{z}_2$, где $\vec{y}_1,\vec{y}_2\in M$, $\vec{z}_1,\vec{z}_2\in N$, $\vec{y}_1\neq\vec{y}_2$, $\vec{z}_1\neq\vec{z}_2$. Тогда $\vec{y}_1-\vec{y}_2=\vec{z}_2-\vec{z}_1$. Обозначим $\vec{h}=\vec{y}_1-\vec{y}_2=\vec{z}_2-\vec{z}_1$. Получим, что $\vec{h}\neq 0$, $\vec{h}\in M\cap N$. Противоречие с тем, что $\mathbb{V}=M\oplus N$.
Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна.
в) $\Rightarrow$ г). Предположим, что $\vec{0}=\vec{y}_1+\vec{z}_1=\vec{y}_2+\vec{z}_2$, где $\vec{y}_1,\vec{y}_2\in M$, $\vec{z}_1,\vec{z}_2\in N$, $\vec{y}_1\neq\vec{y}_2$, $\vec{z}_1\neq\vec{z}_2$. Тогда вектор $\vec{h}=\vec{y}_1-\vec{y}_2=\vec{z}_2-\vec{z}_1\neq 0$, $\vec{h}\in M\cap N$. Значит, любой вектор $\vec{x}\in\mathbb{V}$, представимый в виде $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, где $\vec{y}\in M$, $\vec{z}\in N$, может быть также представлен в виде $\vec{x}=(\vec{y}+\vec{h})+(\vec{z}+\vec{h})$, где $\vec{y}+\vec{h}\in M$, $\vec{z}+\vec{h}\in N$. Противоречие.
г) $\Rightarrow$ д). Пусть $\mathcal{E}_1=\{\vec{y}_1,\vec{y}_2,\ldots,\vec{y}_m\}$ — базис в M, а $\mathcal{E}_2=\{\vec{z}_1,\vec{z}_2,\ldots,\vec{z}_n\}$ — базис в N. Поскольку $\mathbb{V}=M+N$, то система $\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$ порождает все пространство $\mathbb{V}$. Нужно доказать, что она линейно независима. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_n$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1\vec{y}_1+\ldots+\alpha_m\vec{y}_m+\beta_1\vec{z}_1+\ldots+\beta_n\vec{z}_n=0.$$

Обозначим $\vec{y}=\alpha_1\vec{y}_1+\ldots+\alpha_m\vec{y}_m\in M$, $\vec{z}=\beta_1\vec{z}_1+\ldots+\beta_n\vec{z}_n\in N$. Тогда имеем: $\vec{y}+\vec{z}=0$, откуда $\vec{y}=\vec{z}=0$ (поскольку нулевой вектор имеет единственное представление). Но системы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ линейно независимы, следовательно, из равенств $\alpha_1\vec{y}_1+\ldots+\alpha_m\vec{y}_m=0$, $\beta_1\vec{z}_1+\ldots+\beta_n\vec{z}_n=0$ вытекает $\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0$, $\beta_1=\ldots=\beta_n=0$. Противоречие.
д) $\Rightarrow$ е). Сразу следует из определения размерности линейного пространства.
е) $\Rightarrow$ а). Следует из теоремы 4. □

Базис суммы двух подпространств можно искать следующим образом:
1. Найти линейные базисы $\{\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_m\}$ и $\{\vec{z}_1,\ldots,\vec{z}_n\}$ в M и N.
2. Объединить эти векторы в единую систему, а затем сформировать на основе этой системы искомый базис. Напомним, что для этого надо составить матрицу из векторов системы и привести ее элементарными преобразованиями к ступенчатому виду. Ответом будут строки финальной матрицы.

Задача 10. Первое подпространство $M=\mathrm{Lin}\{(1,0,1,0),\ (0,1,0,1)\}$, а второе подпространство $N=\mathrm{Lin}\{(1,1,0,0),\ (0,0,1,1)\}$. Найдите базис в сумме подпространств. Является ли сумма $M+N$ прямой?

Решение. Очевидно, что векторы, задающие M линейно независимы, т.е. являются базисом в M. Аналогично для подпространства N.[2] Составим матрицу из координат векторов (вектора

[2]Эти факты можно было и не отмечать — алгоритм поиска базиса в $M+N$ сработает и тогда, когда подпространства заданы как линейные оболочки линейно зависимых систем. При приведении матрицы к ступенчатому виду «лишние вектора» все равно превратятся в нулевые строчки и пропадут.

записываем по строкам) и приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Получили базис в $M+N$ из векторов $\vec{x}=(1,0,1,0)$, $\vec{y}=(0,1,0,1)$ и $\vec{z}=(0,0,1,1)$. Таким ообразом, $\dim(M+N)=3\neq\dim M+\dim N=2+2=4$, т.е. сумма $M+N$ не прямая.
Ответ: базис в $M+N$ — это $\vec{x}=(1,0,1,0)$, $\vec{y}=(0,1,0,1)$ и $\vec{z}=(0,0,1,1)$, сумма $M+N$ не прямая.

Задача 11. Дано два подпространства: M, заданное системой уравнений $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$ и N, заданное системой уравнений $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0,\\x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$ Найдите базис линейного подпространства $M+N$. Является ли сумма подпространств прямой?

Решение. Найдём базис M.

$$\begin{cases}x_1=x_2-2x_3,\\x_3=2x_2,\end{cases}$$

Взяв $x_2=1$, получим вектор $\vec{y_1}=(-3,1,2)$. Это базис в подпространстве M. Найдём базис N.

$$\begin{cases}x_2=2x_1+2x_3,\\x_3=-3x_1\end{cases}$$

Взяв $x_1=1$, получим вектор $\vec{z_1}=(1,-4,-3)$. Это базис в подпространстве N. Объединим вектора в единую систему. $\begin{pmatrix}\vec{y_1}\\\vec{z_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-4&-3\end{pmatrix}$. Приведём эту матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&-3\\0&-11&-7.\end{pmatrix}$$

Базис пространства $M+N$ — это $\vec{x_1}=(1,-4,-3)$ и $\vec{x_2}=(0,-11,-7)$. Таким образом, $\dim M=\dim N=1$, а $\dim(M+N)=2$, т.е. сумма подпространств прямая.
Ответ: $\vec{x_1}=(1,-4,-3)$, $\vec{x_2}=(0,-11,-7)$, сумма подпространств прямая.

Базис пересечения двух подпространств можно искать следующим образом:
1. Найти системы линейных уравнений, определяющие M и N.
2. Объединить эти системы в единую систему и решить ее методом Гаусса. Найденная фундаментальная система решений является базисом в пересечении $M\cap N$

Задача 12. Подпространство $M=\mathrm{Lin}\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$, где векторы равны $\vec{a}_1=(1,2,1)$, $\vec{a}_2=(1,1,-1)$, $\vec{a}_3=(1,3,3)$. Подпространство $N=\mathrm{Lin}\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$, где векторы равны $\vec{b}_1=(1,2,2)$, $\vec{b}_2=(2,3,-1)$, $\vec{b}_3=(1,1,-3)$. Найдите базис в сумме $M+N$ и в пересечении $M\cap N$.

Решение. Для суммы $M+N$ объединим векторы в матрицу $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&3&3\\1&2&2\\2&3&-1\end{pmatrix}$ Приведём к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&3&3\\1&2&2\\2&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&2&4\\0&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Возьмем ненулевые строки финальной матрицы, получим базисные векторы

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1), \vec{u}_3 = (0, 0, 1).$$

Для поиска базиса пересечения необходимо вначале задать M и N системой уравнений. Чтобы составить систему, задающую M, найдем ее коэффициенты c_1, c_2, c_3. Поскольку системе должны удовлетворять все три вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$, то получаем систему

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 0, \\ -c_2 - 2c_3 = 0, \\ c_2 + 2c_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 3c_3, \\ c_2 = -2c_3. \end{cases}$$

Взяв $c_3 = 1$, получаем решение $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$. Следовательно, подпространство M задается одним уравнением $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Чтобы составить систему, задающую N, найдем ее коэффициенты d_1, d_2, d_3. Поскольку системе должны удовлетворять все три вектора $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ и $\vec{b}_3$, то получаем систему

$$\begin{cases} d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 0, \\ 2d_1 + 3d_2 - d_3 = 0, \\ d_1 + d_2 - 3d_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 0, \\ d_2 + 5d_3 = 0, \\ d_2 + 5d_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} d_1 = 3d_3, \\ d_2 = -5d_3. \end{cases}$$

Взяв $d_3 = 1$, получаем решение $d_1 = 3$, $d_2 = -5$, $d_3 = 1$. Следовательно, подпространство N задается одним уравнением $3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$.
Для поиска базиса подпространства $M \cap N$ составим систему уравнений из системы задающей M (уравнение $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$) и системы, задающей N. Теперь решим эту систему методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решением являются векторы $\vec{v}_1 = (t, 0, -3t)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. базис подпространства $M \cap N$ — вектор $\vec{v} = (1, 0, -3)$.
Ответ: базис суммы: $\vec{u}_1 = (1, 1, -1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1), \vec{u}_3 = (0, 0, 1)$; базис пересечения: $\vec{v} = (1, 0, -3)$.

Задача 13. В пространстве $\mathbb{V} = M_{n,n}$ квадратных матриц взяли подпространство M всех симметрических матриц и подпространство N всех кососимметрических матриц. Верно ли, что $\mathbb{V} = M \oplus N$?

Решение. Если дана матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, то мы всегда можем задать $b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{j,i})$ и $c_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{i,j} - a_{j,i})$. Тогда, с одной стороны, $a_{i,j} = b_{i,j} + c_{i,j}$, а сдругой стороны, $b_{j,i} = b_{i,j}$, и $c_{j,i} = -c_{i,j}$. Мы представили произвольную матрицу в виде суммы симметрической и кососимметрической, т.е. $\mathbb{V} = M + N$.
Вспомним, что $\dim M = n(n+1)/2$, $\dim N = n(n-1)/2$, а $\dim \mathbb{V} = n^2$ (кстати, почему?). Значит, $\dim(M + N) = \dim M + \dim N$, т.е. наша сумма прямая.
Ответ: да.

Определение 18. *Пусть в линейном пространстве $\mathbb{V}$ задано линейное подпространство $M \neq \mathbb{V}$. Любое линейное подпространство N такое, что $\mathbb{V} = M \oplus N$ называется линейным дополнением M. Для $M = \mathbb{V}$ линейным дополнением считается подпространство $N = \{\vec{0}\}$.*

Для $M = \{\vec{0}\}$ единственное линейное дополнение — все пространство, т.е. $N = \mathbb{V}$. Заметим, что в конечномерном пространстве линейное дополнение есть всегда — достаточно взять базис в M и произвольным образом дополнить его до базиса в $\mathbb{V}$. Линейная оболочка добавленных векторов — и есть N (подумайте, почему?).

Можно предложить следующий алгоритм построения линейного дополнения:
1. Взять произвольную систему, порождающую M.
2. Записать координаты этих векторов в матрицу и привести ее к ступенчатому виду.
3. Удалить нулевые строки и дополнить матрицу строками так, чтобы получилась верхнетреугольная матрица с ненулевой диагональю. Добавленные строки составляют базис в N.

Задача 14. В $\mathbb{R}^5$ найдите линейное дополнение подпространства M, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вначале решим систему, приведя матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выбирая $x_4 = t$, $x_5 = 2s$ свободными переменными, получим $x_3 = -t + 3s$, $x_2 = 5s$, $x_1 = -t - s$. Выбирая $(t, s) = (1, 0)$ и $(t, s) = (0, 1)$, находим базис в M: $\vec{x} = (-1, 0, -1, 1, 0)$, $\vec{y} = (-1, 5, 3, 0, 2)$. Применим наш алгоритм: составим матрицу и приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Дополним эту матрицу до верхнетреугольной

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Ответ: $N = \mathrm{Lin}\{(0, 0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
В бесконечномерном пространстве линейное дополнение тоже всегда существует, но доказательство этого факта не тривиально, а общего алгоритма его построения нет.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дополните систему $t^5 + t^4$, $t^5 - 3t^3$, $t^5 + 2t^2$, $t^5 - t$ до базиса пространства $\mathbb{P}_5$ многочленов степени не выше 5.

2. Найдите базисы суммы и пересечения подпространств $X = \mathrm{Lin}\{\vec{a}_j\}$ и $Y = \mathrm{Lin}\{\vec{b}_j\}$, если
а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 3, 3)$, $\vec{b}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{b}_2 = (2, 3, -1)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, -3)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $\vec{b}_1 = (2, -1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, -1, 3, 7)$.

3. Найдите базисы суммы и пересечения подпространств, заданных системами уравнений

$$M : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad N : \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

4. Найдите базисы суммы и пересечения подпространств

$$M = \mathrm{Lin}\{(1, 2, -2, 2, 1),\ (2, 4, -5, 4, 1),\ (2, 3, -3, 3, 2)\}, \quad N : \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 = x_5 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите систему линейных уравнений, задающую систему векторов:
$\{(1, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)\}$. Дополните подпространство, натянутое на данные вектора, до всего пространства.

Ответы: 1. Например, t^5 и $t^5 - 1$.
2. а) Базис суммы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\}$, базис пересечения $\{(3, 5, 1)\}$. б) Базис суммы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\}$, базис пересечения $\{(5, -2, -3, -4)\}$.
3. Базис суммы, например $\{(1, 0, 0, 0, 1),\ (1, 1, -2, 1, 0),\ (0, 1, -1, 1, 0),\ (0, 0, -2, 1, 0)\}$. Базис пересечения, например $\{(1, 0, 0, 0, 1),\ (1, 1, -2, 1, 0)\}$.
4. Базис суммы: любой базис в $\mathbb{R}^5$, например, стандартный. Базис пересечения, $\{(1, 1, -2, 1, 0)\}$.
5. Например, $x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Дополнение $N = \mathrm{Lin}\{(1, 0, -1, -1),\ (0, 1, 1, -1)\}$.

2 Линейные операторы

Занятие 3

При решении задач, связанных с линейными пространствами, часто приходится работать с различными преобразованиями пространств. Наиболее простыми среди них являются линейные преобразования, то есть преобразования, при которых образ линейной комбинации векторов является соответствующей линейной комбинацией их образов. К таким преобразованиям относятся, например, сдвиги, повороты, зеркальные отражения, проекции. Все это приводит к понятию линейного оператора.

Определение 19. *Линейным оператором, действующим в линейном пространстве $\mathbb{V}$, называется всякое линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ этого пространства в себя.*

Результат действия оператора $\mathcal{A}$ на вектор $\vec{x} \in \mathbb{V}$ будем обозначать $\mathcal{A}\vec{x}$ (без скобок).

Определение 20. *Пусть в линейном пространстве $\mathbb{V}$ задан базис $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Для оператора $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ разложим каждый вектор $\mathcal{A}\vec{e}_j$ по базису: $\mathcal{A}\vec{e}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nj}\vec{e}_n, j = 1, \dots, n$. Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в $j-$ом столбце которой стоят координаты вектора $\mathcal{A}\vec{e}_j$, называется матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{E}$. Заметим, что для каждого j:

$$\mathcal{A}\vec{e}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Тогда для каждого вектора $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ получим

$$\mathcal{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение

Теорема 6. *Пусть оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ матрицу A. Тогда вектор $\vec{x}$ с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ в базисе $\mathcal{E}$ отображается в вектор $\vec{x}\,' = \mathcal{A}\vec{x}$, координаты $(x'_1, \dots, x'_n)$ которого в базисе $\mathcal{E}$ находятся по формуле $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*

Итак, если в $n-$мерном пространсте фиксирован базис, то каждый оператор задает некоторую $n \times n$ матрицу, а каждая $n \times n$ матрица порождает линейный оператор.

Определение 21. *Линейные операторы, действующие в одном и том же пространстве, можно складывать как обычные функции, т.е.* $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\vec{x} := \mathcal{A}\vec{x}+\mathcal{B}\vec{x}$ *и умножать на коэффициент* $(\lambda\mathcal{A})\vec{x} := \lambda\cdot\mathcal{A}\vec{x}$.

Очевидно, что $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ и $\lambda\mathcal{A}$ — вновь линейные операторы. Из определения матрицы оператора видим, что если A и B — матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, то $\lambda A+\mu B$ — матрица оператора $\lambda\mathcal{A}+\mu\mathcal{B}$.

Определение 22. *Произведением линейных операторов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$*, действующих в одном и том же пространстве, называют композицию* $\vec{x}\mapsto\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x}))$*. Его обозначают* $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ *или просто* $\mathcal{AB}$.

Вновь видим, что

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})) = \mathcal{A}\big(\alpha\mathcal{B}(\vec{x})+\beta\mathcal{B}(\vec{y})\big) = \alpha\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x}))+\beta\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{y})),$$

т.е. произведение линейных операторов — снова линейный оператор.

Замечание. *На представление* $\mathcal{A}\vec{e}_j = a_{1j}\vec{e}_1+\ldots+a_{nj}\vec{e}_n$ *можно смотреть как на произведение строчки* $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ *(элементы этой строки — векторы) на* j*–ый столбец матрицы* A*. Таким образом, справедливо следующее формальное равенство*

$$(\mathcal{A}\vec{e}_1,\ldots,\mathcal{A}\vec{e}_n) = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)A.$$

Утверждение 2. *Пусть в* n*–мерном пространстве* $\mathbb{V}$ *фиксирован базис* $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$*. Тогда для любых двух линейных операторов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *матрица композиции* $\mathcal{AB}$ *равна произведению матриц* AB *этих операторов.*

Доказательство. Для каждого j запишем

$$\mathcal{AB}\vec{e}_j = \mathcal{A}(b_{1j}\vec{e}_1+\cdots+b_{nj}\vec{e}_n) = b_{1j}\mathcal{A}\vec{e}_1+\cdots+b_{nj}\mathcal{A}\vec{e}_n = (\mathcal{A}\vec{e}_1,\ldots,\mathcal{A}\vec{e}_n)\begin{pmatrix} b_{1j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}.$$

Объединяя эти равенства в строку, получим

$$(\mathcal{AB}\vec{e}_1,\ldots,\mathcal{AB}\vec{e}_n) = (\mathcal{A}\vec{e}_1,\ldots,\mathcal{A}\vec{e}_n)\,B = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)AB.$$

□

Задача 15. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют по правилам $\mathcal{A}(\vec{x}) = (7x_1+4x_3, 4x_2-9x_3, 3x_1+x_2)$, $\mathcal{B}(\vec{x}) = (x_2-6x_3, 3x_2+7x_3, x_1+x_2-x_3)$. Проверьте линейность этих операторов и выясните, как действует оператор $\mathcal{C} = \mathcal{AB}-\mathcal{BA}$.

Решение. Линейность очевидна. Найдем оператор $\mathcal{C}$. Для этого найдем матрицы A и B операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в каноническом базисе. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -9\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6\\ 0 & 3 & 7\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ Вычислим их произведения в том и в другом порядке:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -46\\ -9 & 3 & 37\\ 0 & 6 & -11\end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -18 & -2 & -9\\ 21 & 19 & -27\\ 4 & 3 & -5\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 13 & -37\\ -30 & -16 & 64\\ -4 & 3 & -6\end{pmatrix}$$

— матрица оператора $\mathcal{C}$. Следовательно, оператор $\mathcal{C}$ действует по правилу:

$$\mathcal{C}(\vec{x}) = (22x_1+13x_2-37x_3, -30x_1-16x_2+64x_3, -4x_1+3x_2-6x_3).$$

Ответ: $\mathcal{C}(\vec{x}) = (22x_1+13x_2-37x_3, -30x_1-16x_2+64x_3, -4x_1+3x_2-6x_3)$.

Теорема 7. *Пусть C — матрица перехода от базиса $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ пространства $\mathbb{V}$ к базису $\mathcal{E}' = \{\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n\}$. Тогда для произвольного линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ его матрицы в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ связаны соотношением $\mathcal{A}^{\mathcal{E}'} = C^{-1}\mathcal{A}^{\mathcal{E}}C$.*

Доказательство. Обозначим $A = \mathcal{A}^{\mathcal{E}}$, $A' = \mathcal{A}^{\mathcal{E}'}$. По определению матрицы перехода от базиса к базису имеем

$$(\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)C.$$

Действительно, $\vec{e}'_j = c_{1j}\vec{e}_1 + \ldots + c_{nj}\vec{e}_n$, $j = 1, \ldots, n$, см. (2). Следовательно,

$$\mathcal{A}\vec{e}'_j = c_{1j}\mathcal{A}\vec{e}_1 + \ldots + c_{nj}\mathcal{A}\vec{e}_n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Легко видеть, что эта система векторных равенств эквивалентна матричному равенству

$$(\mathcal{A}\vec{e}'_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{e}'_n) = (\mathcal{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{e}_n)C = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)AC = (\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n)C^{-1}AC.$$

Отсюда

$$(\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n)A' = (\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n)C^{-1}AC,$$

то есть

$$\mathcal{A}^{\mathcal{E}'} = C^{-1}\mathcal{A}^{\mathcal{E}}C.$$

□

Задача 16. В базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу A' в базисе $\{\vec{e_1} - 2\vec{e_2}, \vec{e_2} - \vec{e_1}\}$.

Решение. Согласно теореме $A' = C^{-1}AC$, где C — матрица перехода от исходного базиса (в данном случае — базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$) к новому базису $\{\vec{e_1} - 2\vec{e_2}, \vec{e_2} - \vec{e_1}\}$. Запишем матрицу перехода: $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что в этой матрице столбцами являются координаты векторов нового базиса в старом базисе. В случае перехода между двумя случайными базисами найти матрицу будет немного сложнее. Ищем обратную матрицу: $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ -2 - 1 \end{pmatrix}$. Теперь все известные данные подставляем в формулу выше и получаем матрицу A', которая равна $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$.

Определение 23. *Ядром оператора $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ с матрицей A называют множество векторов $\vec{x} \in \mathbb{V}$ таких, что $\mathcal{A}\vec{x} = A\vec{x} = \vec{0}$. Обозначается как*

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{V} : \mathcal{A}\vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{V} : A\vec{x} = \vec{0}\} = \operatorname{Ker} A.$$

Определение 24. *Образом оператора $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ с матрицей A называют множество векторов $\vec{y} \in \mathbb{V}$ таких, что $\mathcal{A}(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{y}$. Обозначается как*

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{\vec{y} \in \mathbb{V} : \vec{y} = \mathcal{A}\vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{V}\} = \{\vec{y} \in \mathbb{V} : \vec{y} = A\vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{V}\} = \operatorname{Im} A.$$

Легко проверяется следующий факт: *Если $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ — линейный оператор, то* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ *и* $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ *— линейные подпространства пространства* $\mathbb{V}$.

Определение 25. *Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ — линейный оператор. Тогда линейный оператор $\mathcal{A}^{-1} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ называется обратным оператором к оператору $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I} = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$ — тождественный оператор (то есть оператор, переводящий каждый вектор в себя).*

Заметим, что линейный оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда он является биекцией. Действительно, если $\mathcal{A}$ не биективен, то обратного отображения не существует (это известно нам из теории множеств). Если же $\mathcal{A}$ — биекция, то обратное отображение определено, причем единственным образом. Остается заметить, что это отображение также является линейным оператором (убедитесь в этом самостоятельно).

Несложно видеть, что если оператор $\mathcal{A}$ имеет в некотором базисе матрицу A, то матрица обратного оператора в том же базисе есть A^{-1}.

Теорема 8 (Критерий существования обратного оператора)**.** *$\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ — линейный оператор в n–мерном пространстве. Обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из трех эквивалентных условий:*
1. $\det A \neq 0$*, где A — матрица оператора в некотором произвольном базисе $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$;*
2. $\mathcal{A}$ — инъекция, т.е. $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\vec{0}\}$*;*
3. $\mathcal{A}$ — сюръекция, т.е. $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathbb{V}$.

Доказательство. 1. Если обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ существует, то он имеет в нашем базисе матрицу A^{-1}, т.е. $\det A \neq 0$ (см. курс алгебры). Если наоборот, матрица A не вырождена, то определена обратная матрица A^{-1}, которая порождает некоторый линейный оператор $\mathcal{B}$. Поскольку $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$, а связь между композицией операторов и произведением матриц нам уже известна, то оператор $\mathcal{B}$ является обратным к $\mathcal{A}$. В силу единственности, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.
Прежде чем продолжить доказательство, отметим, что инъективность оператора $\mathcal{A}$ равносильна равенству $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\vec{0}\}$. Действительно,

$$\begin{cases} \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}, \\ \vec{x} \neq \vec{y} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}, \\ \vec{x} - \vec{y} \neq \vec{0} \end{cases} \iff \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{\vec{0}\}.$$

Докажем теперь эквивалентность условий 1), 2) и 3). Пусть матрица A невырождена. Тогда однородное уравнение $A\vec{x} = \vec{0}$ равносильно $\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$, т.е. $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$. Аналогично, неоднородное уравнение $A\vec{x} = \vec{y}$ равносильно $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$, т.е. у каждого вектора $\vec{y}$ есть прообраз. Мы доказали импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 1) $\Longrightarrow$ 3).
Пусть теперь матрица A вырождена. Тогда ее ранг $\operatorname{rang} A < n$, а значит строки матрицы A линейно зависимы. Равенство

$$x_1 \cdot \text{строка } 1 + \cdots + x_n \cdot \text{строка } n = \text{нулевая строка}$$

равносильно $A\vec{x} = \vec{0}$, т.е. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ содержит ненулевой вектор $\vec{x}$. Наконец, условие $\operatorname{rang} A < n$ означает, что столбцы матрицы A линейно зависимы. Но эти столбцы суть образы базисных векторов, т.е. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Lin}\{\mathcal{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{e}_n\} < n$ — оператор не сюръекция. Мы доказали, что отрицание 1) влечет отрицание 2) и 3). □

Задача 17. В пространстве $\mathbb{V}_3$ всех геометрических векторов трехмерного пространства задан линейный оператор $\mathcal{A}$ — проекция на ось OY. Найдите матрицу A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ [3]. Найдите образ вектора $\vec{x} = (2, -1, 3)$ под действием оператора $\mathcal{A}$. Найдите ядро и образ оператора $\mathcal{A}$. Существует ли обратный оператор?

Решение. По сути, оператор является отображением на векторах. В данном случае оператор сопоставляет вектору его проекцию на ось OY. То есть, $(x, y, z) \to (0, y, 0)$, что можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

[3] Здесь и далее $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Отсюда легко видеть, что матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Тогда образ вектора $\vec{x}$ найдём так:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} A = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}$. Получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $y = 0$. При всех $t, k \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\operatorname{Ker} A = \{(t, 0, k) : t, k \in \mathbb{R}\}$.

Вычислим образ оператора. По определению $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} A = \{\vec{y} : A\vec{x} = \vec{y}\}$. Значит,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $\operatorname{Im} A = \{(0, f, 0) : f \in \mathbb{R}\}$.

Согласно критерию существования обратного оператора, $\mathcal{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. В нашем случае $\det A = 0$, следовательно, оператор $\mathcal{A}$ не является обратимым.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{(t, 0, k) : t, k \in \mathbb{R}\}$; $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{(0, f, 0) : f \in \mathbb{R}\}$; обратного оператора не существует.

Задача 18. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathbb{V}_2$ — проекция на ось $x + y = 0$. Найдите матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Найдите ядро и образ оператора. Выясните, существует ли обратный.

Решение. Начнём с того, что попытаемся понять, какие будут координаты проекции вектора на данную прямую. Обозначим координаты вектора — проекции как (x_0, y_0) и рассмотрим этот вектор и вектор $(x - x_0, y - y_0)$. Скалярное произведение этих векторов равно 0, и из условия задачи мы знаем, что $x_0 = -y_0$. Решая соответствующую систему, получаем: $x_0 = \dfrac{x - y}{2}$, $y_0 = \dfrac{y - x}{2}$.

Теперь найдем матрицу оператора проектирования: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ из уравнения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем ядро и образ оператора. Для поиска ядра составим систему линейных уравнений

$$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} (x - y)/2 = 0, \\ (y - x)/2 = 0 \end{cases} \iff y = x,$$

то есть ядром оператора является прямая $y = x$. Образ оператора найдем, вычислив образы базисных векторов: $\mathcal{A}\vec{i} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathcal{A}\vec{j} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тогда искомый образ есть линейная оболочка полученных векторов. Заметим, что векторы коллинеарны, а значит,

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\} = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Как и следовало ожидать, образом оператора является прямая $x + y = 0$.
Ответим на последний вопрос задачи: обратного оператора не существует (оператор $\mathcal{A}$ не обратим). Это можно увидеть разными способами: во–первых, $\det A = 0$, во–вторых, оператор имеет нетривиальное ядро (т.е. не является инъекцией), в третьих, образ оператора не является всем пространством (т.е. $\mathcal{A}$ не сюръекция).
Ответ: $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; ядром оператора является прямая $y = x$; образом оператора является прямая $x + y = 0$; обратного оператора не существует.

Задача 19. Линейный оператор $\mathcal{A}$ — поворот на плоскости вокруг начала координат на угол $\dfrac{\pi}{4}$ по часовой стрелке. Найдите матрицу A оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ и образ вектора $\vec{x} = (2, 2)$. Найдите ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор? Если да, то опишите его действие.

Решение. Проведя небольшие расчёты, получим, что поворот на угол $\dfrac{\pi}{4}$ по часовой стрелке преобразует вектор (a, b) в вектор $\left(\dfrac{b+a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b-a}{\sqrt{2}}\right)$. То есть

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b+a}{\sqrt{2}} \\ \frac{b-a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко видеть, что $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Тогда образ вектора $\vec{x}$ равен

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ядро оператора. По определению $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker} A = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}$, следовательно, получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b+a}{\sqrt{2}} \\ \frac{b-a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Значит, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0; 0)\}$. Это соответствует действительности, ведь нулевой вектор поворотом можно получить только из нулевого вектора. Образ оператора можно указать сразу: согласно теореме 8 тривиальность ядра влечет $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, и оператор $\mathcal{A}$ обратим. Поскольку $\mathcal{A}$ поворачивает вектор на угол по часовой стрелки, то обратный оператор поворачивает вектор на тот же угол против часовой стрелки.
Ответ: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$; $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$; обратный оператор — поворот плоскости вокруг начала координат на угол $\dfrac{\pi}{4}$ против часовой стрелки.

Задача 20. В пространстве $\mathbb{P}$ всех многочленов$\mathcal{A}$ действует по правилу $\mathcal{A}(p(t)) = p'(t)$. Проверьте линейность оператора, найдите его матрицу в каноническом базисе $\{1, t, t^2, \dots\}$. Найдите ядро и образ оператора $\mathcal{A}$ и выясните, существует ли обратный.

Решение. Линейность вытекает из линейности операции дифференцирования. Найдем матрицу A оператора в каноническом базисе. Для произвольного многочлена вида $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n$ имеем: $\mathcal{A}(p(t)) = p_1 + 2p_2 t + \dots + np_n t^{n-1}$. Отсюда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{pmatrix}.$$

Обратного оператора не существует, поскольку $\operatorname{Ker} A = \{p(t) = const\}$. $\operatorname{Im} A = \mathbb{P}$, поскольку у любого многочлена есть первообразная — многочлен.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$; ядро — произвольные константы; образ — все многочлены; обратного оператора не существует.

Обратите внимание, что в бесконечномерном пространстве теорема 8, вообще говоря, неверна. Наш оператор инъективен, но не сюръективен.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют по правилам $\mathcal{A}(\vec{x}) = (2x_1 - x_2 + 5x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$, $\mathcal{B}(\vec{x}) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3, 3x_2 - x_3)$. Проверьте линейность этих операторов и выясните, как действует оператор $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A} - 3\mathcal{A}^2$.

2. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\mathcal{A}$ — зеркальное отражение относительно плоскости Oyz. Найдите матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Найдите образ вектора $\vec{x} = (1, 2, -1)$ под действием оператора $\mathcal{A}$. Найдите образ и ядро оператора. Существует ли обратный? Если да, опишите его действие.

3. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\mathcal{A}$ — поворот на угол $\dfrac{\pi}{6}$ вокруг оси Oy по часовой стрелке. Найдите матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Найдите образ вектора $\vec{x} = (-1, 2, \sqrt{3})$ под действием оператора $\mathcal{A}$. Найдите образ и ядро оператора. Существует ли обратный? Если да, опишите его действие.

4. В пространстве $\mathbb{V}_3$ оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу: $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}) \cdot \vec{a}$, где $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Найдите матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Найдите образ вектора $\vec{x} = (1, 1, 1)$ под действием оператора $\mathcal{A}$. Найдите образ и ядро оператора. Существует ли обратный? Если да, опишите его действие.

5. Оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве $\mathbb{M}_{2,2}$ квадратных матриц 2×2 по правилу: $\mathcal{A}(X) = AX^T + A^T X$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Покажите, что $\mathcal{A}$ — линейный оператор. Найдите его матрицу в каноническом базисе. Найдите образ и ядро. Существует ли обратный оператор?

6. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу: $\mathcal{A}(p(t)) = tp'(t) - 2p(t)$. Проверьте линейность этого оператора. Найдите его матрицу в каноническом базисе. Найдите образ многочлена $p(t) = t^2 - 2t + 3$ под действием оператора $\mathcal{A}$. Найдите ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

Ответы: 1. $\mathcal{C}(\vec{x}) = (-39x_1 + 93x_2 - 56x_3, -68x_2 + 20x_3, -21x_1 + 116x_2 - 77x_3)$.

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{A}(\vec{x}) = (-1, 2, -1)$; $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{V}_3$; $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$; $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$.

3. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; $\mathcal{A}(\vec{x}) = (0,2,2)$; $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \mathbb{V}_3$; $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$; $\mathcal{A}^{-1}$ — поворот на угол $\dfrac{\pi}{6}$ вокруг оси Oy против часовой стрелки.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{A}(\vec{x}) = (3,3,3)$; $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{(1,1,1)\}$; $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$; обратного оператора нет.

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \\ 7 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{(2,0,7,0); (4,-1,-3,4); (3,-1,-3,3)\}$; $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{(3,-15,22,1)\}$; обратного оператора нет.

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathcal{A}(p(t)) = -6$; $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{t^2\}$; $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{1, t\}$; обратного оператора нет.

Занятие 4

Определение 26. *Пусть $\mathbb{V}$ — линейное векторное пространство над полем K. Ненулевой вектор $\vec{x} \in \mathbb{V}$ называется собственным вектором оператора $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, если существует такое число $\lambda \in K$, что $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Число λ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному вектору $\vec{x}$. Множество всех собственных значений оператора $\mathcal{A}$ называется спектром этого оператора и обозначается через $\sigma(\mathcal{A})$.*

Если $\vec{x}$ — собственный вектор с собственным значением λ, то для любого $k \neq 0$ вектор $k\vec{x}$ также является собственным с тем же собственным значением.

Теорема 9. *Собственные векторы $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ оператора $\mathcal{A}$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу векторов. Пусть $\mathcal{A}\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$, $\mathcal{A}\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Предположим, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ линейно зависимы, то есть $\vec{x}_2 = c\vec{x}_1$. Тогда

$$\lambda_2\vec{x}_2 = \mathcal{A}\vec{x}_2 = \mathcal{A}c\vec{x}_1 = c\mathcal{A}\vec{x}_1 = c(\lambda_1\vec{x}_1) = \lambda_1(c\vec{x}_1) = \lambda_1\vec{x}_2.$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то получаем, что $\vec{x}_2 = 0$, Но это противоречит определению собственного вектора. База индукции проверена.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для некоторого натурального k, и докажем, что тогда оно справедливо и для $k+1$. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}$, равную нулю:

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} = 0. \tag{5}$$

Применим к ней оператор $\mathcal{A}$, получим

$$0 = \mathcal{A}(\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1}) = \alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1}. \tag{6}$$

Умножим теперь равенство (5) на λ_{k+1} и вычтем из (6):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\vec{x}_k = 0.$$

По предположению индукции все коэффициенты в последнем соотношении должны быть равны нулю. Так как все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ различны, то это возможно лишь тогда, когда

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Подставим это в (5), получим, что и $\alpha_{k+1} = 0$ (поскольку $\vec{x}_{k+1} \neq 0$). Значит, векторы $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$, $\vec{x}_{k+1}$ линейно независимы. Шаг индукции завершен. □

Следствие. *Линейный оператор, действующий в $n-$мерном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений.*

Замечание. *Собственные векторы и собственные значения оператора $\mathcal{A}$ совпадают с собственными векторами и собственными значениями его матрицы*[4] *в произвольном базисе. Напомним, что ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, если $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.*

Определение 27. *Пусть A — произвольная $n \times n$ матрица. Ее характеристическим многочленом называют многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ переменной λ.*

[4] с понятием собственных значений и собственных векторов матрицы мы уже встречались в курсе аналитической геометрии (см. [?], занятие 13).

То, что $\chi_A(\lambda)$ — многочлен, очевидно. Заметим еще, что старшая степень этого многочлена равна n, а старший коэффициент равен $(-1)^n$. Еще полезно заметить, что свободный член $\chi_A(\lambda)$ равен $\det A$ (подумайте, почему).

Чтобы найти собственные значения матрицы A, необходимо решить характеристическое уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$. Решениями уравнения будут собственные значения матрицы (однородная система $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда матрица $A - \lambda E$ вырождена). Чтобы найти собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i, необходимо решить уравнение $A\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i$.

Теорема 10. *Характеристические многочлены матриц одного и того же линейного оператора в различных базисах совпадают. В частности, матрицы одного и того же оператора в различных базисах имеют одинаковые определители.*

Доказательство. Пусть C — матрица перехода от базиса $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ пространства $\mathbb{V}$ к базису $\mathcal{E}' = \{\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n\}$. Тогда

$$\chi_{A^{\mathcal{E}'}}(\lambda) = \det(A^{\mathcal{E}'} - \lambda E) = \det(C^{-1}A^{\mathcal{E}}C - \lambda E) = \det(C^{-1}A^{\mathcal{E}}C - C^{-1}\lambda EC) = \det(C^{-1}(A^{\mathcal{E}} - \lambda E)C) =$$

$$= \det C^{-1} \cdot \det(A^{\mathcal{E}} - \lambda E) \cdot \det C = \det(A^{\mathcal{E}} - \lambda E) = \chi_{A^{\mathcal{E}}}(\lambda).$$

□

Определение 28. *Характеристическим многочленом $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ называется характеристический многочлен его матрицы в произвольном базисе. Определителем* $\det \mathcal{A}$ *линейного оператора $\mathcal{A}$ называется определитель его матрицы в произвольном базисе.*

Непосредственно из определения и из основной теоремы алгебры (см., например, [?], лекция 7) вытекает

Теорема 11. *Каждый линейный оператор, действующий в n–мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, имеет*
1) n собственных значений, если каждое значений считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;
2) хотя бы один собственный вектор.

Задача 21. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ поворота на угол $\alpha \in (0, \pi)$ против часовой стрелки относительно начала координат в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Решение. По определению оператора $\mathcal{A}\vec{i} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathcal{A}\vec{j} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, т.е. матрица нашего оператора в стандартном базисе равна $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Тогда

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1.$$

Так как $|\cos\alpha| < 1$, то уравнение $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ не имеет вещественных корней — собственных значений и собственных векторов у оператора нет.
Ответ: их нет.
Обратите внимание, что теорема 11 верна именно в пространствах векторов с *комплексными координатами.*

Определение 29. *Оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейном пространстве $\mathbb{V}$, называется оператором простого типа (диагонализируемым оператором), если в $\mathbb{V}$ существует базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.*

Теорема 12. *Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ — линейный оператор. Его матрица в базисе $\mathcal{E}$ имеет вид*

$$\mathcal{A}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ — базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть в базисе $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ матрица оператора имеет вид

$$A = \mathcal{A}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $A\vec{e_1} = \lambda_1 \vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \ldots + 0\vec{e_n} = \lambda_1 \vec{e_1}$, следовательно, $\vec{e_1}$ — собственный вектор. И так далее, $A\vec{e_n} = 0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n} = \lambda_n \vec{e_n}$, следовательно, $\vec{e_n}$ — собственный вектор. Значит, $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ — базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Достаточность. Пусть $\vec{e_1}$ — собственный вектор. Тогда $A\vec{e_1} = \lambda_1 \vec{e_1} = \lambda_1 \vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \ldots + 0\vec{e_n}$. И так далее, если $\vec{e_n}$ — собственный вектор, то $A\vec{e_n} = \lambda_n \vec{e_n} = 0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n}$. Значит,

$$\mathcal{A}^{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Задача 22. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в каноническом базисе имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите собственные значения и собственные векторы этого оператора и покажите, что это оператор простого типа.

Решение. Для нахождения собственных значений оператора необходимо решить уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$. Имеем

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot (3 - \lambda) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ кратности 2; $\lambda_3 = 3$ — простое собственное значение оператора $\mathcal{A}$ (так называют однократные собственные значения).

Найдем собственные векторы. При $\lambda = 0$ имеем:

$$(A - \lambda E)\vec{x} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем, что $x_1 = -x_2 - x_3$, следовательно, $\vec{x} = (-t - k, t, k)$, где $t, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Положим $t = 1$, $k = 0$, получим $\vec{x}_1 = (-1, 1, 0)$. При $t = 0, k = 1$ получаем $\vec{x}_2 = (-1, 0, 1)$. Очевидно, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ линейно независимы, они являются собственными векторами, отвечающими кратному собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

При $\lambda = 3$ имеем:

$$(A - \lambda E)\vec{x_2} = \begin{pmatrix} -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем, что $\vec{x} = (t,t,t) = t\cdot(1,1,1)$, где $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Вектор $\vec{x}_3 = (1,1,1)$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda_3 = 3$.

Итак, векторы $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ и $(1,1,1)$ являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$. Проверим, образуют ли они базис линейного пространства. Запишем

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим $\det B = 3 \neq 0$, следовательно, векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ линейно независимы, а значит, образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ является оператором простого типа.
Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$; $\vec{x}_1 = (-1,1,0)$, $\vec{x}_2 = (-1,0,1)$, $\vec{x}_3 = (1,1,1)$.

Задача 23. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 имеет вид

$$\mathcal{A}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2) = (-4p_1 - 2p_2) + (p_0 + 4p_1 + p_2)t + 2p_2 t^2.$$

Найдите собственные значения и собственные векторы этого оператора и выясните, является ли оператор $\mathcal{A}$ оператором простого типа

Решение. В каноническом базисе пространства имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ищем собственные значения данного оператора:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

равносильно

$$-\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) - (-4)1(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda(\lambda-4)+4) = -(\lambda-2)^3 = 0$$

Отсюда видно, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Теперь ищем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 2$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выбрав в качестве свободной переменной x_3, получаем два линейно независимых собственных вектора: $\vec{f}_1 = (1,2,0)$ и $\vec{f}_2 = (0,0,1)$. Мы получили два линейно независимых вектора, а размерность пространства $\mathbb{P}_2$ равна 3, следовательно, исходный оператор не является оператором простого типа.
Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $\vec{f}_1 = (1,2,0)$, $\vec{f}_2 = (0,0,1)$; не является.

Задача 24. Пусть в n–мерном пространстве $\mathbb{V}$ действуют два линейных оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, матрицы которых, записанные в стандартном базисе, подобны.[5] Докажите, что спектры операторов совпадают: $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$ (с совпадением кратностей собственных значений). Найдите связь между собственными векторами операторов.

Решение. Заметим, что

$$\chi_{\mathcal{B}}(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(CAC^{-1} - \lambda E) = \det\left(C(A-\lambda E)C^{-1}\right) = \\ = \det C \cdot \det(A - \lambda E)\cdot \det C^{-1} = \det(A-\lambda E) = \chi_{\mathcal{A}}(\lambda).$$

[5] Напомним, что две матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица C, такая что $CA = BC$.

Если два многочлена совпадают в каждой точке, то совпадают и все их корни, так что $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$. Для доказательства совпадения кратностей корней вспомним, что кратность корня λ_0 многочлена $p(\lambda)$ можно определить с помощью производных: кратность — это минимальное натуральное число k, такое что $p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \ldots = p^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$, а $p^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$. Но если два многочлена совпадают в каждой точке, то совпадают в каждой точке и все их производные. Значит, совпадают корни этих производных. Значит, совпадают и кратности корней многочленов.

Перейдем к собственным значениям операторов. Пусть $\vec{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ. Тогда $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Домножая это равенство на C слева, получим $CA\vec{x} = \lambda C\vec{x}$. Но слева получилась матрица BC, т.е. $BC\vec{x} = \lambda C\vec{x}$. Значит, вектор $\vec{y} = C\vec{x}$ является собственным для оператора $\mathcal{B}$.

Ответ: если $\vec{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, то $\vec{y} = C\vec{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{B}$ (с тем же собственным значением); обратно, если $\vec{y}$ — с.в. для $\mathcal{B}$, то $C^{-1}\vec{y}$ — с.в. для $\mathcal{A}$ (с тем же с.з.).[6]

Обратите внимание, что совпадение спектров двух матриц (даже с свопадением кратностей всех с.з.) не влечет подобия этих матриц. Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеют одинаковые характеристические многочлены, но не подобны. Мы вернемся к этому вопросу на следующих занятиях.

Задача 25. В пространстве $\mathbb{R}^3$ оператор $\mathcal{A}$ — ортогональная проекция на ось Oy. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора.

Решение. В стандартном базисе матрица оператора равна $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда сразу видим

Ответ: $\lambda = 0$ — с.з. кратности два, причем для него есть два линейно независимых с.в. $\vec{i}$ и $\vec{k}$ (например); $\lambda = 1$ — простое с.з. с с.в. $\vec{j}$.

Определение 30. *Пусть линейное пространство $\mathbb{V}$ разложено в прямую линейную сумму подпространств $\mathbb{V} = M \oplus N$. Как мы знаем, тогда каждый вектор $\vec{x}$ пространства единственным образом раскладывается в сумму $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, где $\vec{x}_0 \in M$, а $\vec{x}_1 \in N$. Оператором проектирования*[7] *на подпространство M вдоль подпространства N называется оператор $\mathcal{P}: \ \vec{x} \mapsto \vec{x}_0$.*

Любой оператор проектирования в подходящем линейном базисе записывается диагональной матрицей, на диагонали которой стоят 1 и/или 0. Действительно, возьмем произвольный линейный базис в M и дополним его до базиса во всем пространстве произвольным базисом в N. Наш оператор векторы первого базиса сохраняет (они лежат в M, а любой такой вектор раскладывается $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, $\vec{x}_0 = \vec{x}$, $\vec{x}_1 = \vec{0}$), а векторы второго базиса обнуляет (они лежат в N, а любой такой вектор раскладывается $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, $\vec{x}_0 = 0$, $\vec{x}_1 = \vec{x}$).

Задача 26. В пространстве $\mathbb{R}^3$ оператор $\mathcal{A}$ — зеркальное отражение относительно плоскости Oyz. Найдите с.з. и с.в. оператора.

Решение. По определению, $\mathcal{A}\vec{j} = \vec{j}$, $\mathcal{A}\vec{k} = \vec{k}$ (векторы $\vec{j}$ и $\vec{k}$ лежат в плоскости Oyz и, значит, при отражении не меняются). Легко видеть, что $\mathcal{A}\vec{i} = -\vec{i}$, т.е. матрица оператора в стандартном базисе равна $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda = 1$ — с.з. кратности два, причем для него есть два линейно независимых собственных вектора $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Третье с.з. равно -1, с.в. равен $\vec{i}$.

---

[6] Мы начали пользоваться классическими аббревиатурами: «с.з.»=«собственное значение», «с.в.»=«собственный вектор».

[7] Часто, чтобы подчеркнуть, что проектирование идет не под прямым углом, говорят «оператор косого проектирования».

Определение 31. *Пусть линейное пространство $\mathbb{V}$ разложено в прямую линейную сумму подпространств $\mathbb{V} = M \oplus N$. Как мы знаем, тогда каждый вектор $\vec{x}$ пространства единственным образом раскладывается в сумму $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, где $\vec{x}_0 \in M$, а $\vec{x}_1 \in N$. Оператором отражения относительно подпространства M вдоль подпространства N называется оператор $\mathcal{A}:\ \vec{x} \mapsto \vec{x}_0 - \vec{x}_1$.*

Любой оператор отражения в подходящем базисе записывается диагональной матрицей, на диагонали которой стоят числа 1 и/или -1 (докажите это сами).

Задачи для самостоятельного решения.

1. В пространстве $\mathbb{R}^2$ линейный оператор $\mathcal{A}$ — проекция на ось $x + y = 0$. Найдите собственные значения и собственные векторы опратора $\mathcal{A}$.

2. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу: $\mathcal{A}(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 - x_3, 2x_3)$. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

3. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в каноническом базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Найдите собственные значения и собственные векторы этого оператора. Является ли он оператором простого типа?

4. Пусть матрица $C = AB$, а матрица $D = BA$, где A и B — какие–то $n \times n$ матрицы. Докажите, что $\sigma(C) = \sigma(D)$.

5. Найдите характеристический многочлен и собственные значения верхнетреугольной матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, где при $i > j$ все $a_{i,j} = 0$.

6. Докажите, что для невырожденности оператора $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы число 0 не входило в спектр.

7. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
а) над полем $\mathbb{R}$, б) над полем $\mathbb{C}$.

8. Докажите, что если $\vec{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ, то $\vec{x}$ — собственный вектор и для операторов
а) $\mathcal{A}^2$, б) $\mathcal{A}^n$ при любом натуральном n, в) $f(\mathcal{A})$, где f — произвольный многочлен.
В каждом случае найдите с.з., которому соответствует $\vec{x}$. Выведите отсюда, что *спектр многочлена от оператора равен множеству значений многочлена на спектре оператора.*

Ответы: 1. $\lambda_1 = 0$, $\vec{e}_1 = (1, 1)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{e}_2 = (-1, 1)$.
2. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (2, -1, 1)$.
3. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\sqrt{3}$, $\lambda_3 = \sqrt{3}$; $\vec{e}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{e}_2 = (2, 1 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 4)$, $\vec{e}_3 = (2, 1 + \sqrt{3}, -2\sqrt{3} - 4)$; является.
5. $\chi(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$, $\sigma(A) = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$.
7. а) $\lambda = -1$ — с.з. кратности 2 с с.в. $(1, 1, 0, 0)$; других с.з. нет
б) $\lambda = -1$ — с.з. кратности 2 с с.в. $(1, 1, 0, 0)$; $\lambda = 2 - 2i$ — с.з. кратности 1 с с.в. $(1, 1, 1 - 2i, 1)$; $\lambda = 2 + 2i$ — с.з. кратности 1 с с.в. $(a, b, 1 + 2i, 1)$, где a и b находятся из уравнений $(1 - 2i)a - 4b = 4a - (7 + 2i)b = -3 - 2i$.
8. а) λ^2, б) λ^n, в) $f(\lambda)$.

Занятие 5

До сих пор мы говорили только про линейные отображения, действующие в одном и том же линейном пространстве. Поговорим про линейные операторы из одного пространства в другое. Начнем с важного частного случая.

Определение 32. *Пусть $\mathbb{V}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Вещественным линейным функционалом f называется любое линейное отображение из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{R}$. Если $\mathbb{V}$ — пространство над полем $\mathbb{C}$, а f действует из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{C}$, то его называют комплексным линейным функционалом.*

Мы, как и раньше, будем пропускать уточнение — про вещественное или комплексное отображение идет речь, считая, что это ясно читателю из контекста (если все элементы матриц и векторов вещественные, то мы говорим о пространствах над $\mathbb{R}$, если встречаются комплексные числа или в условии явно указана возможность комплексности, — то о пространствах над $\mathbb{C}$).

Теорема 13. *Пусть в конечномерном пространстве $\mathbb{V}$ фиксирован базис $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Тогда любой линейный функционал на $\mathbb{V}$ имеет вид*

$$f(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \qquad \textit{где } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Доказательство. Числа a_j определим по формуле $a_j = f(\vec{e}_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда в силу линейности

$$f(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + \cdots + x_nf(\vec{e}_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

□

Итак, после фиксации базиса с любым функционалом однозначно связывается строка чисел $(a_1, \ldots, a_n)$. Если теперь каждый вектор пространства записать столбцом его координат в базисе $\mathcal{E}$, то действие функционала приобретает вид

$$f(\vec{x}) = \big(a_1, \ldots, a_n\big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, наше отображение вновь задается матрицей, только теперь размер этой матрицы $1 \times n$. Такие матрицы называют *ковекторами.*[8]

Очевидно, что ядро любого функционала $\operatorname{Ker} f = \{\vec{x} : \ f(\vec{x}) = 0\}$ является линейным подпространством. Оно задается одним однородным линейным уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_bx_n = 0$$

(если только функционал не тождественно нулевой — тогда $\operatorname{Ker} f = \mathbb{V}$).

Задача 27. Найдите все линейные функционалы в $\mathbb{R}^4$, ядро которых совпадает с подпространством $M = \{\vec{x} : \ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\}$ (базис считаем стандартным).

Решение. С одной стороны, любой функционал с матрицей $(a, -a, 2a, -3a)$, где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, подходит. С другой стороны, в M лежат, например, векторы $\vec{x} = (1, 1, 0, 0)^T$, $\vec{y} = (2, 0, -1, 0)^T$ и $\vec{z} =$

[8] Вот теперь, действительно, важно следить за тем, чтобы векторы пространства были записаны столбцами, поскольку векторы–строки теперь задают совсем другой объект — функционал! На время этого занятия мы будем аккуратны в наших обозначениях.

$(3,0,0,1)^T$. Если дан некоторый функционал с матрицей (a_1, a_2, a_3, a_4), ядро которого совпадает с M, то $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) = f(\vec{z}) = 0$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ 2a_1 - a_3 = 0, \\ 3a_1 + a_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = -a_1, \\ a_3 = 2a_1, \\ a_4 = -3a_1, \end{cases}$$

т.е. матрица функционала имеет вид $(a, -a, 2a, -3a)$, где $a \in \mathbb{R}$.
Ответ: $f(\vec{x}) = ax_1 - ax_2 + 2ax_3 - 3ax_4$, где число $a \in \mathbb{R}$ — произвольное ненулевое.

Теорема 14. *Пусть в линейном пространстве даны два базиса $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\mathcal{E}' = \{\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n\}$ с матрицей перехода C от первого ко второму. Пусть некоторый функционал f задан ковектором $(a_1, \ldots, a_n)$ в первом базисе. Тогда его ковектор $(a'_1, \ldots, a'_n)$ во втором базисе равен $(a_1, \ldots, a_n)C$.*

Доказательство. По определению матрицы перехода, $\vec{e}\,'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}\vec{e}_i$. Тогда

$$a'_j = f(\vec{e}\,'_j) = \sum_{i=1}^n c_{ij} f(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n c_{ij} a_i \implies \begin{pmatrix} a'_1 & \ldots & a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} C.$$

□

Итак, при смене базиса координаты векторов преобразуются по правилу $C\vec{x}$, а ковекторов — $\vec{a}C$.

Задача 28. Функционал f в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^5$ задан ковектором $(1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 0)$. Найдите базис, в котором этот функционал имеет координаты $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$.

Решение. Первый способ. Запишем матрицу $C = (c_{ij})_1^5$ перехода к искомому базису. Тогда

$$\begin{cases} c_{11} - c_{21} + 2c_{31} - 2c_{41} = 0, \\ c_{12} - c_{22} + 2c_{32} - 2c_{42} = 0, \\ c_{13} - c_{23} + 2c_{33} - 2c_{43} = 0, \\ c_{14} - c_{24} + 2c_{34} - 2c_{44} = 0, \\ c_{15} - c_{25} + 2c_{35} - 2c_{45} = 1. \end{cases}$$

Подберем элементы матрицы так, чтобы система выполнялась, а матрица была невырожденной. Например, подойдет матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff \vec{e}\,'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}\,'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}\,'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}\,'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}\,'_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Второй способ. Ядро функционала задается уравнением $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$. Выберем там произвольный базис — например, возьмем векторы $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, $\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}\,'_4$, выписанные выше. Теперь подберем произвольный вектор, для которого $f(\vec{x}) = 1$. Например, подойдет вектор $\vec{e}\,'_5$, найденный выше.
Ответ: см. (7).

Определение 33. *Пусть из n–мерного пространства $\mathbb{V}_1$ в m–мерное пространство $\mathbb{V}_2$ действует линейный оператор $\mathcal{A}$. Пусть зафиксированы базисы $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ в $\mathbb{V}_1$ и $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m\}$ в $\mathbb{V}_2$. Разложим векторы $\mathcal{A}\vec{e}_j$ по базису $\mathcal{G}$ для каждого $j = 1, \ldots, n$. Получившиеся коэффициенты в разложении запишем по столбцам и из этих столбцов составим матрицу A размера $m \times n$. Ее называют матрицей оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{G}$ и обозначают $\mathcal{A}^{\mathcal{GE}}$.*

Если разложить произвольный вектор $\vec{x} \in \mathbb{V}_1$ по базису $\mathcal{E}$, то получим

$$\mathcal{A}\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij}\vec{g}_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{g}_i, \quad \text{где } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после фиксации базисов действие оператора превращается в умножение матрицы оператора на вектор.

Так же, как для операторов с квадратной матрицей, видим, что

$$(\mathcal{A}\vec{e}_1, \dots, \mathcal{A}\vec{e}_n) = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m)A.$$

Если мы в пространстве $\mathbb{V}_1$ сменим базис $\mathcal{E}$ на базис $\mathcal{E}'$ с помощью матрицы перехода C, а в пространстве $\mathbb{V}_2$ сменим базис $\mathcal{G}$ на базис $\mathcal{G}'$ с помощью матрицы перехода D, то

$$(\mathcal{A}\vec{e}_1{}', \dots, \mathcal{A}\vec{e}_n{}') = (\mathcal{A}\vec{e}_1, \dots, \mathcal{A}\vec{e}_n)C = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m)AC = (\vec{g}_1{}', \dots, \vec{g}_m{}')D^{-1}AC.$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}^{\mathcal{G}'\mathcal{E}'} = D^{-1}\mathcal{A}^{\mathcal{G}\mathcal{E}}C.$$

Так же, как для квадратных матриц доказывается

Теорема 15. *Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует из пространства $\mathbb{V}_1$ с базисом $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{V}_2$ с базисом $\mathcal{G}$. Пусть оператор $\mathcal{B}$ действует из пространства $\mathbb{V}_2$ с базисом $\mathcal{G}$ в пространство $\mathbb{V}_3$ с базисом $\mathcal{H}$. Тогда композиция $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ этих операторов есть линейный оператор из $\mathbb{V}_1$ в $\mathbb{V}_3$ и в паре базисов $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ его матрица равна $\mathcal{B}^{\mathcal{H}\mathcal{G}}\mathcal{A}^{\mathcal{G}\mathcal{E}}$.*

Задача 29. Оператор $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ задан в стандартных базисах матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в паре базисов $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, где $\vec{e}_1 = (9, -5)^T$, $\vec{e}_2 = (-5, 3)^T$, и $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, где $\vec{f}_1 = (1, 1, 2)^T$, $\vec{f}_2 = (1, 2, 3)^T$, $\vec{f}_3 = (1, 2, 4)^T$

Решение. Матрица перехода от стандартного базиса к базису $\mathcal{E}$ равна $C = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Матрица перехода от стандартного базиса к базису $\mathcal{F}$ равна $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ в этой паре базисов равна

$$D^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Пусть зафиксированы базисы $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m\}$ в пространствах $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Любой вектор $\vec{y}$ из образа линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{V}_1$. Но тогда $\vec{y} = x_1\mathcal{A}\vec{e}_1 + \ldots + x_n\mathcal{A}\vec{e}_n$, т.е.

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Lin}\{\mathcal{A}\vec{e}_1, \dots, \mathcal{A}\vec{e}_n\}.$$

Размерность подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ не обязана равняться n — среди векторов $\mathcal{A}\vec{e}_j$ может быть линейная зависимость. Вспоминая, что координаты этих векторов записаны по столбцам матрицы $A = \mathcal{A}^{\mathcal{G}\mathcal{E}}$, приходим к выводу, что $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$ равна числу линейно независимых столбцов матрицы A, т.е. рангу этой матрицы. Мы проводили рассуждения в произвольной паре базисов, т.е. *ранг матрицы оператора одинаков в любой паре базисов.*

Определение 34. *Ранг матрицы A оператора $\mathcal{A}$ (в произвольной паре базисов) называют рангом оператора $\mathcal{A}$. Это число равно* $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$. *Размерность ядра оператора называют дефектом оператора.*

Есть четкая связь между размерностью ядра и размерностью образа оператора. Действительно, ядро оператора — это все решения однородной системы уравнений $A\vec{x} = \vec{0}$. Размерность ядра равна числу векторов в фундаментальной системе решений. Из курса алгебры мы знаем, что это число равно разности $n - r$ числа переменных системы и ранга матрицы. Получается, что $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Итак, *сумма ранга оператора и дефекта оператора равна размерности пространства* $\mathbb{V}_1$.

Утверждение 3. *Для любых двх матриц, произведение которых определено,* $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A$ *и* $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} B$.[9]

Доказательство. Зададим матрицами A и B операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тогда матрица AB задает композицию операторов. При отображении оператором $\mathcal{B}$ пространство переходит в $\operatorname{Im} \mathcal{B}$. Очевидно, что образ оператора $\mathcal{A}$ шире (точнее, не уже), чем образ оператора $\mathcal{A}$, ограниченного на $\operatorname{Im} \mathcal{B}$. Значит, размерность образа оператора $\mathcal{AB}$ не превосходит размерности образа оператора $\mathcal{A}$. Кроме того, при отображении оператором $\mathcal{A}$ размерность подпространства $\operatorname{Im} \mathcal{B}$ не может увеличится — получаем второе неравенство. □

Задача 30. Найдите базис ядра, базис образа, ранг и дефект оператора, заданного в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем матрицу оператора к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2$, а $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 1$. Видим, что третий столбец матрицы линейно выражается через первые два, т.е. базис в образе оператора составляют векторы $(3, 5, 4)^T$ и $(2, 4, 3)^T$. Для поиска базиса в ядре оператора составим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = -2a, \\ x_3 = a. \end{cases}$$

Ответ: $\operatorname{rang} \mathcal{A} = 2$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = 1$, базис в образе составляют векторы $(3, 5, 4)^T$ и $(2, 4, 3)^T$, базис в ядре состоит из одного вектора $(1, -2, 1)^T$.

Теорема 16. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор из пространства $\mathbb{V}_1$ в пространство $\mathbb{V}_2$. Всегда можно подобрать такие базисы $\mathcal{E}$ в $\mathbb{V}_1$ и $\mathcal{G}$ в $\mathbb{V}_2$, что матрица оператора в этих базисах примет вид*

$$A = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где E — единичная матрица размера $r \times r$, $r = \operatorname{rang} \mathcal{A}$, а O — нулевые матрицы соответствующих размеров.

[9] Если помните, мы сформулировали это свойство в курсе алгебры, но доказательство отложили. Пришло время.

Доказательство. Построим произвольный базис $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r\}$ в подпространстве $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Для каждого вектора $\vec{f}_j$ найдем прообраз — вектор $\vec{e}_j \in \mathbb{V}_1$, такой что $\mathcal{A}\vec{e}_j = \vec{f}_j$ (для данного $\vec{f}_j$ прообраз может быть не единственным — возьмем в качестве $\vec{e}_j$ любой из прообразов). Заметим, что векторы $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r\}$ линейно независимы. Действительно, если бы была их нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots \lambda_r\vec{e}_r = \vec{0}$, то, применяя оператор $\mathcal{A}$, мы получили бы $\lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{f}_r = \vec{0}$, что невозможно (помним, что векторы $\vec{f}_j$ образуют базис подпространства, т.е. линейно независимы). Положим $M = \operatorname{Lin}\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r\}$ и $N = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Эти два линейных подпространства пересекаются только по нулю. Действительно, если $\vec{x} \in M \cap N$, то $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{e}_r$, а образ $\mathcal{A}\vec{x} = 0 = \lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{f}_r$. Такое равенство возможно только в случае $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, т.е. $\vec{x} = \vec{0}$. Наконец, $\dim M = r$, а $\dim N = \operatorname{def}\mathcal{A} = n - r$, т.е. $\dim M + \dim N = \dim \mathbb{V}_1$. Значит, $\mathbb{V}_1 = M \oplus N$. Возьмем произвольный базис $\{\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ в подпространстве N — получаем базис $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ в $\mathbb{V}_1$. Теперь дополним векторы $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r\}$ до базиса в $\mathbb{V}_2$ произвольным образом. Имеем $\mathcal{A}\vec{e}_j = \vec{f}_j$ при $j \leq r$ и $\mathcal{A}\vec{e}_j = \vec{0}$ при $j > r$, т.е. в построенных базисах матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид, описанный в условии теоремы. □

Задача 31. Из пространства $\mathbb{P}_2$ многочленов степени ≤ 2 в пространство $\mathbb{P}_3$ действует оператор $\mathcal{A}:\ p(t) \mapsto (t^2p'(t))' + tp(t)$. Найдите базисы, в которых этот оператор имеет матрицу вида (8).

Решение. Вначале посмотрим на действие нашего оператора в стандартных базисах $\{1, t, t^2\}$ и $\{1, t, t^2, t^3\}$. Получаем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что столбцы матрицы линейно независимы, т.е. составляют базис в $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Еще видим, что этот образ состоит из всех многочленов с нулевым свободным коэффициентом (первая строка матрицы состоит из нулей). Итак, $\vec{f}_1 = (0, 1, 0, 0)^T$, $\vec{f}_2 = (0, 2, 1, 0)^T$, $\vec{f}_3 = (0, 0, 6, 1)^T$, а дополняющий до базиса в $\mathbb{P}_3$ вектор можно взять равным $\vec{f}_4 = (1, 0, 0, 0)^T$. Прообразы векторов $\vec{f}_j$, $1 \leq j \leq 3$, мы уже знаем — это многочлены 1, t и t^2. Они уже составляют базис в $\mathbb{P}_2$ — дополнять их не нужно.
Ответ: Базис в $\mathbb{P}_2$: $\{1, t, t^2\}$; базис в $\mathbb{P}_3$: $\{t, 2t + t^2, 6t^2 + t^3, 1\}$. В этой паре базисов матрица оператора равна $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите все линейные функционалы в $\mathbb{R}^4$, которые удовлетворяют условиям

$$f(\vec{x}) = 1,\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f(\vec{y}) = 0,\ \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\vec{z}) = -2,\ \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. В пространстве всех многочленов $\mathbb{P}$ на отрезке $[-1, 1]$ задан функционал $f(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt$. Проверьте, что он линеен и найдите линейный базис, в котором этот функционал задается ковектором $(1, 0, 0, \ldots)$.

3. В некоторой паре базисов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{G}$ дана матрица оператора $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В базисе $\mathcal{G}$ дан вектор $\vec{y} = (2, -3, 1)^T$. Найдите все его прообразы.

4. Из пространства $\mathbb{R}^4$ в пространство $\mathbb{R}^3$ действует оператор, заданный в стандартных базисах матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите его ранг, дефект, образ и ядро. Подберите базисы, в которых матрица оператора имеет вид (8).

5. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{1,\, t,\, t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$, а оператор $\mathcal{B}$ в базисе $\mathcal{F} = \{1,\, (t-1),\, (t-1)^2\}$ — матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицы операторов $\mathcal{AB}$, $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ и $5\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{F}$.

Ответы: 1. f задается ковектором $(-1-a,\ a,\ a,\ 1)$, $a \in \mathbb{R}$ — любое.
2. Например, $\left\{\frac{1}{2},\ t,\ t^2 - \frac{1}{3},\ t^3,\ t^4 - \frac{1}{5}, \ldots,\ t^{2n-1},\ t^{2n} - \frac{1}{2n+1}, \ldots\right\}$.
3. $\left\{(4 - a/2, -1, -5, a)^T :\ a \in \mathbb{R}\right\}$.
4. $\operatorname{rang}\mathcal{A} = 3$; $\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$; $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^3 = \operatorname{Lin}\{\vec{f_1},\, \vec{f_2},\, \vec{f_3}\}$, где $\vec{f_1} = (1,0,0)^T$, $\vec{f_2} = (2,1,0)^T$, $\vec{f_3} = (3,2,1)^T$; $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Lin}\{\vec{e}_4\}$, где $\vec{e}_4 = (0,1,-2,1)^T$. Базисы имеют вид $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3,\, \vec{e}_4\}$ и $\{\vec{f_1},\, \vec{f_2},\, \vec{f_3}\}$, где $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)^T$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)^T$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)^T$, а остальные векторы указаны выше.
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Корневые подпространства. Жорданова форма

Занятие 6

Пусть $\mathbb{V}$ — линейное векторное пространство, $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ — линейный оператор.

Определение 35. *Пусть λ_0 — собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Множество*

$$W_{\lambda_0} = \{x \in \mathbb{V} \, : \, \mathcal{A}x = \lambda_0 \vec{x}\}$$

называется собственным подпространством оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ_0.

Несложно видеть, что $W_{\lambda_0} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I})$, то есть собственное подпространство действительно является линейным подпространством пространства $\mathbb{V}$.

Определение 36. *Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется геометрической кратностью собственного значения λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена называется его алгебраической кратностью.*

Можно показать, что геометрическая кратность любого собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

Задача 32. Оператор A в пространстве $\mathbb{R}^n$ действует по правилу

$$A(x_1, \, x_2, \ldots, \, x_n) = (0, \, x_1, \, x_2, \ldots, \, x_{n-1})$$

(сдвигает координаты каждого вектора, причем на первое место ставится ноль, а последняя координата пропадает). Найдите алгебраическую и геометрическую кратность собственного значения $\lambda_0 = 0$.

Решение. Матрица этого оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда характеристический многочлен равен $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$, т.е. точка 0 является собственным значением алгебраической кратности n. С другой стороны, уравнение $A\vec{x} = 0$ имеет решение $\vec{x} = (0, \, 0, \ldots, 0, \, x_n)$, т.е. пространство решений одномерно — геометрическая кратность нулевого собственного значения равна 1.
Ответ: алгебраическая кратность равна n, геометрическая кратность равна 1.

Теорема 17. *Сумма собственных подпространств линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*

Доказательство. Пусть λ_1, ... , λ_s — попарно различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$, W_{λ_1}, ... , W_{λ_s} — соответствующие собственные подпространства. Воспользуемся теоремой 5. Достаточно доказать, что если $\vec{x}_j \in W_{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, s$, то из соотношения

$$\vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_s = 0$$

следует, что все $\vec{x}_j = 0$. Предположим, что это не так. Тогда оставим в сумме только ненулевые слагаемые:

$$\vec{x}_{j_1} + \ldots + \vec{x}_{j_m} = 0.$$

Получили нетривиальную линейную комбинацию собственных векторов, равную нулю. Но эти собственные векторы соответствуют различным собственным значениям, следовательно, должны быть линейно независимы (теорема 9). Мы пришли к противоречию. Значит, предположение неверно и сумма собственных подпространств является прямой. $\square$

Определение 37. *Линейное подпространство L пространства $\mathbb{V}$ называется инвариантным подпространством относительно оператора $\mathcal{A}$, если для любого вектора $\vec{x} \in L$ его образ $\mathcal{A}\vec{x}$ также принадлежит L.*

Определение 38. *Пусть L — подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$. Отображение $\mathcal{A}|_L : L \to L$, определенное равенством $\mathcal{A}|_L\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x}$ для всех $\vec{x} \in L$, называется сужением (ограничением) оператора $\mathcal{A}$ на подпространство L.*

Если все собственные значения оператора $\mathcal{A}$, который действует в n–мерном комплексном пространстве $\mathbb{V}$, имеют первую кратность (как говорят, «простые»), то у оператора ровно n различных собственных значений в комплексной плоскости. Действительно, мы знаем, что характеристический многочлен матрицы A размера $n\times n$ имеет степень n. Мы помним основную теорему алгебры: многочлен n–ой степени имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней с учетом кратности. Ну и, наконец, нам известно, что каждое собственное значение имеет кратность 1. Тогда у оператора ровно n собственных векторов, а согласно теореме 17, все они линейно независимы. Получается, что в пространстве $\mathbb{V}$ существует базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Поскольку все векторы базиса — собственные, то матрица оператора в этом базисе является диагональной.

Точно то же самое справедливо, если оператор действует в вещественном пространстве, а все корни его характеристического многочлена вещественные и простые.

Задача 33. Найдите базис из собственных векторов у оператора с матрицей $\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$, действующего в $\mathbb{R}^3$, или докажите, что такого базиса не существует. Выпишите матрицу оператора в этом базисе.

Решение. Вычислим

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}5-\lambda & -3 & 2\\ 6 & -4-\lambda & 4\\ 4 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Получаем три простых собственных значения 1, 2 и 3. Значит, в базисе $\mathcal{E}$ из собственных векторов матрица оператора имеет вид

$$A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \tag{9}$$

(первый собственный вектор оператор умножает на $\lambda_1 = 1$, второй — на $\lambda_2 = 2$, третий — на $\lambda_3 = 3$). Остается найти эти векторы. Начнем с $\lambda_1 = 1$. Составим систему $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda_1\vec{x}$, т.е.

$$\begin{cases}5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = x_1,\\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 = x_2,\\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = x_3\end{cases} \iff \begin{cases}4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0,\\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0,\\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x_1 = x_3,\\ x_2 = 2x_3.\end{cases}$$

Выбирая $x_3 = 1$, получаем первый собственный вектор $\vec{e}_1 = (1,\, 2,\, 1)^T$. Аналогично найдем второй собственный вектор:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda_2\vec{x} \iff \begin{cases}3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0,\\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0,\\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x_1 = x_2,\\ x_3 = 0,\end{cases}$$

т.е. $\vec{e}_2 = (1,\,1,\,0)^T$. Аналогично находим $\vec{e}_3 = (1,\,2,\,2)^T$.
Ответ: Искомый базис $\{(1,\,2,\,1)^T,\ (1,\,1,\,0)^T,\ (1,\,2,\,2)^T\}$. Матрица имеет вид (9).

Разберемся, что произойдет, если оператор $\mathcal{A}$ действует в n–мерном вещественном пространстве, все его собственные значения просты, но среди них есть комплексные. Как мы знаем, в этом случае у оператора есть базис, в котором матрица диагональна. Однако векторы этого базиса (и элементы матрицы) становятся комплексными. Предположим, это нас не устраивает, т.е. мы хотим найти вещественный базис, в котором матрица оператора имеет наиболее простой вид. Прежде всего заметим, что собственные значения и собственные векторы оператора «ходят парами». А именно, если $\lambda = \sigma + i\tau$ — собственное значение, причем $\operatorname{Im}\lambda = \tau \neq 0$, то $\overline{\lambda} = \sigma - i\tau$ — тоже собственное значение. Аналогично, если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — собственный вектор для с.з. λ, то вектор $\vec{x^*} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ — тоже собственный, причем для с.з. $\overline{\lambda}$. Это следует из банального факта: если дано решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n, \end{cases}$$

с вещественным элементами a_{ij} и комплексными x_j и λ, то взяв сопряжение всех строчек системы, получим

$$\begin{cases} a_{11}\overline{x}_1 + \cdots + a_{1n}\overline{x}_n = \overline{\lambda}\overline{x}_1, \\ \ldots \\ a_{n1}\overline{x}_1 + \cdots + a_{nn}\overline{x}_n = \overline{\lambda}\overline{x}_n. \end{cases}$$

Если теперь мы вначале составим базис $\mathcal{E} = \{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ (в этом базисе матрица оператора диагональна), а затем заменим все пары «сопряженных друг другу» векторов на пару «сумма» и «разность» (деленная на мнимую единицу), то все комплексные числа сократятся и мы получим базис из вещественных векторов. В этом базисе матрица оператора уже не диагональна, но она состоит из блоков размера либо 1×1, либо 2×2, стоящих по диагонали.

Задача 34. Приведите матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ к блочному виду с вещественными блоками размера 1×1 и 2×2 на диагонали. Найдите соответствующий базис $\mathcal{F}$.

Решение. Вычислим

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i).$$

Значит, в базисе $\mathcal{F}$ из собственных векторов матрица имеет вид

$$A^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Найдем эти собственные векторы так же, как это было сделано в предыдущей задаче (вычисления опускаем): $\vec{f_1} = (1,\,0,\,1)^T$, $\vec{f_2} = (1-i,\,1-i,\,1)^T$, $f_3 = (1+i,\,1+i,\,1)^T$. Первый вектор отвечает вещественному собственному значению — его менять не надо, так что $\vec{e}_1 = (1,\,0,\,1)^T$. Второй и третий векторы отвечают двум взаимно сопряженным собственным значениям $\lambda_2 = 2 + i$ и $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = 2 - i$. Заменим их на сумму $\vec{f_2} + \vec{f_3} = (2,\,2,\,2)^T$ и разность $\vec{f_2} - \vec{f_3} = (-2i,\,-2i,\,0)^T$. Поскольку собственные векторы всегда определены с точностью до множителя, то разделим сумму на 2, а разность на $-2i$. Получим векторы с вещественными координатами $\vec{e}_2 = (1,\,1,\,1)^T$, $\vec{e}_3 = (1,\,1,\,0)^T$.

Мы нашли искомый базис. Для того, чтобы выписать матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, составим матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, обратим ее $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и вычислим

$$A^{\mathcal{E}} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: Матрица оператора выписана выше, векторы базиса равны $\vec{e}_1 = (1,\, 0,\, 1)^T$, $\vec{e}_2 = (1,\, 1,\, 1)^T$, $\vec{e}_3 = (1,\, 1,\, 0)^T$.

Несложно проверить, что элементы клеток размера 2×2 имеют вполне определенный вид. А именно, паре собственных значений $\lambda = \sigma \pm i\tau$ соответствует клетка $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$.

Перейдем к изучению операторов в комплексном пространстве, имеющих собственные значения неединичной алгебраической кратности. Прежде всего заметим, что если геометрическая кратность собственного значения λ совпадает с алгебраической, то этот случай ничем не отличается от предыдущего (когда все собственные значения простые).

Задача 35. Найдите базис, в котором оператор $\mathcal{A}$, заданный матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, диагонален.

Решение. Вычисляем характеристический многочлен матрицы $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ и видим, что у оператора два собственных значения, причем одно из них второй алгебраической кратности, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Найдем собственный вектор для собственного значения $\lambda = 1$, решив систему

$$\begin{cases} 7x_1 - 12x_2 + 6x_3 = x_1, \\ 10x_1 - 19x_2 + 10x_3 = x_2, \\ 12x_2 - 24x_2 + 13x_3 = x_3. \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Видим, что пространство решений системы двумерно, т.е. геометрическая кратность собственного значения $\lambda = 1$ равна двум. Например, можно выбрать два линейно независимых вектора $\vec{e}_1 = (2,\, 1,\, 0)^T$, $\vec{e}_2 = (-1,\, 0,\, 1)^T$. Остается найти собственный вектор для собственного значения $\lambda_3 = -1$. Решая систему $\mathcal{A}\vec{e}_3 = -\vec{e}_3$, получаем $\vec{e}_3 = (3,\, 5,\, 6)^T$.

Ответ: В базисе из собственных векторов $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\}$ оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Остается разобраться, что делать в случае, когда геометрическая кратность некоторых собственных значений меньше алгебраической.

Теорема 18 (о расщеплении линейного оператора)**.** *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве $\mathbb{V}$, с характеристическим многочленом*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \textit{где } \lambda_i \neq \lambda_j \textit{ при } i \neq j$$

существуют инвариантные подпространства $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_p}$ такие, что

$$\mathbb{V} = K_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda_p};$$

$$\dim K_{\lambda_j} = m_j,\ \ j = \overline{1,p};$$

$$f_j(\lambda) = \det(\mathcal{A}|_{K_{\lambda_j}} - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j},\ \ j = \overline{1,p}.$$

Следствие. *Для любого линейного оператора, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму, у которой число диагональных клеток совпадает с числом различных собственных значений, а их размеры — с алгебраическими кратностями собственных значений, или, в матричной формулировке, любая квадратная комплексная матрица подобна квазидиагональной матрице*

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \mathit{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathit{0} & & & A_p \end{bmatrix},$$

обладающей указанным выше свойством. В терминах матриц операторов, подобие матриц означает их принадлежность к одному и тому же оператору.

Структура корневого пространства K_{λ_j} определяется следующей цепочкой вложений: если $N_k = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$, то

$$W_{\lambda_j} = N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = K_{\lambda_j}.$$

Иными словами, если мы ограничим оператор $\mathcal{A}$ на корневое подпространство K_{λ_j} для некоторого собственного значения λ_j, то мы увидим некоторый оператор (обозначим его $\mathcal{A}_j$). Матрица этого оператора имеет размер $d_j \times d_j$, где $d_j = \dim K_{\lambda_j}$ (в матрице исходного оператора $\mathcal{A}$ это будет клетка A_j). Вычтем значения λ_j из всех диагональных элементов матрицы A_j — получим некоторый вырожденный оператор (он вырожден, т.к. λ_j — собственное значение). Обозначим его $\mathcal{B}$. Так вот, ядро оператора $\mathcal{B}$ — это собственные векторы для собственного значения λ_j — они образуют подпространство $W_{\lambda_j} = N_1$. Возможны два варианта — либо $N_1 = K_{\lambda_j}$ (это означает, что алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения λ_j равны), либо нет. В первом случае все просто — никаких подпространств N_p с $p > 1$ не нужно. Во втором случае возведем оператор $\mathcal{B}$ в квадрат. Оказывается, ядро оператора $\mathcal{B}^2$ обязательно шире, чем $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$. При дальнейшем увеличении степени у оператора $\mathcal{B}$, оказывается, ядра будут все время расширятся, пока степень не достигнет некоторого числа q. Матрица оператора $\mathcal{B}^q$ станет попросту нулевой, и дальнейшее увеличение степени ее уже не изменит.

Задача 36. Для оператора $\mathcal{A}$ из первой задачи этого занятия, для собственного значения $\lambda_0 = 0$ постройте цепочку подпространств N_j.

Решение. Мы знаем, что геометрическая кратность равна 1, т.е. N_1 одномерно. Более того, в первой задаче мы уже описали это подпространство: $N_1 = \{\vec{x} : \ x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0, \ x_n$ — любое число$\}$. Оператор $\mathcal{A}^2$ сдвигает координаты каждого вектора на две позиции, т.е. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, \ldots, , x_n) = (0, 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$. Видим, что этот оператор зануляет все векторы вида $N_2 = \{\vec{x} : \ x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0, \ x_{n-1}, x_n$ — любые числа$\}$. Продолжая увеличивать степень, найдем что $N_j = \{\vec{x} : \ x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-j} = 0, \ x_{n-j+1}, \ldots, x_n$ — любые числа$\}$, пока $j < n$. Наконец, $\mathcal{A}^n$ — тождественно нулевой оператор, т.е. его ядро уже совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

Определение 39. *Пусть λ_j — собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Вектор $\vec{x} \in \mathbb{V}$ называется корневым вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_j, если $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k \vec{x} = 0$ при некотором $k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0$. Высотой корневого вектора называется наименьшее k, обладающее указанным свойством.*

Отметим простейшие свойства корневых векторов, вытекающих из определения:

1. Корневые векторы высоты 1 являются собственными. Действительно, они удовлетворяют условию $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})\vec{x} = 0$, $\vec{x} \neq 0$.

2. Если $\vec{x}$ — корневой вектор высоты k, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\vec{x}$ — корневой вектор высоты $k-1$.

3. Корневые векторы различных высот линейно независимы. Отсюда сразу вытекает, что высота корневого вектора не может превосходить размерности пространства.

Определение 40. *Корневые векторы высоты $k > 1$ называются присоединенными векторами $(k-1)$–го порядка.*

Очевидно, что если $\vec{x}$ — присоединенный вектор $(k-1)$–го порядка, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k\vec{x} = 0$, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k-1}\vec{x} \neq 0$, то есть $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k-1}\vec{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ.

Итак, корневой вектор — либо нулевой, либо собственный, либо присоединенный.

Определение 41. *Множество всех корневых векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению λ_j, называется корневым подпространством оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_j.*

Утверждение 4. *Размерность корневого подпространства, соответствующего собственному значению λ_j, совпадает с алгебраической кратностью этого собственного значения.*

Задача 37. Найдите собственные значения, корневые векторы и корневые подпространства линейного оператора, заданного в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Для каждого из корневых векторов укажите его высоту.

Решение. Найдем собственные значения оператора:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3.$$

Значит, $\lambda = -1$ — собственное значение алгебраической кратности 3. Будем искать корневые векторы. Сначала найдем собственные векторы:

$$(A - \lambda E)\vec{x} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0.$$

Выбирая сначала $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, а затем $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, получим два линейно независимых собственных вектора: $\vec{x}_1 = (-2, 1, 0)$ и $\vec{x}_2 = (5, 0, 1)$.

Заметим, теперь, что кратность собственного значения равна 3, следовательно, корневым подпространством является в данном случае все пространство $\mathbb{R}^3$. Значит, в качестве присоединенного вектора первого порядка можно взять любой вектор, линейно независимый с $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. Легко видеть, что подойдет, например, $\vec{x}_3 = (1, 0, 0)$.

Можно заметить также, что что $(A - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^2 = 0$, следовательно, $(A - \lambda E)^2\vec{x}_3 = 0$, при этом $(A - \lambda E)\vec{x}_3 = (3, 1, 1)$. Значит, действительно, $\vec{x}_3$ — присоединенный вектор первого порядка, соответствующий собственному вектору $(3, 1, 1) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; корневым является все пространство $\mathbb{R}^3$; векторы $\vec{x}_1 = (-2, 1, 0)$ и $\vec{x}_2 = (5, 0, 1)$ — корневые векторы высоты 1 (собственные векторы); вектор $\vec{x}_3 = (3, 1, 1)$ — корневой вектор высоты 2 (присоединенный вектор первого порядка).

Теорема 19. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в комплексном пространстве $\mathbb{V}$, и его характеристический многочлен имеет вид*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \text{ где } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j$$

Тогда в пространстве $\mathbb{V}$ существует базис $\mathcal{E}$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p \end{bmatrix},$$

в которой матрицы $A_j, j = \overline{1,p}$, имеют вид

$$A_j = \begin{bmatrix} J_{q_1}(\lambda_j) & & & 0 \\ & J_{q_2}(\lambda_j) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{q_{s_j}}(\lambda_j) \end{bmatrix},$$

где

$$J_{q_i}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}$$

— клетка Жордана q_i–го порядка с λ_j на главной диагонали, количество всех клеток Жордана в матрице A_j равно геометрической кратности s_j собственного значения $\lambda_j, q_1+q_2+\ldots+q_{s_j} = m_j$, а количество клеток k–го порядка равно числу

$$t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1} = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1},$$

где $n_k = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$, $r_k = \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$.

Следствие. *Для собственных значений оператора $\mathcal{A}$ имеет место соотношение*

$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det \mathcal{A}.$$

Определение 42. *Полученная форма матрицы линейного оператора называется жордановой формой, а базис $\mathcal{E}$, в котором матрица оператора имеет жорданову форму $A_{\mathcal{E}}$, — каноническим (или жордановым) базисом.*

Задача 38. Для оператора $\mathcal{A}$ из первой задачи этого занятия постройте жорданов базис.

Решение. Прежде всего заметим, что у $\mathcal{A}$ есть только одно собственное значение (точка ноль). Значит, жорданова структура оператора состоит ид одной единственной клетки. Остается найти для нее жорданов базис. Мы уже знаем, что вектор $\vec{e}_1 = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ является собственным. Заметим, что вектор $\vec{e}_2 = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0)$ является присоединенным к $\vec{e}_1$ порядка 1, поскольку $(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I})\vec{e}_2 = \mathcal{A}\vec{e}_2 = \vec{e}_1$. Аналогично, легко видим, что вектор $\vec{e}_j$, у которого единица стоит на $n-j$–ом месте (а остальные координаты — нули) является присоединенным к $\vec{e}_1$ порядка j. Вот мы и нашли жорданов базис.
Ответ: $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, где $\vec{e}_j$ — вектор с нулевыми координатами и единицей на $n-j+1$–ом месте.

Определение 43. *Матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$.*

Замечание. *Жорданова форма матрицы линейного оператора определена однозначно с точностью до порядка клеток Жордана. Для операторов простого типа, и только для них, жорданова форма совпадает с диагональной. В матричной формулировке вышеизложенная теорема означает, что любая квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму.*

Определение 44. *Матрица $A_{\mathcal{E}}$, имеющая жорданову форму и подобная матрице A, называется жордановой формой матрицы A. Если $A = TA_{\mathcal{E}}T^{-1}$, то столбцами матрицы T преобразования подобия являются векторы канонического базиса.*

Теорема 20. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают.*

Задача 39. Постройте канонический базис и найдите жорданову форму матрицы $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Выпишите в явном виде преобразование подобия.

Решение. Найдём характеристические значения матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = (11-\lambda)(3-\lambda) + 16 = \lambda^2 - 14\lambda + 49 = (\lambda - 7)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 7.$$

Геометрическая кратность собственного значения равна 2. Найдём собственный вектор:

$$Ax = \begin{pmatrix} 11x_1 + 4x_2 \\ -4x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \lambda x = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 4x_1 + 4x_2 \\ -4x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Возьмём, например, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Видно, что других линейно независимых собственных векторов нет. Найдём присоединённый вектор из уравнения $(A - \lambda E)y = x$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу преобразования T из собственного и присоединённого векторов: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, следовательно,

$$A_J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_J = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Заметим, что для нахождения жордановой формы не обязательно явно выписывать матрицу подобия. Действительно, мы получили, что данная матрица имеет одно двукратное собственное значение, один собственный вектор и один присоединенный. Следовательно, ее жорданова форма — клетка размера 2×2, по диагонали стоит собственное значение, над диагональю — единица, под диагональю — ноль.

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите жорданову форму матриц и матрицу перехода.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы: 1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Занятие 7

Сформулируем общий алгоритм построения жордановой формы оператора с заданной матрицей A.

1. Необходимо найти характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$, вычислить все его комплексные и вещественные корни, найти кратность каждого корня (это будет алгебраическая кратность данного собственного значения).

2. Пусть λ_0 — собственное значение алгебраической кратности m. Составим матрицу $B = A - \lambda_0 E$. Надо найти ее ядро (все собственные векторы). Если размерность ядра совпадает с m, то переходим к следующему собственному значению. Если размерность ядра меньше, чем m, то надо выписать все собственные векторы, параметризовав их координаты набором свободных параметров, и перейти к шагу 3.

3. Пусть $\vec{x}$ — собственный вектор, координаты которого содержат некоторый набор параметров. Надо выяснить, при каких значениях параметров система уравнений $B\vec{y} = \vec{x}$ имеет решения. Затем надо найти все эти решения (получим корневые векторы высоты 1). Если размерность найденного пространства равна m, то переходим к следующему собственному значению. Если меньше, то ищем корневые векторы высоты 2, и так далее.

Задача 40. Найдите жорданову форму и жорданов базис матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = (-3-\lambda)(1-\lambda)((4-\lambda)(-5-\lambda)+18)$ и все его корни $\lambda_1 = 1$ (кратности 2), $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ (оба простые). Для $\lambda_2 = -2$ находим собственный вектор, решив систему $A\vec{x} = -2\vec{x}$, получим $\vec{e}_3 = (2, -1, 1, 1)$. Аналогично, решаем систему $A\vec{x} = -3\vec{x}$ и находим $\vec{e}_4 = (1, 0, 0, 0)$. Теперь разберемся с кратным значением $\lambda_1 = 1$. Система $A\vec{x} = \vec{x}$ после упрощений имеет вид

$$\begin{cases} -4x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

т.е. пространство решений двумерно. Базисом там можно взять векторы $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 4)$ и $\vec{e}_2 = (0, 2, -1, 0)$. Значит, геометрическая кратность этого собственного значения совпала с алгебраической.

Ответ: жорданова форма и матрица перехода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 41. Найдите жорданову форму и жорданов базис матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица верхнетреугольная, так что сразу видим, что у нее два собственных значения: $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и $\lambda_2 = 3$ кратности 3. Ищем собственные векторы для первого собственного значения — решаем систему $(A-\lambda_1 E)\vec{x}=0$. Получаем

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_2+2x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_3+x_4+x_5=0, \\ x_5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}x_3, \\ x_2=-2x_3, \\ x_4=-2x_3, \\ x_5=0. \end{cases}$$

Пространство собственных векторов одномерно — придется искать присоединенный вектор. Составим систему уравнений $(A-\lambda_1 E)\vec{y}=\vec{x}$ (параметр x_3 в координатах собственного вектора оставляем свободным, хотя конкретно в одномерном случае это не важно — все равно собственный вектор определяется с точностью до множителя). Получим

$$\begin{cases} 2y_1+y_3+y_4+y_5=x_1=\frac{1}{2}x_3, \\ 2y_2+2y_3-y_4-y_5=x_2=-2x_3, \\ 2y_3+y_4+y_5=x_3, \\ y_5=x_4=-2x_3, \\ 0=x_5=0, \end{cases} \iff \begin{cases} y_1=\frac{1}{2}y_3-\frac{1}{4}x_3, \\ y_2=-2y_3-\frac{1}{2}x_3, \\ y_4=-2y_3+3x_3, \\ y_5=-2x_3. \end{cases}$$

Теперь пространство решений содержит два свободных параметра (x_3 и y_3), т.е. оно двумерно. Размерность достигла алгебраической кратности собственного значения — процесс останавливаем. В качестве первого вектора базиса надо взять собственный вектор, т.е. y_3 надо взять нулевым. Параметр x_3 можно взять произвольным (ненулевым), например $x_3=2$. Получим $\vec{e}_1=(1,\,-4,\,2,\,-4,\,0)$. Второй вектор базиса вычислим, взяв y_3 произвольным, например нулевым (параметр x_3 при этом не меняем — он уже выбран!). Итак, при $y_3=0$ получим $\vec{e}_2=(-1/2,\,-1,\,0,\,6,\,-4)$. Тогда $A\vec{e}_1=\lambda_1\vec{e}_1$, и $A\vec{e}_2=\lambda_1\vec{e}_2+\vec{e}_1$, т.е. в этом базисе часть матрицы A принимает вид $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ — та самая жорданова клетка, которая нам нужна.
Перейдем к собственному значению $\lambda_2=3$. Система $(A-3E)\vec{x}=0$ для поиска собственных векторов имеет вид

$$\begin{cases} x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_3-x_4-x_5=0, \\ x_4+x_5=0, \\ -2x_4+x_5=0, \\ -2x_5=0, \end{cases} \iff \quad x_3=x_4=x_5=0,\ \text{а } x_1 \text{ и } x_2 \text{ — любые числа.}$$

Размерность собственного подпространства равна 2, переходим к поиску присоединенных векторов первого порядка. Взяв два свободных параметра x_1 и x_2 запишем произвольный собственный вектор $\vec{x}=(x_1,\,x_2,\,0,\,0,\,0)$. Тогда для присоединенного вектора имеем

$$(A-3E)\vec{y}=\vec{x} \iff \begin{cases} y_3+y_4+y_5=x_1, \\ 2y_3-y_4-y_5=x_2, \\ y_4+y_5=0, \\ -2y_4+y_5=0, \\ -2y_5=0. \end{cases} \iff \begin{cases} y_5=0, \\ y_4=0, \\ y_3=\frac{1}{2}x_2, \\ \frac{1}{2}x_2=x_1. \end{cases}$$

Итак, присоединенный вектор есть только для собственного вектора, координаты которого удовлетворяют соотношению $x_2=2x_1$ (вот почему нам были нужны свободные параметры в координатах собственного вектора!) Возьмем, например, $\vec{x}=(1,\,2,\,0,\,0,\,0)$. Для такого собственного вектора получим $\vec{y}=(y_1,\,y_2,\,1,\,0,\,0)$. Выбираем первые две координаты произвольно (например, нулями).

Итак, $\vec{e}_3 = (1,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0)$, $\vec{e}_4 = (0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0)$. Для этой пары имеем $A\vec{e}_3 = \lambda_2\vec{e}_3$, $A\vec{e}_4 = \lambda_2\vec{e}_4 + \vec{e}_3$ — вновь получили клетку $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ну и не забудем, что пространство собственных векторов было двумерно. Выберем еще один собственный вектор, взяв параметры x_1 и x_2 произвольно (только, конечно, чтобы вектор не имел линейной зависимости с $\vec{e}_3$ — мы ведь строим базис), например $\vec{e}_5 = (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0)$.

Ответ: жорданова форма и матрица перехода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 42. Найдите жорданову форму и жорданов базис матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -17 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = ((2-\lambda)(-\lambda)+1)((3-\lambda)(-1-\lambda)+4) = (\lambda-1)^4$. Итак, у оператора только одно собственное значение $\lambda_1 = 1$ четвертой кратности. Ищем собственные векторы

$$(A-E)\vec{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 17x_3 - 6x_4 = 0, \\ 2x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 - 5x_3, \\ x_4 = -2x_3. \end{cases}$$

Пространство решений $\vec{x} = (-x_2 - 5x_3,\, x_2,\, x_3,\, -2x_3)$ двумерно, так что придется искать присоединенные векторы. Составляем систему

$$(A-E)\vec{y} = \vec{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + 7y_3 + y_4 = x_1 = -x_2 - 5x_3, \\ -y_1 - y_2 - 17y_3 - 6y_4 = x_2, \\ 2y_3 + y_4 = x_3, \\ -4y_3 - 2y_4 = x_4 = -2x_3, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = -y_2 - x_2 - 5y_3 - 6x_3, \\ y_4 = -2y_3 + x_3. \end{cases}$$

Видим, что у нас четыре произвольных параметра в правой части. Поскольку собственное значение имеет кратность 4, искать присоединенный вектор второго порядка не надо. Итак, у нас в ответе должны быть две жордановых цепочки — первый собственный вектор с присоединенным к нему, и второй собственный с присоединенным к нему. Взяв $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, получим собственный вектор $\vec{x} = (-1,\, 1,\, 0,\, 0) = \vec{e}_1$ и присоединенные к нему $\vec{y} = (-y_2 - 5y_3 - 1,\, y_2,\, y_3,\, -2y_3)$. Выбирая параметры $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, получим присоединенный вектор $\vec{e}_2 = (0,\, -1,\, 0,\, 0)$. Взяв $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, получим собственный вектор $\vec{e}_3 = (-5,\, 0,\, 1,\, -2)$ и присоединенные к нему $\vec{y} = (-y_2 - 5y_3 - 6,\, y_2,\, y_3,\, 1 - 2y_3)$. Выбирая параметры равными $y_2 = 0$, $y_3 = -1$ (здесь важно выбирать параметры так, чтобы не возникло линейной зависимости с уже построенным присоединенным вектором), получим $\vec{e}_4 = (-1,\, 0,\, -1,\, 3)$.

Ответ: жорданова форма и матрица перехода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 43. Найдите жорданову форму и жорданов базис матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица нижнетреугольная, так что сразу видим, что у нее одно собственное значение $\lambda_1 = 2$ алгебраической кратности 4. Ищем собственные векторы:

$$(A-2E)\vec{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 4x_1 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0, \text{ а } x_4 \text{ — любое число.}$$

Геометрическая оказалась единичной (пространство решений одномерно) — ищем присоединенные векторы 1 порядка:

$$(A-2E)\vec{y} = \vec{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 4y_1 = 0, \\ 3y_1 - y_2 = 0, \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = x_4, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 = y_2 = 0,\ y_3 = x_4,\ y_4 \text{ — любое.}$$

Видим, что пространство решений двумерно, что меньше, чем алгебраическая кратность — ищем присоединенные векторы 2 порядка:

$$(A-2E)\vec{z} = \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 4z_1 = 0, \\ 3z_1 - z_2 = y_3 = x_4, \\ -z_1 + 2z_2 + z_3 = y_4, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 = 0,\ z_2 = -x_4,\ z_3 = y_4 + 2x_4,\ z_4 \text{ — любое.}$$

Теперь пространство решений трехмерно (у нас три свободных параметра: x_4, y_4 и z_4). Это по–прежнему меньше алгебраической кратности — ищем корневые векторы 3 порядка:

$$(A-2E)\vec{w} = \vec{z} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 4w_1 = z_2 = -x_4, \\ 3w_1 - w_2 = z_3 = y_4 + 2x_4, \\ -w_1 + 2w_2 + w_3 = z_4, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad w_1 = -\frac{1}{4}x_4,\ w_2 = -\frac{11}{4}x_4 - y_4,\ w_3 = z_4 + \frac{21}{4}x_4 + 2y_4,\ w_4 \text{ — любое.}$$

Размерность корневого пространства достигла четырех — наш процесс закончен. Остается указать цепочку из собственного и трех присоединенных векторов. Возьмем $x_4 = 4$ (можно брать любое число, кроме нуля) — получим собственный вектор $\vec{x} = \vec{e}_1 = (0,\, 0,\, 0,\, 4)$. Возьмем $y_4 = 0$ (можно брать любое число) — получим корневой вектор 1 порядка $\vec{y} = \vec{e}_2 = (0,\, 0,\, 4,\, 0)$. Возьмем $z_4 = 0$ — получим корневой вектор 2 порядка $\vec{z} = \vec{e}_3 = (0,\, -4,\, 8,\, 0)$. Наконец, возьмем $w_4 = 0$ — получим корневой вектор 3 порядка $\vec{w} = \vec{e}_4 = (-1,\, -11,\, 21,\, 0)$.

Ответ: жорданова форма и матрица перехода:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 4 & 8 & 21 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Во всех разобранных примерах мы работали с вещественными матрицами. То, что все собственные значения этих операторов оказались вещественными — «случайность». Естественно, если собственные значения комплексны, и мы допускаем векторы и матрицы с комплексными числами, то наш алгоритм полностью сохраняется. Просто при вычислениях придется работать с комплексными числами. В результате получится жорданова форма, на диагонали которой стоят комплексные числа λ_j. Часто, однако, нас не устраивают ответы с комплексными матрицами и векторами. В этом случае надо применить уже знакомый нам прием.

Итак, пусть нам дана матрица с вещественными элементами, но ее жорданова форма оказалась комплексной. Заметим, что все собственные векторы «ходят парами» — если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — собственный для собственного значения $\lambda = \sigma + i\tau$ (будем для определенности считать, что $\tau > 0$), то вектор $\vec{x}^* = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ — тоже собственный, но для собственного значения $\overline{\lambda} = \sigma - i\tau$. Совершенно очевидно, что с присоединенным векторами ситуация повторяется. Если $A\vec{y} = \lambda\vec{y} + \vec{x}$, то $A\vec{y}^* = \overline{\lambda}\vec{y}^* + \vec{x}^*$, где $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, а $\vec{y}^* = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$. То же верно для присоединенных векторов 2 порядка и так далее. Сделанное замечание наводит на мысль, что для того, чтобы жорданова форма стала вещественной, надо перейти к векторам $(\vec{x} + \vec{x}^*)/2$ и $(\vec{x} - \vec{x}^*)/(2i)$. Со всеми присоединенными векторами надо поступить так же —- сгруппировать их по парам и от пары $\{\vec{y}, \vec{y}^*\}$ перейти к паре $\{(\vec{y}+\vec{y}^*)/2, (\vec{y}-\vec{y}^*)/(2i)\}$. С вычислительной точки зрения это очень просто: вместо вектора $\vec{x}$ с комплексными координатами мы записываем пару векторов, составленных из вещественных компонент координат x_j и мнимых компонент. В результате матрица жордановой формы станет вещественной, причем ее структура сохранится — она по–прежнему будет составлена из жордановых клеток, а каждая клетка будет иметь все тот же вид — ненулевые главная диагональ и диагональ над ней. Изменится только следующее — на главной диагонали будут стоять блоки размера 2×2 вида $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$, а на диагонали над ней вместо единиц тоже будут стоять блоки вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичные матрицы размера 2×2.

Задача 44. Найдите вещественную жорданову форму и вещественный жорданов базис матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен (вычисления опускаем) $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 26\lambda^2 - 40\lambda + 25$. Ищем его корни (вычисления опускаем) и оказывается, что $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2 - i)^2(\lambda - 2 + i)^2$, т.е. у оператора два собственных значения $\lambda_1 = 2 + i$ и $\lambda_2 = 2 - i$, оба второй алгебраической кратности.[10] Ищем собственные векторы для λ_1 — решаем систему $A\vec{x} = \lambda_1\vec{x}$ (вычисления опускаем) и получаем $\vec{x} = (x_1, ix_1, -x_1, (1-i)x_1)$. Видим, что пространство решений одномерно, а алгебраическая кратность равна 2 — надо искать присоединенный вектор. Он заведомо будет, так что других присоединенных искать не потребуется. Тогда, как мы отмечали, можно сразу взять $x_1 = 1$, т.е. $\vec{x} = (1, i, -1, 1-i)$ — это слегка сократит вычисления. Решаем систему $A\vec{y} = \lambda_1\vec{y} + \vec{x}$ (вычисления опускаем) и получаем $\vec{y} = (y_1, 1 + iy_1, i - y_1, -i + (1-i)y_1)$. Возьмем $y_1 = i$ и получим желаемый присоединенный вектор $\vec{y} = (i, 0, 0, 1)$. Теория нам говорит, что для собственного значения $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ векторы будут составлены из комплексно сопряженных координат, т.е. $\vec{x}^* = (1, -i, -1, 1+i)$ и $\vec{y}^* = (-i, 0, 0, 1)$. Если бы нас устраивала комплексная жорданова форма, то мы бы уже писали ответ: форма равна $\begin{pmatrix} 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$, а матрица перехода

[10]Можно доказать, что для вещественных матриц комплексные собственные значения всегда образуют пары λ и $\overline{\lambda}$, причем кратности всегда равны.

равна $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & -i \\ i & 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1-i & 1 & 1+i & 1 \end{pmatrix}$. Но нам требуется перейти к вещественной форме. Тогда

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}+\vec{x}^*}{2} = \operatorname{Re}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}-\vec{x}^*}{2i} = \operatorname{Im}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{y}+\vec{y}^*}{2} = \operatorname{Re}\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \frac{\vec{y}-\vec{y}^*}{2i} = \operatorname{Im}\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданов вид мы знаем из теории — матрица должна быть составлена из двух блоков $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ на диагонали и одного блока $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ над диагональю, так что можно писать ответ.

Ответ: Вещественная жорданова форма и матрица перехода равны

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите жорданову форму матриц и матрицу перехода.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

4 Евклидовы пространства

Занятие 8

Определение 45. *Линейное векторное пространство* $\mathbb{E}$ *над полем* $\mathbb{R}$ *называется евклидовым, если каждой упорядоченной паре элементов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *из* $\mathbb{E}$ *поставлено в соответствие вещественное число* $(\vec{x}, \vec{y})$*, называемое скалярным произведением, так, что выполнены аксиомы:*

1. $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{E}$*, причем* $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$ *(положительная определенность);*

2. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$ *(симметричность);*

3. $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}) \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}, \lambda \in \mathbb{R}$*;*

4. $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}) \ \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbb{E}$ *(линейность по первому аргументу).*

Очевидно, что соединяя две последние аксиомы со второй, получаем линейность по второму аргументу:

$$(\vec{x}, \lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2) = \lambda_1(\vec{x}, \vec{y}_1) + \lambda_2(\vec{x}, \vec{y}_2).$$

Скалярное произведение определяет *норму (длину)* каждого элемента: $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

Теорема 21. *Норма вектора обладает следующими свойствами:*
1. $\|x\| \geq 0$*, причем нулевую длину имеет только нулевой вектор (положительность);*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *(однородность);*
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(неравенство треугольника).*

Доказательство. Первое свойство очевидно следует из первой аксиомы. Второе свойство очевидно следует из однородности скалярного произведения по первому и второму аргументу. Выведем третье свойство из неравенства Коши–Буняковского–Шварца (сокращенно КБШ) $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, которое докажем отдельно. Действительно, пусть неравенство КБШ уже доказано. Тогда

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 .$$

□

Утверждение 5 (Неравенство КБШ)**.**

$$\forall \vec{x},\ \vec{y}: \quad |(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Если $\vec{x} = 0$, то все очевидно — пусть $\vec{x} \neq 0$. Составим функцию $f(t) = \|t\vec{x} + \vec{y}\|^2$ вещественной переменной t. С одной стороны, $f(t) \geq 0$. С другой стороны,

$$f(t) = (t\vec{x} + \vec{y}, t\vec{x} + \vec{y}) = t\|\vec{x}\|^2 + 2t(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

— парабола ветвями вверх. Неотрицательность параболы равносильна неположительности ее дискриминанта:

$$4|(\vec{x}, \vec{y})|^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0,$$

а это и есть неравенство КБШ. Если же это неравенство обратилось в равенство, то дискриминант равен нулю, т.е. при некотором t_0 имеем $f(t_0) = \|t_0\vec{x} + \vec{y}\|^2 = 0$. По первой аксиоме тогда $t_0\vec{x} + \vec{y} = 0$, т.е. векторы линейно зависимы. □

Раз в пространстве введена длина вектора, то появляется и расстояние между векторами.

Определение 46. *Расстоянием между векторами* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *называется величина* $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Очевидно, что расстояние обладает следующими свойствами:
1. $d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$ и обращается в ноль только при $\vec{x}=\vec{y}$;
2. $d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$;
3. $d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$.
Также с помощью скалярного произведения можно задать угол между векторами.

Определение 47. *Угол φ между векторами $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{E}$ определяется по формуле:*

$$\varphi = \arccos\frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}.$$

Неравенство КБШ означает, что аргумент арккосинуса лежит между -1 и 1, т.е. определение корректно.

Определение 48. *Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{x},\vec{y})=0$, то есть угол $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Обозначение: $\vec{x}\perp\vec{y}$.*

Определение 49. *Система векторов $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^n$ называется ортонормированной, если:*

1. *все ее элементы попарно ортогональны, то есть $\vec{x}_i\perp\vec{x}_j$ при $i\neq j$;*
2. *длины всех элементов равняются единице, то есть $(\vec{x}_k,\vec{x}_k)=1$ для любого k от 1 до n.*

Если ортонормированная система $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ является базисом пространства $\mathbb{E}$, то ее называют ортонормированным базисом. Если для системы выполнено только первое условие, то ее называют ортогональной (соответственно, ортогональным базисом).

Самый простой способ ввести в линейном пространстве скалярное произведение — зафиксировать некоторый линейный базис $\{\vec{e}_j\}_1^n$ и объявить его ортонормированным. Иными словами, разложить каждый вектор по этому базису, а затем ввести скалярное произведение по правилу

$$(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j, \sum_{k=1}^m y_k\vec{e}_k\right) = \sum_{j,k=1}^n x_j y_k(\vec{e}_j,\vec{e}_k) := \sum_{j=k} x_j y_k = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Далее мы будем считать, что такой базис (он называется стандартным) уже зафиксирован, и каждый вектор $\vec{x}$ уже имеет координаты $(x_1,\ldots,x_n)$ в этом базисе.

Задача 45. При каком значении вещественного параметра t векторы

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2-t\\0\end{pmatrix},\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\t\end{pmatrix},\quad \vec{z}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\t\end{pmatrix}$$

образуют ортогональную систему?

Решение. Найдем скалярные произведения: $(\vec{x},\vec{y})=0+1+t-2+0=t-1$, $(\vec{x},\vec{z})=1-1+0+0=0$, $(\vec{y},\vec{z})=0-1+0+t^2=t^2-1$. Равенство всех этих скалярных произведений нулю достигается при $t=1$.
Ответ: при $t=1$.

Определение 50. *Ортогональным дополнением множества $M\subset\mathbb{E}$ называется такое множество N векторов евклидова пространства $\mathbb{E}$ (обозначается $N=M^{\perp}$), каждый из которых ортогонален сразу всем векторам из M:*

$$N=\{\vec{y}\in\mathbb{E}:\ \forall\vec{x}\in M\ (\vec{y},\vec{x})=0\}.$$

Задача 46. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите ортогональное дополнение к множеству M всех векторов вида

$$\begin{pmatrix} 1+t+s \\ t-s \\ t-1 \\ s+1 \end{pmatrix}, \qquad t,\, s \in \mathbb{R}.$$

Решение. Запишем искомые векторы в виде $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Тогда условие ортогональности нам дает уравнение

$$y_1(1+t+s) + y_2(t-s) + y_3(t-1) + y_4(s+1) = 0 = (y_1 - y_3 + y_4) + t(y_1 + y_2 + y_3) + s(y_4 - y_2).$$

Подставляя пары $(t, s) = (0, 0)$, $(t, s) = (1, 0)$, $(t, s) = (0, 1)$, получаем систему

$$\begin{cases} y_1 - y_3 + y_4 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ y_2 - y_4 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $\vec{y} = (-p, p, 0, p)$, где $p \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Подстановкой убеждаемся, что все векторы такого вида подходят.
Ответ: $M^{\perp} = \{(-p, p, 0, p) : \; p \in \mathbb{R}\}$.
Обратите внимание, что в разобранном примере $M^{\perp}$ оказалось линейным подпространством (прямой), хотя само M линейным подпространством не являлось (оно было аффинным подпространством).

Утверждение 6. *Для любого множества $M \subset \mathbb{E}$ его ортогональное дополнение $M^{\perp}$ является линейным подпространством пространства $\mathbb{E}$. Если же само M — линейное подпространство, то для поиска $M^{\perp}$ необходимо и достаточно построить линейный базис в M, записать условия ортогональности неизвестного вектора $\vec{y}$ векторам базиса и решить эту систему.*

Доказательство. Пусть $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2$ лежат в $M^{\perp}$, т.е. $(\vec{y}_1, \vec{x}) = (\vec{y}_2, \vec{x}) = 0$ для всякого вектора $\vec{x} \in M$. Тогда и любая линейная комбинация $\lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2$ ортогональна $\vec{x}$, т.е. лежит в $M^{\perp}$. Мы доказали, что $M^{\perp}$ — линейное подпространство.
Пусть теперь само M есть линейное подпространство с базисом $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$. Если вектор $\vec{y}$ лежит в ортогональном дополнении, то, в частности, $\vec{y} \perp \vec{x}_j$ для каждого j. С другой стороны, если $(\vec{y}, \vec{x}_j) = 0$ для каждого j, то и для любой линейной комбинации $(\vec{y}, \sum c_j \vec{x}_j) = 0$. Поскольку $\{\vec{x}_j\}_1^n$ — базис в M, то всякий вектор $\vec{x} \in M$ записывается в виде такой линейно комбинации и получаем $\vec{y} \perp M$. □

Еще одно простое свойство ортогонального дополнения: $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Lin}(M)$ (повторное ортогональное дополнение совпадает с множеством всех линейных комбинаций векторов из M). Докажите это свойство самостоятельно.

Задача 47. Линейное подпространство M задано в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдите $M^{\perp}$.

Решение. По определению видим, что M есть ортогональное дополнение к набору из двух векторов $\vec{y} = (1, -1, -1, 2, -1)$ и $\vec{z} = (1, 1, 1, -1, -1)$. По приведенному выше свойству, понимаем, что $M^{\perp} = \mathrm{Lin}(\vec{y}, \vec{z})$.

Ответ: $M^\perp = (t+s, -t+s, -t+s, 2t-s, -t-s)$, $t,\ s \in \mathbb{R}$.
Мы уже знаем (см. курс алгебры), что любую линейно независимую систему векторов $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^n$ в линейном пространстве $\mathbb{E}$ можно ортогонализовать с помощью процесса Грама–Шмидта — перейти к ортогональной системе $\{\vec{e}_j\}_1^n$ с помощью равенств

$$\vec{e}_j = \sum_{k=1}^{j} \alpha_{j,k}\vec{x}_k,$$

подобрав подходящие коэффициенты $\alpha_{j,k}$. Напомним: процесс устроен так, что мы можем всегда выразить

$$\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_{j,k}\vec{e}_j,$$

т.е. $\mathrm{Lin}\{x_j\}_1^m = \mathrm{Lin}\{e_j\}_1^m$ для всякого $m \le n$.

Определение 51. *Пусть дано линейное подпространство M и вектор $\vec{x} \notin M$. Вектором наилучшего приближения для $\vec{x}$ по подпространству M называется такой вектор $\vec{y} \in M$, что $\|\vec{x}-\vec{y}\| = \inf_{\vec{z}\in M} \|\vec{x}-\vec{z}\|$.*

Оказывается, что этот вектор является ортогональной проекцией $\vec{x}$ на M (в том смысле, что $(\vec{x}-\vec{y}) \perp M$).

Теорема 22. *Вектор наилучшего приближения существует, единствен и является ортогональной проекцией.*

Доказательство. То, что $(\vec{x}-\vec{y}) \perp M$, доказывается легко. Обозначим $\vec{x}-\vec{y} = \vec{u}$ и предположим, что найдется вектор $\vec{v} \in M$ такой, что $(\vec{u},\vec{v}) = a \ne 0$. Тогда положим $\vec{z} = \vec{y} + t\vec{v}$ с неизвестным коэффициентом t и заметим, что

$$\|\vec{x}-\vec{z}\|^2 = (\vec{u}-t\vec{v}, \vec{u}-t\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 2at + t^2\|\vec{v}\|^2.$$

Полученная функция переменной t имеет при $t = 0$ ненулевую производную, т.е. ее значение в нуле (а оно равно $\|\vec{u}\|^2$) не минимально. Противоречие. Заметим, кстати, что верно и обратное — если $\vec{y} \in M$, а $(\vec{x}-\vec{y}) \perp M$, то $\vec{y}$ — вектор наилучшего приближения. Действительно, для всякого $\vec{z} \in M$ имеем

$$\|\vec{x}-\vec{z}\|^2 = (\vec{x}-\vec{y}+\vec{y}-\vec{z}, \vec{x}-\vec{y}+\vec{y}-\vec{z}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + 2(\vec{x}-\vec{y}, \vec{y}-\vec{z}) + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2 > \|\vec{x}-\vec{y}\|^2,$$

если только $\vec{z} \ne \vec{y}$. Отсюда же, кстати, следует и единственность. Если $\vec{y}$ и $\vec{z}$ — два вектора наилучшего приближения, то либо $\vec{z} = \vec{y}$, либо $\|\vec{x}-\vec{z}\| > \|\vec{x}-\vec{y}\|$.
Докажем существование вектора $\vec{y}$. Выберем в подпространстве M произвольный линейный базис и ортогонализуем его с помощью процесса Грама–Шмидта. Получим ортогональный базис в M. Разделим каждый вектор этого базиса на его длину и получим ортонормированный базис в M (обозначим его $\{\vec{e}_j\}_1^n$). Теперь вектор наилучшего приближения можно предъявить в явном виде

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{x}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$$

(такое представление называется *суммой Фурье* вектора $\vec{x}$ по ортонормированному базису $\{\vec{e}_j\}_1^n$).
Покажем, что такой вектор $\vec{y}$ действительно является вектором наилучшего приближения. Для этого (как мы уже знаем) достаточно проверить, что $(\vec{x}-\vec{y}) \perp M$. Но для этого (как мы, опять же, знаем) достаточно проверить соотношения $(\vec{x}-\vec{y}) \perp \vec{e}_k$ для всех k. Но это уже очевидно в силу ортонормированности нашего базиса:

$$(\vec{x}-\vec{y}, \vec{e}_k) = (\vec{x}, \vec{e}_k) - \sum_{j=1}^{n} (\vec{x}, \vec{e}_j)(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = (\vec{x}, \vec{e}_k) - (\vec{x}, \vec{e}_k) = 0.$$

□

Заметим, что мы не только доказали красивую теорему, но и дали алгоритм построения вектора наилучшего приближения — строим базис в M, ортонормируем его, выписываем сумму Фурье. Отметим, что есть и второй способ — строим произвольный базис в M, выписываем условия ортогональности вектора $\vec{y}$ всем векторам этого базиса, решаем получившуюся систему линейных уравнений.

Задача 48. В пространстве $\mathbb{R}^n$ дано подпространство $M = \{\vec{x} : \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Найдите проекцию вектора $\vec{x} = (1, \ldots, 1)$ на M и расстояние от этого вектора до подпространства.

Решение. Мы знаем, что вектор $\vec{x} - \vec{y}$ лежит в $M^\perp$. Это ортогональное дополнение видно из определения M — подпространства, которое ортогонально вектору $\vec{u} = (1, \ldots, 1)$. Значит, $M^\perp = \mathrm{Lin}(\vec{u})$. Тогда $\vec{x} - \vec{y} = \lambda\vec{u} = (\lambda, \ldots, \lambda)$. Выражаем отсюда $\vec{y} = (1 - \lambda, \ldots, 1 - \lambda)$ и записываем условие $\vec{y} \in M$, откуда $n(1 - \lambda) = 0$, т.е. $\lambda = 1$. Отсюда $\vec{y} = \vec{0}$, а расстояние до подпространства равно $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{n}$.
Ответ: проекция равна $\vec{y} = \vec{0}$, расстояние равно $\sqrt{n}$.

Задача 49. В линейном пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций ввели скалярное произведение по формуле $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Найдите наилучшее приближение функции $h(x) = e^x$ линейной функцией.

Решение. В пространстве линейных функций выберем базис: $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$. Заметим, что он ортогональный, т.к. $(e_1, e_2) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$, но не ортонормированный. Мы знаем, что наилучшее приближение — это ортогональная проекция, т.е. нам надо найти такую функцию $f(x) = ae_1(x) + be_2(x) = a + bx$, что $h - f \perp e_1$ и $h - f \perp e_2$. Получаем два уравнения

$$\int_{-1}^{1} (e^x - a - bx) \cdot 1\,dx = 0 = e - e^{-1} - 2a, \quad \int_{-1}^{1} (e^x - a - bx) \cdot x\,dx = 0 = 2e^{-1} - 2b/3.$$

Ответ: $a = (e - e^{-1})/2$, $b = 3e^{-1}$, $f(x) = a + bx$.
Понятно, что множество и его ортогональное дополнение могут в пересечении иметь только нулевой вектор (их общий вектор ортогонален самому себе, а в силу первой аксиомы тогда нулевой).

Утверждение 7. *Пусть M — линейное подпространство в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$. Тогда $\mathbb{E}$ раскладывается в прямую сумму подпространств $\mathbb{E} = M \oplus M^\perp$. В частности, $M^\perp = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $M = \mathbb{E}$. И наоборот, $M^\perp = \mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда $M = \{0\}$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $M^\perp$ — линейное подпространство, знаем, что оно пересекается с M только по нулю. Остается заметить, что каждый вектор $\vec{x} \in \mathbb{E}$ имеет ортогональную проекцию $\vec{y}$ на M, а по ее определению $\vec{x} - \vec{y} \in M^\perp$. Получаем разложение $\vec{x} = \vec{y} + (\vec{x} - \vec{y})$. □

Задача 50. В пространстве $\mathbb{R}^6$ дано подпространство $M = \{\vec{x} : x_6 = -x_1,\ x_5 = -x_2,\ x_4 = -x_3\}$. Постройте ортонормированный базис пространства так, чтобы векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ составили базис в M, а векторы $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$ составили базис в $M^\perp$.

Решение. Возьмем векторы $\vec{x}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, -1)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 0, 0, -1, 0)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 1, -1, 0, 0)$. Эти векторы лежат в M и (легко видеть) линейно независимы. Более того, они попарно ортогональны. Пронормировав их (а длина каждого вектора, как видим, равна $\sqrt{2}$), получим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Теперь возьмем тройку $\vec{y}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\vec{y}_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$, $\vec{y}_3 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$. Легко видеть, что $(\vec{x}_j, \vec{y}_k) = 0$ для всех $1 \le j,\ k \le 3$, т.е. эти три вектора лежат в $M^\perp$. Вновь замечаем, что они попарно ортогональны, так что после нормировки получаем оставшиеся три вектора нашего базиса.

Ответ: $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Понятно, что задачи на поиск расстояний до подпространств обобщают соответствующие задачи аналитической геометрии на многомерный случай.

Задача 51. В $\mathbb{R}^5$ даны два аффинных подпространства (см. определение 13) $M = \{\vec{x}:\ x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ -x_3 + x_4 + x_5 = 1\}$ и $N = \{\vec{y}:\ y_1 + y_2 = 2,\ y_2 + y_3 = 2,\ y_3 + y_4 = 2,\ y_4 + y_5 = 0\}$. Найдите расстояние между ними (т.е. величину $d = \inf_{\vec{x}\in M,\ \vec{y}\in N} \|\vec{x} - \vec{y}\|$).

Решение. Пусть $\vec{x} \in M$ и $\vec{y} \in N$ — векторы, на которых реализуется инфимум:[11] $\|\vec{x} - \vec{y}\| = d$. Заметим, что для вектора $\vec{x}$ вектор $\vec{y}$ является наилучшим приближением по подпространству N. То же верно и относительно вектора $\vec{y}$. Это означает, что вектор $\vec{u} = \vec{x} - \vec{y}$ ортогонален и M, и N (выше мы проводили доказательство этого факта для линейных подпространств, но оно сохраняется и для аффинных, поскольку сдвиг пространства не меняет углов между векторами). По условию видим, что M задано как аффинный сдвиг линейного подпространства $\{\vec{f_1} = (1, 1, -1, 0, 0),\ \vec{f_2} = (0, 0, -1, 1, 1)\}^{\perp}$, т.е. $M^{\perp} = \mathrm{Lin}\{\vec{f_1},\ \vec{f_2}\}$. Аналогично, $N^{\perp} = \mathrm{Lin}\{\vec{f_3},\ \vec{f_4},\ \vec{f_5}, \vec{f_6}\}$, где $\vec{f_3} = (1, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{f_4} = (0, 1, 1, 0, 0)$, $\vec{f_5} = (0, 0, 1, 1, 0)$, $\vec{f_6} = (0, 0, 0, 1, 1)$. Итак, $\vec{u} = \lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} = \lambda_3\vec{f_3} + \lambda_4\vec{f_4} + \lambda_5\vec{f_5} + \lambda_6\vec{f_6}$. Получаем систему уравнений на координаты x_j, y_j и коэффициенты λ_j

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ y_1 + y_2 = 2, \\ y_2 + y_3 = 2, \\ y_3 + y_4 = 2, \\ y_4 + y_5 = 0, \\ x_1 - y_1 = \lambda_1 = \lambda_3, \\ x_2 - y_2 = \lambda_1 = \lambda_3 + \lambda_4, \\ x_3 - y_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_4 + \lambda_5, \\ x_4 - y_4 = \lambda_2 = \lambda_5 + \lambda_6, \\ x_5 - y_5 = \lambda_2 = \lambda_6, \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -1/2, \\ x_2 = 3/2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 5/2, \\ x_5 = -3/2, \\ y_1 = 0, \\ y_2 = 2, \\ y_3 = 0, \\ y_4 = 2, \\ y_5 = -2. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{x} = \frac{1}{2}(-1, 3, 0, 5, -3)$, $\vec{y} = (0, 2, 0, 2, -2)$, $d = \|\vec{x} - \vec{y}\| = 1$.
Обратите внимание, что точно такое же решение мы получим, если станем искать минимум с помощью методов математического анализа: составим целевую функцию $f = \sum\limits_{j=1}^{5}(x_j - y_j)^2$ десяти переменных, добавим условия связи (первые шесть уравнений в нашей системе), составим функцию Лагранжа и т.д.

Задача 52. В пространстве всех многочленов степени ≤ 3 на отрезке $[0, 1]$ ввели обычное скалярное произведение $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ и рассмотрели линейное подпространство $M = \{f : f(0) = 0\}$. Найдите такой многочлен $p(x)$, для которого $\|p\| = 1$, а расстояние $d(p, M)$ максимально.

Решение. Разложим многочлен p в сумму двух многочленов $p = q + r$, где первый лежит в M, а второй лежит в $M^{\perp}$ (мы знаем, что такое разложение существует и единственно). Тогда $d(p, M) = \|r\|$, а $\|p\|^2 = (q + r, q + r) = \|q\|^2 + \|r\|^2 = 1$. Значит, нам необходимо максимизировать число $\|r\|$ при условии $\|q\|^2 + \|r\|^2 = 1$. Ясно, что надо минимизировать $\|q\|$, т.е. взять $q = 0$. Итак, искомый многочлен должен быть ортогонален подпространству M (для ответа нам подойдет любой такой многочлен с единичной нормой, но он сейчас окажется единственным). Выберем в M произвольный базис. Для этого заметим, что $f(x) \in M \Leftrightarrow\ f(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3$. Значит, базисом в M является система мономов $\{x,\ x^2,\ x^3\}$. Как мы знаем, ортогональность $p \perp M$

[11] Сейчас еще не ясно, есть ли такие векторы, но мы найдем их, и вопрос отпадет. Впрочем, простейшие геометрические соображения подсказывают, что такие векторы существуют всегда (подумайте, почему).

равносильна ортогональностям $p \perp x^k$, $1 \le k \le 3$. Запишем наш многочлен в общем виде $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$ и получим соотношения

$$(p, x^k) = \int_0^1 p(x) x^k dx = \frac{p_0}{k+1} + \frac{p_1}{k+2} + \frac{p_2}{k+3} + \frac{p_3}{k+4} = 0, \quad k = 1,\, 2,\, 3,$$

к которым надо еще добавить условие нормировки $\|p\| = 1$. Решаем эту систему и получаем **Ответ:** $p(x) = 35x^3 - 60x^2 + 30x - 4$.

Определение 52. *Матрицей Грама*[12] *системы векторов* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ *в евклидовом пространстве* $\mathbb{E}$ *называется квадратная симметрическая матрица* G*, составленная из попарных скалярных произведений этих векторов:*

$$G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Задача 53. Система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ евклидова пространстве $\mathbb{E}$ является ортонормированной. Составьте матрицу Грама системы векторов $\{\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$.

Решение. Система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — орторнормированная, следовательно,

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1, \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0.$$

Находим матрицу Грама системы $\{\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$:

$$G = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2) & (\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2) & (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) - 2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_1) - (\vec{e}_2, \vec{e}_2) \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_1) - (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot 0 + 1 & 1 - 1 \\ 1 - 1 & 1 + 2 \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама появляется во многих задачах. Например, заметим, что если нам необходимо найти ортогональную проекцию вектора $\vec{x}$ на подпространство $\mathrm{Lin}\{\vec{e}_j\}_1^n$, то эта проекция имеет вид $\vec{y} = \sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j$. Домножая скалярно это равенство на $\vec{e}_i$, получим

$$\sum_{j=1}^n c_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\vec{e}_i, \vec{y}) = (\vec{e}_i, \vec{x})$$

(мы помним, что вектора $\vec{x} - \vec{y}$ ортогонален каждому $\vec{e}_i$). Тогда формулы Крамера для решения этой системы линейных уравнений дают нам ответ

$$c_i = \frac{\det G(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{x}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n)}{\det G(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)}.$$

В частном случае, когда векторы $\vec{e}_j$ ортонормированы, получаем уже известный нам ответ $c_i = (\vec{e}_i, \vec{x})$. Можно ли задать в классическом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ скалярное произведение формулой

[12] см. также [**?**], занятие 10.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Матрица Грама системы векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Найдите длины векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и угол между ними.
2) Найдите длины векторов $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ и $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

2. Матрица Грама системы векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Постройте ортогональную систему $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ так, чтобы $\mathrm{Lin}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \mathrm{Lin}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Ответы: 1. 1) 2, $\sqrt{3}$, $5\pi/6$; 2) $\sqrt{13}$, $\sqrt{7}$; 2. $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \dfrac{2}{3}\vec{e}_1$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \dfrac{1}{2}\vec{e}_2$.

5 Операторы в евклидовом пространстве

Занятие 9

Предположим, что мы зафиксировали в нашем пространстве ортонормированный базис $\{\vec{e}_j\}_1^n$. Как мы знаем, любой линейный оператор $\mathcal{A}$ задается в этом базисе матрицей A, столбцы которой суть векторы $\mathcal{A}\vec{e}_j$. Для произвольного вектора $\vec{x}$ вычислим его координаты в нашем базисе: $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j$. Для этого домножим последнее равенство скалярно на $\vec{e}_k$. В силу ортонормированности базиса, получим $(\vec{x}, \vec{e}_k) = x_k$. Мы пришли к важному соображению: *координаты вектора в ортонормированном базисе вычисляются как скалярные произведения этого вектора с векторами базиса.* Применим это соображение к нашему оператору — заметим, что i–ая координата вектора $\mathcal{A}\vec{e}_j$ равна, с одной стороны, элементу a_{ij} матрицы A, а, с другой стороны, скалярному произведению $(\mathcal{A}\vec{e}_j, \vec{e}_i)$. Мы пришли к еще одному важному соображению: *матрица A оператора $\mathcal{A}$, записанная в ортонормированном базисе $\{\vec{e}_j\}_1^n$, имеет элементы $a_{ij} = (\mathcal{A}\vec{e}_j, \vec{e}_i)$.*

Определение 53. *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующие в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, называются сопряженными, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E$ выполнено соотношение $(\mathcal{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{B}\vec{y})$.*

Теорема 23. *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сопряжены тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе $\mathcal{E}$ их матрицы связаны соотношением*

$$(\mathcal{A}^{\mathcal{E}}) = (\mathcal{B}^{\mathcal{E}})^T.$$

Доказательство. Пусть в ортонормированном базисе $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют матрицы A и B соответственно. Тогда

$$a_{ij} = (\vec{e}_i, \mathcal{A}\vec{e}_j), \quad b_{ij} = (\vec{e}_i, \mathcal{B}\vec{e}_j).$$

Из определения вытекает, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сопряжены тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} = (\vec{e}_i, \mathcal{A}\vec{e}_j) = (\mathcal{A}\vec{e}_j, \vec{e}_i) = (\vec{e}_j, \mathcal{B}\vec{e}_i) = b_{ji},$$

что и означает равенство $A = B^T$. □

Следствие. *Для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в конечномерном евклидовом пространстве, существует единственный сопряженный к нему оператор.*

Определение 54. *Этот оператор называется сопряженным к оператору $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}^*$.*

Из теоремы 23 и свойств транспонирования матриц сразу следуют несколько свойств сопряженного оператора:

- $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$;
- $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$;
- если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то сопряженный к нему также невырожден и $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$.

Определение 55. *Оператор $\mathcal{A}$ называют самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным. то есть $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ или*

$$(\mathcal{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

Из определения и теоремы 23 следует, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица в некотором ортонормированном базисе $\mathcal{E}$ является симметрической: $(\mathcal{A}^{\mathcal{E}})^T = \mathcal{A}^{\mathcal{E}}$.

Задача 54. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор ортогонального проектирования на линейное подпространство M. Найдите сопряженный оператор.

Решение. Мы помним, что каждый вектор $\vec{x}$ пространства единственным образом раскладывается в сумму $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, где $\vec{x}_0 \in M$, а $\vec{x}_1 \in M^{\perp}$. Тогда имеем $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{x}_0$. Отсюда

$$(\mathcal{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}_0, \vec{y}) = (\vec{x}_0, \vec{y}_0) = (\vec{x}, \vec{y}_0) = (\vec{x}, \mathcal{A}^*\vec{y}),$$

т.е. $\mathcal{A}^*\vec{y} = \vec{y}_0$.
Ответ: $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Утверждение 8. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если подпространство $M \subset \mathbb{E}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $M^{\perp}$ инвариантно и относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

2. *Ограничение самосопряженного оператора на инвариантное подпространство является самосопряженным оператором.*

3. *Если подпространство $M \subset \mathbb{E}$ инвариантно относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $M^{\perp}$ также инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Проверим первое утверждение. Пусть подпространство $M \subset \mathbb{E}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Возьмем произвольный вектор из ортогонального дополнения: $\vec{y} \in M^{\perp}$. Нужно показать, что $\mathcal{A}^*\vec{y} \in M^{\perp}$. Из определения сопряженного оператора следует, что для любого вектора $\vec{x} \in M$

$$(\vec{x}, \mathcal{A}^*\vec{y}) = (\mathcal{A}\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

поскольку $\mathcal{A}\vec{x} \in M$. Это и означает, что $\mathcal{A}^*\vec{y} \in M^{\perp}$.

Второе утверждение проверяется легко. Пусть M — подпространство, инвариантное относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$. Тогда для любых векторов $\vec{x} \in M$ векторы $\mathcal{A}\vec{x}$ и $\mathcal{A}\vec{y}$ также принадлежат M и выполнено соотношение

$$(\mathcal{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}\vec{y}).$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}|_M$ также является самосопряженным.

Третье утверждение сразу следует из первого и из определения самосопряженного оператора.

$\square$

Утверждение 9. *Все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Пусть некоторый оператор $\mathcal{A}$ имеет в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$ матрицу A. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексный корень характеристического многочлена $\det(A - \lambda E)$. Покажем, что в этом случае найдутся два линейно независимых вектора $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{E}$ такие, что

$$\begin{cases} \mathcal{A}\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{y}, \\ \mathcal{A}\vec{y} = \beta\vec{x} + \alpha\vec{y}. \end{cases}$$

Действительно, $\det(A - \lambda E) = 0$, следовательно, система линейных уравнений с матрицей $A - \lambda E$ имеет нетривиальное решение — комплексный вектор $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$. Обозначим $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, тогда

$$(A - \lambda E)(\vec{x} + i\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow A(\vec{x} + i\vec{y}) = (\alpha + i\beta)(\vec{x} + i\vec{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} A\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{y}, \\ A\vec{y} = \beta\vec{x} + \alpha\vec{y}. \end{cases}$$

Осталось показать, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейно независимы. Если $\vec{y} = 0$, то из равенства $A\vec{y} = \beta\vec{x} + \alpha\vec{y}$ получим, что $\vec{x} = 0$ (поскольку $\beta \neq 0$), но это невозможно, так как $\vec{x} + i\vec{y}$ — нетривиальное решение. Значит, $\vec{y} \neq 0$. Далее, если $\vec{x} = k\vec{y}$, $k \in \mathbb{R}$, то

$$(k\alpha - \beta)\vec{y} = k\alpha\vec{y} - \beta\vec{y} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{y} = A\vec{x} = Ak\vec{y} = kA\vec{y} = k(\beta\vec{x} + \alpha\vec{y}) = (k^2\beta + k\alpha)\vec{y}.$$

Поскольку $\vec{y} \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то получаем, что $k^2 = -1$. Но это невозможно, поскольку $k \in \mathbb{R}$. Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы.

Пусть теперь оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. Если $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень его характеристического многочлена, то

$$\alpha(\vec{x},\vec{y}) - \beta(\vec{y},\vec{y}) = (\alpha\vec{x} - \beta\vec{y},\vec{y}) = (\mathcal{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\mathcal{A}\vec{y}) = (\vec{x},\beta\vec{x} + \alpha\vec{y}) = \beta(\vec{x},\vec{x}) + \alpha(\vec{x},\vec{y}).$$

Отсюда следует, что $\beta(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) = 0$. Поскольку векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ненулевые, то $\beta = 0$. □

Теорема 24. *Для любого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, действующего в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна.*

Доказательство. Проведем индукцию по размерности n пространства $\mathbb{E}$. Согласно теореме 12, мы должны найти ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что мы нашли такой базис для любого самосопряженного оператора, действующего в пространстве размерности $\leq n-1$. Пусть $\dim \mathbb{E} = n$. Возьмем произвольный корень характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ и обозначим его λ_1. Согласно утверждению 9, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Значит, λ_1 — собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Обозначим через $\vec{e}_1$ соответствующий собственный вектор. Разделим вектор $\vec{e}_1$ на его длину и будем в дальнейшем считать, что $\|\vec{e}_1\| = 1$.

Подпространство $M = \mathrm{Lin}\{\vec{e}_1\}$ является одномерным. Оно инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Тогда его ортогональное дополнение $M^\perp$ имеет размерность $n-1$ и инвариантно относительно $\mathcal{A}$ (пункт 3 утверждения 8). Оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, следовательно, оператор $\mathcal{A}|_{M^\perp}$ также является самосопряженным (пункт 2 утверждения 8). По предположению индукции в пространстве $M^\perp$ существует ортонормированный базис $\{\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}|_{M^\perp}$. Добавим к нему вектор $\vec{e}_1$, получим ортонормированный базис пространства $\mathbb{E}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. □

Определение 56. *Оператор $\mathcal{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ называется изометрическим*[13]*, если он сохраняет скалярное произведение, то есть $(\mathcal{A}\vec{x},\mathcal{A}\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$ для любых $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{E}$.*

Очевидно, что изометрический оператор сохраняет также нормы (длины) векторов. С другой стороны, скалярные произведения всегда можно выразить через длины

$$(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - \frac{1}{4}(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{4}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \frac{1}{4}\|\vec{x}-\vec{y}\|^2,$$

так что любой оператор, который сохраняет длины, сохраняет и скалярные произведения.

Определение 57. *Ортогональная матрица — квадратная матрица A размера $n \times n$ с вещественными элементами, результат умножения которой на транспонированную матрицу равен единичной матрице:*

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E.$$

Другими словами, для ортогональной матрицы $A^T = A^{-1}$.

Из определения следует, что формальные скалярные произведения различных строк (столбцов) матрица A равны нулю, а формальные скалярные квадраты строк (столбцов) равны единице, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} ; \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

[13]Вместо термина «изометрический оператор» часто говорят «унитарный оператор». Будьте внимательны, эти понятия совпадают в конечномерных пространствах, но различаются в бесконечномерных.

Например, матрица $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ является ортогональной.

Перечислим основные свойства изометрических операторов (доказательства вытекают из определения или аналогичны доказательствам соответствующих свойств для самосопряженных операторов).

Теорема 25. *Пусть линейное пространство $\mathbb{E}$ конечномерно, $\mathcal{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — изометрический оператор. Тогда*

1. *$\mathcal{A}$ переводит любой ортонормированный базис пространства $\mathbb{E}$ в ортонормированный базис;*
2. *матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе ортогональна;*
3. *оператор обратим и $\mathcal{A}^* = A^{-1}$;*
4. *если подпространство $M \subset \mathbb{E}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $M^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$;*
5. *все корни характеристического многочлена изометрического оператора по модулю равны 1 (они могут быть комплексными);*
6. *в пространстве $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис $\mathcal{E}$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет канонический вид:*

$$A = \mathcal{A}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} E & & & & \mathit{0} \\ & -E & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathit{0} & & & & A_s \end{bmatrix},$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Замечание. Последнее утверждение теоремы означает, что для изометрического оператора $\mathcal{A}$ пространство $\mathbb{E}$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных одномерных и двумерных инвариантных подпространств. На двумерных подпространствах M_j оператор $\mathcal{A}$ является оператором поворота на угол α_j, где $\cos\alpha_j \pm i \sin\alpha_j$ — корни характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$. Хотя канонический базис для оператора $\mathcal{A}$ определяется неоднозначно, канонический вид его матрицы определен однозначно с точностью до перестановки двумерных клеток и замены клеток вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ на сопряженные клетки вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Задача 55. Является ли ортогональным оператор, имеющий в некотором ортонормированном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}?$$

Решение. Оператор ортогонален, если его матрица в ортонормированном базисе ортогональна. Проверяем ортогональность матрицы:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} = A$$

$$A^T A = AA^T = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Условия ортогональности матрицы выполнены, следовательно данный оператор является ортогональным.
Ответ: да.

Задача 56. Ортогональный оператор, действующий в пространстве геометрических векторов $\mathbb{V}_3$, переводит базисные орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в векторы $\vec{e}_1 = \dfrac{4}{5}\vec{i} - \dfrac{3}{5}\vec{k}$ и $\vec{e}_2 = \dfrac{3}{13}\vec{i} + \dfrac{12}{13}\vec{j} + \dfrac{4}{13}\vec{k}$. Чему равен образ орта $\vec{k}$ под действием этого оператора?

Решение. Пусть ортогональный оператор $\mathcal{A}$ переводит орт $\vec{k}$ в вектор $\vec{e}_3 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Поскольку ортогональный оператор сохраняет метрику пространства, то должны быть выполнены условия $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$, $(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$. Подставляем, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z = 0, \\ \frac{3}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{4}{13}z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} z = \frac{4}{3}x, \\ y = -\frac{25}{36}x, \\ x^2 + \frac{625}{1296}x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1. \end{cases}$$

Получаем, что $x = \dfrac{36}{65}$, $y = -\dfrac{25}{65} = -\dfrac{5}{13}$, $z = \dfrac{48}{65}$. Следовательно, образом орта $\vec{k}$ под действием оператора $\mathcal{A}$ является вектор

$$\vec{e}_3 = \frac{36}{65}\vec{i} - \frac{5}{13}\vec{j} + \frac{48}{65}\vec{k}.$$

Ответ: $A\vec{k} = \dfrac{36}{65}\vec{i} - \dfrac{5}{13}\vec{j} + \dfrac{48}{65}\vec{k}$.

Задача 57. Оператор $\mathcal{A}$ задан в базисе $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$, $\vec{f_1} = (1, 1, 1)$, $\vec{f_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{f_3} = (0, 0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей $A^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу сопряженного оператора в этом же базисе.

Решение. Базис не является ортонормированным, так что просто транспонировать матрицу — неверно. Запишем матрицу перехода к базису $\mathcal{F}$ от стандартного базиса $\mathcal{E} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (как мы помним для этого надо записать координаты векторов по столбцам): $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Мы знаем соотношение $A^{\mathcal{F}} = C^{-1}A^{\mathcal{E}}C$, откуда $A^{\mathcal{E}} = CA^{\mathcal{F}}C^{-1}$. Базис $\mathcal{E}$ ортонормирован, так что в нем матрица $B^{\mathcal{E}}$ сопряженного оператора равна $\left(A^{\mathcal{E}}\right)^T$. Остается перевести эту матрицу в наш базис:

$$B^{\mathcal{F}} = C^{-1}\left(A^{\mathcal{E}}\right)^T C = C^{-1}\left(CA^{\mathcal{F}}C^{-1}\right)^T C = C^{-1}\left(C^{-1}\right)^T \left(A^{\mathcal{F}}\right)^T C^T C.$$

Остальное — дело техники. Находим

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 58. Найдите главный член асимптотики последовательности матриц A^n при $n \to \infty$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица симметрическая, значит оператор самосопряжен. Мы можем найти его собственные векторы, и в этом базисе оператор диагонален, т.е. $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица. Тогда $A^n = CD^nC^{-1}$, а возводить в степень диагональную матрицу легко. Теперь реализуем наш план. Найдем характеристический определитель:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Его корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ — собственные значения. Теперь найдем собственные векторы:

$$A\vec{x} = \lambda_1 \vec{x} \iff \begin{cases} x_1 = t\sqrt{2}, \\ x_2 = -t \end{cases}, \qquad A\vec{x} = \lambda_2 \vec{x} \iff \begin{cases} x_1 = s, \\ x_2 = s\sqrt{2} \end{cases}.$$

Возьмем $t = 1$, $s = 1$ (этот выбор произволен) и составим матрицу перехода, записав собственные векторы по столбцам $C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ и вычислим

$$D = C^{-1}AC = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(это была проверка — мы и так знаем, что получится диагональная матрица с собственными значениями $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$ на диагонали). Тогда

$$A^n = CD^nC^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+2^n & \sqrt{2}(-1+2^n) \\ \sqrt{2}(-1+2^n) & 1+2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Выделяя старшие асимптотические члены для каждого элемента, получим

Ответ: $A^n \sim 2^n \begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & 2 \end{pmatrix}, \quad n \to +\infty.$

Обратите внимание, что в разобранном примере $A^n \sim 2^n$, т.е. порядок роста степени матрицы определяется порядком роста степени максимального по модулю собственного значения. При этом, ошибочно было бы сказать, что для каждого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ асимптотически $\|A^n\vec{x}\| \sim C \cdot 2^n$. Так, для первого собственного вектора $\vec{x} = (\sqrt{2}, -1)$ выполнено $A^n\vec{x} = (-1)^n\vec{x}$, т.е. $\|A^n\vec{x}\| = 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Оператор переводит векторы ортонормированного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в векторы $\vec{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$, $\vec{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$. Является ли этот оператор ортогональным?

Ответы: 1. да;

6 Билинейные и квадратичные формы

Занятие 10

Определение 58. *Пусть $\mathbb{V}$ — линейное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $b : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{R}$ называется билинейной функцией (билинейным функционалом) на пространстве $\mathbb{V}$, если при каждом фиксированном значении одного аргумента оно линейно по другому аргументу, то есть если для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{y}$, $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ и для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено:*

- $b(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = b(\vec{x}_1, \vec{y}) + b(\vec{x}_2, \vec{y})$;
- $b(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha b(\vec{x}, \vec{y})$;
- $b(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = b(\vec{x}, \vec{y}_1) + b(\vec{x}, \vec{y}_2)$;
- $b(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha b(\vec{x}, \vec{y})$.

Определение 59. *Билинейный функционал b называется симметрическим, если $b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x})$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$. Если же $b(\vec{x}, \vec{y}) = -b(\vec{y}, \vec{x})$, то билинейный функционал называется кососимметрическим.*

Определение 60. *Пусть b — билинейный функционал на пространстве $\mathbb{V}$, $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис этого пространства. Положим $b_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Матрица*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей билинейного функционала b в базисе $\mathcal{E}$. Элементы матрицы B называются коэффициентами билинейного функционала b в базисе $\mathcal{E}$.

Заметим, что если $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i$, то в силу билинейности функционала b имеем:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j\right) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j$ называется *билинейной формой* переменных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$. Матрицу B будем называть также матрицей соответствующей билинейной формы.

Теорема 26. *Пусть $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\mathcal{E}' = \{\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n\}$ — два базиса пространства $\mathbb{V}$, и пусть C — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Тогда для любой билинейной функции b ее матрицы в этих базисах связаны соотношением: $B' = C^TBC$, где B — матрица в базисе $\mathcal{E}$, B' — матрица в базисе $\mathcal{E}'$.*

Доказательство. Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ координаты $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(x'_1, \ldots, x'_n)$, $(y'_1, \ldots, y'_n)$ соответственно. Тогда, согласно формулам (4) перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$ имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n) \cdot C^T, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$b(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,\ldots,x_n)\cdot B\cdot \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = (x'_1,\ldots,x'_n)\cdot C^TBC\cdot \begin{pmatrix} y'_1\\ \vdots\\ y'_n\end{pmatrix} = (x'_1,\ldots,x'_n)\cdot B'\cdot \begin{pmatrix} y'_1\\ \vdots\\ y'_n\end{pmatrix},$$

то есть $B' = C^TBC$. □

Определение 61. *Рангом билинейной функции называется ранг ее матрицы в каком-либо базисе. Корректность этого определения сразу следует из предыдущей теоремы.*

Задача 59. В стандартных координатах в $\mathbb{R}^3$ дана билинейная форма $b(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+2x_1y_2+2x_2y_3+2x_3y_1$. Найдите матрицу этой формы в базисе $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3\}$, где $\vec{e}_1 = (1,\,1,\,1)^T$, $\vec{e}_2 = (-1,\,1,\,0)^T$, $\vec{e}_3 = (-1,\,0,\,1)^T$.

Решение. Можно поступить по определению — вычислить $b(\vec{e}_1,\,\vec{e}_1) = 1+1+1+2+2+2 = 9$, $b(\vec{e}_1,\,\vec{e}_2) = -1+1+0+2+0-2 = 0$, $b(\vec{e}_1,\,\vec{e}_3) = 0$ и так далее. Из полученных чисел сформируем матрицу по правилу $b_{ij} = b(\vec{e}_i,\,\vec{e}_j)$. Можно поступить проще — составим матрицу формы (коэффициент при слагаемом x_iy_j пишем в i–ю строчку, j–ый столбик). Получим $B = \begin{pmatrix} 1&2&0\\ 0&1&2\\ 2&0&1\end{pmatrix}$. Теперь составим матрицу перехода $C = \begin{pmatrix} 1&-1&-1\\ 1&1&0\\ 1&0&1\end{pmatrix}$ (координаты векторов базиса $\mathcal{E}$ пишем по столбцам) и воспользуемся доказанной теоремой.
Ответ:

$$B^{\mathcal{E}} = C^TBC = \begin{pmatrix} 1&1&1\\ -1&1&0\\ -1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&2&0\\ 0&1&2\\ 2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&-1&-1\\ 1&1&0\\ 1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9&0&0\\ 0&0&3\\ 0&-3&0\end{pmatrix}.$$

Определение 62. *Отображение $q:\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ называется квадратичной функцией, если существует такой билинейный функционал b, что*

$$q(\vec{x}) = b(\vec{x},\vec{x}) \tag{11}$$

для любого вектора $\vec{x}\in\mathbb{R}$.

Заметим, что из определения сразу следует, что для любого $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$q(\alpha\vec{x}) = \alpha^2 q(\vec{x}). \tag{12}$$

Теорема 27. *Для любой квадратичной функции q существует единственный симметрический билинейный функционал b, удовлетворяющий соотношению* (11)*. Такой функционал называется полярным к квадратичной функции q.*

Доказательство. Из условия симметричности функционала и из соотношения (11) получаем:

$$q(\vec{x}+\vec{y}) = b(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = b(\vec{x},\vec{x}) + 2b(\vec{x},\vec{y}) + b(\vec{y},\vec{y}),$$

откуда

$$b(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})). \tag{13}$$

Единственность доказана. Осталось проверить, что функционал, задаваемый формулой (13), действительно является билинейным, симметричным и удовлетворяет условию (11). Симметричность очевидна. Условие (11) вытекает из (12) и (13):

$$b(\vec{x},\vec{x}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{x}) - 2q(\vec{x})) = \frac{1}{2}(4q(\vec{x}) - 2q(\vec{x})) = q(\vec{x}).$$

Проверим билинейность. Поскольку q — квадратичная функция, то по определению существует билинейный функционал $\widetilde{b}$, удовлетворяющий соотношению (11). Тогда

$$b(\vec{x},\vec{x})=\frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y})-q(\vec{x})-q(\vec{y}))=\frac{1}{2}(\widetilde{b}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})-\widetilde{b}(\vec{x},\vec{x})-\widetilde{b}(\vec{y},\vec{y}))=$$

$$=\frac{1}{2}(\widetilde{b}(\vec{x},\vec{x})+\widetilde{b}(\vec{x},\vec{y})+\widetilde{b}(\vec{y},\vec{x})+\widetilde{b}(\vec{y},\vec{y})-\widetilde{b}(\vec{x},\vec{x})-\widetilde{b}(\vec{y},\vec{y}))=\frac{1}{2}(\widetilde{b}(\vec{x},\vec{y})+\widetilde{b}(\vec{y},\vec{x})).$$

Отсюда вытекает билинейность функционала b. □

Определение 63. *Матрицей Q квадратичной функции q в базисе $\mathcal{E}$ называется матрица полярного к ней симметрического билинейного функционала в этом базисе.*

Если b_{ij} — коэффициенты билинейного функционала, полярного к квадратичной форме q, то для вектора $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n$ имеем

$$q(\vec{x})=b(\vec{x},\vec{x})=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j.$$

Выражение, стоящее в правой части последнего равенства, называется *квадратичной формой* от переменных $x_1,\ldots,x_n$. Учитывая симметричность матрицы квадратичной формы, то есть равенства $b_{ij}=b_{ji}$, последнее равенство можно переписать в виде

$$q(\vec{x})=b(\vec{x},\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}b_{ij}x_ix_j.$$

Задача 60. Значение квадратичной формы на векторе $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$ равно $q(\vec{x})=2x_1^2-6x_1x_2-x_2^2$. Как выражается $q(\vec{x})$ через координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_1-\dfrac{1}{2}\vec{e}_2$?

Решение. Матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}\,'_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_2=\vec{e}_1-\dfrac{1}{2}\vec{e}_2$ имеет вид

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}.$$

В исходном базисе матрица квадратичной формы равна

$$Q=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & -1\end{pmatrix}.$$

Известно, что при переходе от базиса к базису матрица квадратичной формы должна меняться по закону $Q'=C^TQC$, следовательно, имеем

$$Q'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 1 & 19/4\end{pmatrix}.$$

Значит, в новом базисе квадратичная форма будет иметь вид $q(\vec{x})=-5(x'_1)^2+2x'_1x'_2+\dfrac{19}{4}(x'_2)^2$, где $\vec{x}=x'_1\vec{e}\,'_1+x'_2\vec{e}\,'_2$, то есть x'_1, x'_2 — координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе.

Ответ: $q(\vec{x})=-5(x'_1)^2+2x'_1x'_2+\dfrac{19}{4}(x'_2)^2$, где $\vec{x}=x'_1\vec{e}\,'_1+x'_2\vec{e}\,'_2$.

Пусть $q:\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ — квадратичная функция. Базис $\mathcal{E}$ называется *каноническим базисом* для квадратичной функции q, если матрица Q этой функции в базисе $\mathcal{E}$ диагональна:

$$Q=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Запись квадратичной функции в каноническом базисе

$$q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

называется *каноническим видом* данной квадратичной функции.

Привести квадратичную форму к каноническому виду означает найти каноническую форму соответствующей квадратичной функции.

Теорема 28. *Для каждой квадратичной функции существует канонический базис.*

Метод Лагранжа

Опишем метод приведения квадратичной формы к каноническому виду. Пусть

$$q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j.$$

1) Предположим сначала, что найдется номер k, для которого $b_{kk} \neq 0$. Переименуем при необходимости переменные так, чтобы было выполнено: $b_{11} \neq 0$. Обозначим

$$x_1' = x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \ldots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n, \quad x_2' = x_2, \ldots x_n' = x_n.$$

Получим

$$q(\vec{x}) = b_{11}(x_1')^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}' x_i' x_j', \quad \text{где} \quad b_{ij}' = b_{ij} - \frac{b_{1i} b_{1j}}{b_{11}}.$$

2) Рассмотрим теперь случай, когда $b_{kk} = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Если $b_{ij} = 0$ при всех значениях i и j, то квадратичная форма является тождественно нулевой и все доказано. Предположим, что найдется $b_{ij} \neq 0$. Перенумеруем при необходимости переменные так, чтобы было выполнено: $b_{12} \neq 0$. Сделаем преобразование:

$$x_1 = x_1' - x_2', \quad x_2 = x_1' + x_2', \quad x_3 = x_3', \ldots, x_n = x_n'.$$

Получим

$$q(\vec{x}) = 2b_{12}(x_1')^2 - 2b_{12}(x_2')^2 + 2\sum_{i=3}^{n} b_{1i}(x_1' - x_2')x_i' + 2\sum_{i=3}^{n} b_{2i}(x_1' + x_2')x_i' + 2\sum_{3 \le i < j}^{n} b_{ij} x_i' x_j' = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}' x_i' x_j',$$

причем $b_{11}' = 2b_{12} \neq 0$. Значит, можем теперь применить рассуждения пункта 1).

3) С помощью рассуждений пунктов 1) — 2) мы выделили один полный квадрат. Теперь рассмотрим квадратичную форму $\sum\limits_{i,j=2}^{n} b_{ij}' x_i' x_j'$ и применим к ней рассуждения, аналогичные рассуждениям пунктов 1) и 2). Так за конечное число шагов мы приведем исходную форму к каноническому виду.

Предположим, что мы привели некоторую квадратичную форму к каноническому виду

$$q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Заметим, что если ранг этой квадратичной формы равен r, то среди коэффициентов λ_i ровно r отличны от нуля. Пусть среди этих r коэффициентов p являются положительными, а $q = r - p$ — отрицательными. Тогда соответствующими заменами переменных можем привести форму к виду

$$q(\vec{x}) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2.$$

Определение 64. *Такой вид называется нормальным видом квадратичной формы q. Число p называется ее положительным индексом инерции, число q — отрицательным индексом инерции, а их разность $\sigma = p - q$ — сигнатурой.*

Теорема 29. *Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы (а следовательно, и ее сигнатура) не зависят от выбора базиса, в котором форма имеет нормальный вид.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма q в базисе $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ имеет вид

$$q(\vec{x}) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2,$$

а в базисе $\mathcal{E}' = (\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n)$ — вид

$$q(\vec{x}) = z_1^2 + \ldots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

Предположим, что $p \neq s$. Не ограничивая общности, можем считать, что $p > s$. Обозначим через M подпространство, порожденное векторами $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$, а через N — подпространство, порожденное векторами $(\vec{e}\,'_{s+1}, \ldots, \vec{e}\,'_n)$. Тогда $\dim(M+N) = p+(n-s) = n+(p-s) > n$, следовательно, $M \cap N \neq \emptyset$ (теорема 4). Пусть ненулевой вектор $\vec{h} \in M \cap N$ имеет в базисе $\mathcal{E}$ координаты $(y_1, \ldots, y_p)$, а в базисе $\mathcal{E}'$ координаты $(z_{s+1}, \ldots, z_n)$. Тогда

$$y_1^2 + \ldots + y_p^2 = q(\vec{h}) = -z_{s+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

В последнем равенстве правая часть положительна (так как $\vec{h} \neq 0$), а левая не превосходит нуля. Это противоречие доказывает теорему. $\square$

Задача 61. Приведите квадратичную форму $q(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа. Найдите положительный, отрицательный индексы и ранг формы.

Решение. Выделим полные квадраты. Заметим, что

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2,$$

и заменим $x_1 + x_2 - 2x_3$ на x_1'. Форма примет вид

$$q(\vec{x}) = (x_1')^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2.$$

Вновь выделим полные квадраты

$$4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 = (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2$$

и положим $x_2' = x_2 + \dfrac{1}{2}x_3$, $x_3' = x_3$. Получим канонический вид формы

$$q(\vec{x'}) = (x_1')^2 + 4(x_2')^2 - 9(x_3')^2, \quad \text{где } \vec{x'} = (x_1', x_2', x_3').$$

Таким образом, ранг формы равен 3, положительный индекс 2, отрицательный индекс 1.
Ответ: $r = 3$, $p = 2$, $q = 1$.

Критерий Сильвестра

Определение 65. *Квадратичная форма q называется положительно (отрицательно) определенной, если $q(\vec{x}) > 0$ ($q(\vec{x}) < 0$) для любого вектора $\vec{x} \neq 0$. Такие формы называются знакоопределенными. Симметрическая матрица Q называется положительно (отрицательно) определенной, если она является матрицей положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы.*

Теорема 30 (критерий Сильвестра). *Симметрическая матрица Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее угловые миноры положительны.*

Симметрическая матрица Q является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда знаки ее угловых миноров чередуются, начиная со знака «$-$».

Доказательство. Приведем нашу форму к каноническому виду. Получим $Q(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$, т.е. матрица формы в каноническом базисе диагональна, причем на диагонали стоят вначале p единиц, затем $q = r - p$ «минус единиц», а затем $n - r$ нулей. Замена базиса, естественно не меняет знакоопределенности формы: положительная форма остается положительной, отрицательная — отрицательной, знакопеременная — знакопеременной. С другой стороны, очевидно, что выражение $y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$ положительно (на всех ненулевых векторах) в точности тогда, когда $p = r = n$, т.е. когда в выражении нет минусов и нулей. Аналогично, отрицательность формы равносильна отсутствию положительных и нулевых квадратов, т.е. $p = 0$, $r = n$. Считать угловые миноры диагональной матрицы очень легко — они равны произведению чисел на диагонали. В первом случае видим, что все они равны единице, а во втором случае их знаки чередуются, начиная со знака «$-$». Итак, мы видим, что критерий Сильвестра в каноническом базисе «работает». Остается вернуться к исходному базису. Мы уже отмечали, что знакоопределенность формы при этом не меняется. Остается заметить, что не меняются также знаки угловых миноров. Вопрос свелся к задаче на тему «работа с матрицами»: надо доказать, что если две квадратные матрицы B и B' связаны равенством $B' = C^T BC$ для некоторой невырожденной матрицы C, то знаки угловых миноров матриц B и B' попарно совпадают. Оставим этот факт в качестве упражнения. □

Задача 62. Исследуйте на знакоопределенность квадратичную форму

$$q(\vec{x}) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$$

Решение. Эту задачу можно решить тремя способами. Первый — привести форму к каноническому виду. Выделяя полные квадраты, получим

$$q(\vec{x}) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{9x_3^2}{4} + \frac{3x_2^2}{4} - \frac{5x_3^2}{4} = \left(2x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{3x_3}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} - \frac{5x_3^2}{4}.$$

Видно, что у формы есть два положительных и один отрицательный квадрат, то есть знакоопределенной она не является.

Второй способ — если мы уже подозреваем, что форма не знакоопределена, то достаточно подобрать вектор $\vec{x}$, для которого $q(\vec{x}) > 0$ и вектор $\vec{y}$, для которого $q(\vec{y}) < 0$. Можно подобрать, например, $\vec{x} = (1, 0, 0)$, а $\vec{y} = (1, 0, -1)$. Тогда $q(\vec{x}) = 4$, $q(\vec{y}) = -1$.

Третий способ — воспользоваться критерием Сильвестра. Составим симметричную матрицу формы

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, видим, что

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем угловые миноры

$$\det(4) = 4, \qquad \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \qquad \det Q = -6.$$

Согласно критерию, форма положительна, если все угловые миноры положительны (в нашем случае это не выполнено), а отрицательна, если знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса (вновь не наш случай). Значит, форма не знакоопределена.

Ответ: не является знакоопределенной.

Ортогональные преобразования

Пусть $b(\vec{x}, \vec{y})$ — билинейная форма в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$. Тогда с ней можно ассоциировать линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий по правилу

$$(\mathcal{A}\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}.$$

Видно, что это равенство однозначно определяет билинейную форму b по оператору $\mathcal{A}$. С другой стороны, по заданной билинейной форме оператор также восстанавливается однозначно: (например, через координаты $(\mathcal{A}\vec{x}, \vec{e}_j)$ в некотором ортонормированном базисе $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$). Линейность оператора, очевидно, следует из линейности билинейной формы b. Кроме того, заметим, что при переходе от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$ матрица оператора $\mathcal{A}$ будет изменяться по закону

$$\mathcal{A}^{\mathcal{E}'} = C^{-1}\mathcal{A}^{\mathcal{E}'}C,$$

а матрица билинейной формы — по закону

$$B^{\mathcal{E}'} = C^T B^{\mathcal{E}'} C,$$

где C — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Но если базисы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ являются ортонормированными, то C — ортогональная матрица, то есть $C^{-1} = C^T$ и законы изменения матрицы билинейной формы и ассоциированного с ней оператора одинаковы. Таким образом, имеется полная параллель между теорией билинейных функционалов и теорией операторов в евклидовом пространстве.

Симметрическим функционалам в этом случае будут соответствовать самосопряженные операторы. Поэтому можем переформулировать соответствующие теоремы для операторов на языке квадратичных форм и получить следующие результаты.

Теорема 31. *Для любой квадратичной функции q в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид.*

Теорема 32. *Любую вещественную квадратичную форму*

$$q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

можно ортогональным преобразованием переменных привести к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

При этом коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями характеристического многочлена

$$\det(Q - \lambda E) = 0$$

и, следовательно, определены однозначно с точностью до перестановки.

Задача 63. Ортогональным преобразованием приведите квадратичную форму $q(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ к каноническому виду. Найдите положительный, отрицательный индексы и ранг формы.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид: $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения и собственные векторы:

$$\det Q - \lambda E = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, его корни — собственные значения матрицы Q — $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$. Пусть $\vec{e}_1 = (x_1, y_1)$ и $\vec{e}_2 = (x_2, y_2)$ — собственные векторы единичной длины, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

следовательно, можем взять $x_1 = y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (поскольку $x_1^2 + y_1^2 = 1$, то x_1 и y_1 определены с точностью до знака). Аналогично

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

следовательно, можем взять $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$q'(x) = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' = -2x_1' + 4x_2'.$$

Следовательно, положительный индекс равен 1, отрицательный индекс равен 1, ранг формы равен рангу матрицы $Q' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и равен двум.

Ответ: $p = 1$, $q = 1$, $r = 2$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть b — невырожденная билинейная функция на линейном векторном пространстве $\mathbb{V}$, $l : \mathbb{V} \to K$ — линейная функция. Докажите, что существует вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}$ такой, что соотношение $l(\vec{x}) = b(\vec{x}, \vec{v})$ выполняется при всех $\vec{x} \in \mathbb{V}$.

2. Докажите, что любую билинейную функцию можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической функций.

3. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму к нормальному виду, выпишите матрицу соответствующего преобразования:
   а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;
   б) $4x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3$;
   в) $x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 5x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 8x_3x_4$.

4. Исследуйте на знакоопределенность квадратичную форму $q(\vec{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

5. Найдите все значения параметра λ, при которых квадратичная форма $q(\vec{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена.

6. Ортогональным преобразованием приведите квадратичную форму $q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ к каноническому виду. Найдите положительный и отрицательный индексы и ранг формы.

Ответы: 2. а) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 72/11 \\ 0 & 1 & -3 & 31/11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}$.

4. положительно определена;

5. $\lambda > 2$;

6. $q(\vec{x'}) = -2(x'_1)^2 + 3(x'_2)^2 + 6(x'_3)^2$, $p=2$, $q=1$, $r=3$.

Учебное издание

ПАНФЕРОВ Семен Валерьевич
САВЧУК Артем Маркович
САДОВНИЧАЯ Инна Викторовна
САЗОНОВ Василий Викторович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Обложка: *М. А. Еронина*

Отпечатано с готового оригинал-макета
Подписано в печать 25.03.2022 г.
Формат 60x90 1/8. Тираж 50 экз.
Объем 9,5 усл. п.л. Изд. № 039.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н.