МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет космических исследований

АЛГЕБРА

ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ
К КУРСУ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

Под общей редакцией *И. В. Садовничей*

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2021

УДК 512(075.8)
ББК 22.14я73
А45

Коллектив авторов:
С. В. Панферов, И. В. Садовничая, А. М. Савчук

В подготовке издания принимали участие студенты:
А. А. Костин, А. И. Моисеева, А. В. Мальцева, Л. Г. Осипова, М. А. Прошкин, М. А. Рабцевич, М. Н. Саакян, Д. Д. Сабаев, О. Р. Скориков, Н. С. Тарасова

Алгебра. Теория и примеры к курсу первого семестра / С. В. Панферов,
А45 И. В. Садовничая, А. М. Савчук; под ред. И. В. Садовничей. — Москва : МАКС Пресс, 2021. — 64 с.
ISBN 978-5-317-06660-4

Издание представляет собой курс лекций по алгебре первого семестра для студентов факультета космических исследование. Каждая лекция снабжена теоретическим материалом для работы дома и большим количеством примеров. В конце приведен примерный план семинаров, список задач для экзамена, список определений и формулировок и экзаменационные вопросы.

Ключевые слова: алгебра, матрица, уравнение, многочлены, комплексные числа.

УДК 512(075.8)
ББК 22.14я73

Учебное издание

ПАНФЕРОВ Семен Валерьевич
САВЧУК Артем Маркович
САДОВНИЧАЯ Инна Викторовна

АЛГЕБРА
Теория и примеры
к курсу первого семестра

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Обложка: *М. А. Еронина*

Подписано в печать 23.08.2021 г.
Формат 60x90 1/8. Тираж 50 экз.
Объем 8,0 усл. п.л. Изд. № 124.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.

ISBN 978-5-317-06660-4

© Авторы, 2021
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2021

Содержание

1 Определение матриц и арифметические операции 5

2 Преобразования строк и столбцов матрицы 8

3 Метод Гаусса 9

4 Определитель квадратной матрицы 14

5 Метод Крамера 22

6 Обратная матрица 23

7 Матричные уравнения 25

8 Системы линейных уравнений 28

9 Ранг матрицы и линейная зависимость 29

10 Линейное пространство 34

11 Фундаментальная система решений 38

12 Комплексные числа 42

13 Алгебра многочленов 48

14 Алгебраические структуры: группы, кольца, поля, алгебры 53

Пример списка экзаменационных вопросов 58

Пример списка определений и формулировок 59

Пример списка задач к экзамену 60

План семинаров 63

Предисловие

Надо сегодня сказать лишь то,
Что уместно сегодня.
Прочее все отложить
И сказать в подходящее время.
Гораций

На настоящий момент (август 2021 года) есть несколько замечательных учебников и сборников задач по курсу алгебры. Эти книги современны, хорошо написаны, найти и прочесть их может любой студент. Цель написания данного пособия абсолютно утилитарна — дать короткое и полное изложение курса, который читается на факультете космических исследований в первом семестре. По этому курсу предусмотрено всего 8 лекций (одна лекция раз в две недели), так что авторы вынужденно выступают в «жанре миниатюры».

Несколько слов об авторах. Эта книга практически полностью набрана студентами факультета А. А. Костиным, А И. Моисеевой, А. В. Мальцевой, Л. Г. Осиповой, М. А. Прошкиным, М. А. Рабцевич, М. Н. Саакяном, Д. Д. Сабаевым, О. Р. Скориковым, Н. С. Тарасовой. Подбор материала и «шлифовка» текста — заслуга преподавателей факультета С. В. Панферова, А. М. Савчука и И. В. Садовничей.

Пользоваться пособием студентам мы советуем следующим образом. Прослушав очередную лекцию, выбрать время на неделе и перечитать текст этой лекции, добившись полного его понимания; решить задачи к семинару. Через неделю после лекции *обязательно* прочесть текст лекции еще раз и теорию к лекции. Постараться добиться полного понимания прочитанного; решить задачи к семинару.

Студент, который прочел и понял все то, что написано в этой книге, может быть уверен, что теория курса «Алгебра» им усвоена. В этом случае мы, авторы, советуем не останавливаться на достигнутом, а в свободное время обратиться к тем самым замечательным учебникам (см. список литературы на последней странице). Если же понимания не случилось, надо продолжить работу — читать и решать, читать и решать...

В добрый путь!

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

$A\ \alpha$	$B\ \beta$	$\Gamma\ \gamma$	$\Delta\ \delta$	$E\ \epsilon\ \varepsilon$	$Z\ \zeta$	$H\ \eta$	$\Theta\ \theta\ \vartheta$	$I\ \iota$
а́льфа	бе́та	га́мма	де́льта	э́псилон	дзе́та	э́та	тэта	йо́та
$K\ \kappa\ \varkappa$	$\Lambda\ \lambda$	$M\ \mu$	$N\ \nu$	$\Xi\ \xi$	$O\ o$	$\Pi\ \pi$	$R\ \rho\ \varrho$	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$
ка́ппа	ля́мбда	мю	ню	кси	омикро́н	пи	ро	си́гма
$T\ \tau$	$\Upsilon\ \upsilon$	$\Phi\ \phi\ \varphi$	$X\ \chi$	$\Psi\ \psi$	$\Omega\ \omega$			
та́у	и́псилон	фи	хи	пси	оме́га			

Лекция 1

1 Определение матриц и арифметические операции

Определение 1. *Матрица – прямоугольная таблица чисел. Матрицы принято обозначать заглавными латинскими буквами.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица размера } \quad m \times n \quad (m \quad \text{строк}, \quad n \quad \text{столбцов}).$$

Кратко пишут: $A = (a_{ij}),\ m \times n,\ a_{ij} \in \mathbb{R}$. *Первый индекс всегда нумерует строки матрицы, а второй — столбцы.*

Выделяют следующие частные виды матриц:

- Квадратные: $m = n$.
- Прямоугольные: $m \neq n$.
- Единичные матрицы E — квадратные матрицы, у которых на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы нули: $e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{если } i \neq j. \end{cases}$
- Нулевые матрицы O — все элементы равны нулю.
- Диагональные матрицы — квадратные матрицы, у которых на главной диагонали стоят ненулевые элементы, а все остальные элементы нули.
- Векторы–столбцы — матрицы размера $m \times 1$. Мы будем часто обозначать их строчными латинскими буквами со значком вектора: $\vec{x}$.
- Векторы–строки — матрицы размера $1 \times n$.

Есть еще очень много других типов матриц — блочные, симметричные, треугольные, ступенчатые, жордановы клетки, ортогональные, ... Вы познакомитесь с ними в свое время.

Сложение матриц. Матрицы складываются поэлементно (сложение определено только для матриц одного размера). Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Тогда

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Операция сложения матриц обладает свойством коммутативности: $A + B = B + A$ и ассоциативности: $A + (B + C) = (A + B) + C$. Нулевая матрица имеет свойства нуля: $A + O = O + A = A$. Это очевидно.

Умножение матрицы на число. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда по определению $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Из определения сразу следует, что $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность), $\mu(\lambda A) = (\mu\lambda)A$ (ассоциативность).

Произведение матриц. Можно перемножать матрицы A и B, если A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times k$ (т.е. количество столбцов матрицы A должно совпадать с количеством строк матрицы B). По определению

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

— матрица размера $m \times k$ с элементами $c_{ij} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$.

Операция умножения матриц выглядит достаточно громоздкой. Для лучшего запоминания (и понимания), предложим следующее правило. Вначале договоримся, что произведением строки на столбец называется число, равное сумме попарных произведений чисел строки на числа столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

При этом перемножать можно только строки и столбцы одинаковой длины. На самом деле, это определение вам хорошо известно из школьного курса — это скалярное произведение векторов. Пусть теперь мы хотим переменожить матрицу A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$. Представим матрицу A как набор m строк, записанных одна под другой, а матрицу B как набор k столбцов, записанных рядом:

$$A = \begin{pmatrix} \text{стр}_1 \\ \text{стр}_2 \\ \vdots \\ \text{стр}_m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \text{стб}_1 & \text{стб}_2 & \dots & \text{стб}_k \end{pmatrix}.$$

Теперь перемножим каждую строку на каждый столбец (они все имеют одинаковую длину n), и из полученных $m \times k$ чисел составим матрицу $C = AB$. При этом, результат умножения i–ой строки на j–ый столбец запишем в i–ую строку, j–ый столбец матрицы C, т. е. $c_{ij} = \text{стр}_i \times \text{стб}_j$.

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Размер матриц 2×3 и 3×2, т.е. их можно перемножить в порядке AB и получится матрица

размера 2×2

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \qquad c_{11} = (1\ 2\ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1,$$

$$c_{12} = (1\ 2\ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -2, \quad c_{21} = (3\ 1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad c_{12} = (3\ 1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1,$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Может показаться, что логично было бы определить перемножение матриц поэлементно, так же, как сложение. Однако определение, как видите, совсем другое. Это связано с основным назначением матриц. Не вдаваясь пока в детали, заметим, что перемножая матрицу A размера $n \times m$ на вектор–столбец $\vec{x}$ высоты m, получим вектор $A\vec{x} = \vec{b}$ высоты n. Таким образом, каждая матрица задает отображение пространства $\mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Если же мы хотим найти композицию отображений, т.е. вычислить вектор $A \cdot (B\vec{x})$, то несложно проверить, что его координаты совпадут с вектором $(A \cdot B)\vec{x}$. Таким образом, определение перемножения матриц естественным образом возникает из операции композиции отображений.

Говорят, что матрицы A и B *коммутируют (являются перестановочными)*, если:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Заметим, что не любые матрицы являются перестановочными. В нашем последнем примере AB и BA вообще имеют разный размер: 2×2 и 3×3 соответственно. Результаты перемножения AB и BA могут различаться и для квадратных матриц. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, свойством коммутативности операция умножения матриц не обладает. При этом, свойство ассоциативности: $A(BC) = (AB)C$ выполнено. Сложение и умножение связаны свойством дистрибутивности:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Проверьте это самостоятельно, опираясь на определения.

Если речь идет о квадратных $n \times n$ матрицах, то появляется единица по умножению — матрица E, обладающая свойством $EA = AE = A$ для любой матрицы A. Напомним, что на диагонали матрицы E стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Тогда, например,

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} a_{kj} = a_{ij},$$

т.к. $e_{ik} = 0$ при $k \neq i$, а при $k = i$ имеем $e_{ii} = 1$.

Транспонирование матриц. При транспонировании меняются ролями строки и столбцы.

$$\text{Если} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

$$\textit{Пусть} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{тогда} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операция траспонирования обладает свойством: для матриц одинакового размера

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

(это очевидно). Далее, для матриц размера $m \times n$ и $n \times k$ выполнено

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Это неочевидно, проверьте данное свойство самостоятельно.

2 Преобразования строк и столбцов матрицы

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

т.е. числа a_{ij} и b_i даны, а x_i незивестны. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей данной системы*. Мы можем производить над уравнениями следующие действия, которые, очевидно, не меняют решение системы:

1) умножать уравнение на ненулевое число;

2) менять уравнения местами;

3) складывать два уравнения (и записывать эту сумму вместо одного из уравнений).

Этому соответствуют *элементарные преобразования* строк матрицы системы.

Определение 2. *Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы называются преобразования следующего вида (на примере строк)*

1) Транспозиция двух строк;

2) Умножение всех чисел некоторой строки на число, отличное от нуля;

3) Сложение одной строки с другой:

$$\mathbf{1)}\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \text{стр}_i \\ \vdots \\ \text{стр}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ \text{стр}_j \\ \vdots \\ \text{стр}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2)}\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \text{стр}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda \cdot \text{стр}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \mathbf{3)}\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \text{стр}_i \\ \vdots \\ \text{стр}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ \text{стр}_i + \text{стр}_j \\ \vdots \\ \text{стр}_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

3 Метод Гаусса

Метод Гаусса (метод элементарных преобразований) применяется для решения систем линейных уравнений. Метод состоит в последовательных преобразованиях матрицы системы. При этом используются три элементарных преобразования: транспозиция строк, умножие строки на ненулевой коэффициент, сложение двух строк. Заметим, что вместо третьего преобразования удобно использовать модифицированное третье преобразование — в i–ую строку записывается сумма i–ой строки и j–ой строки, умноженной на λ. На самом деле, такое преобразование есть композиция трех преобразований: умножили j–ую строку на λ, сложили с i–ой, разделили j–ую строку на λ.

Для удобства дальнейшего решения системы преобразования проводят с расширенной матрицей системы.

Определение 3. *Расширенной матрицей системы* (1) *называется матрица вида*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

включающая в себя правые части уравнений системы.

Пример 5. *Пусть дана система*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Матрица этой системы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Расширенная матрица:* $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

Цель наших преобразований — привести матрицу к ступенчатому виду.

Определение 4. *Назовем ведущим элементом ненулевой строки матрицы ее первый отличный от нуля элемент. Матрица называется ступенчатой, если выполнены два условия:*
1) номера ведущих элементов ее ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность;
2) нулевые строки, если они есть, стоят в конце.

Пример 6. *Матрица* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *— ступенчатая (номера ведущих элементов* 1, 3, 4*), а матрица* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *— нет (номера ведущих элементов* 1, 3, 3 *— нет строгого возрастания).*

Теорема 1. *Всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду элементарными преобразованиями ее строк.*

Теорема 2 (равносильность систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях)**.** *Система линейных уравнений, полученная из данной с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы системы, эквивалентна исходной.*

Пример 7. *Решим систему:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и проделаем элементарные преобразования строк (заметим, что деление на любое ненулевое число также является элементарным преобразованием, поскольку деление на число $a \neq 0$ — это умножение на число $1/a$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \text{меняем местами первую и вторую строчки} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

прибавляем к тертьей строчке первую, а из второй вычитаем первую, умноженную на два

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \text{делим третью строчку на три, меняем её местами со второй} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{добавим к третьей строчке вторую, умноженную на три} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \text{делим третью строчку на четыре} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Получилась ступенчатая матрица! Записываем систему с новой матрицей, видим, что она заметно упростилась:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -x_3 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Процесс упрощения системы с помощью элементарных преобразований не обязательно заканчивать, получив ступенчатую матрицу. Можно продолжить, создавай нули над диагональю матрицы. Это называется *обратным ходом метода Гаусса*.

Пример 8. *Возьмем ступенчатую матрицу из предыдущего примера и проведем обратный ход метода Гаусса:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{прибавляем ко второй строке третью, а к первой — удвоенную третью}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{вычитаем из первой строки вторую} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\text{умножаем третью строку на } -1 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда сразу получаем решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Теория к лекции 1

Матрицы элементарных преобразований. Составим квадратную матрицу $m \times m$: запишем по диагонали единицы за исключением i–го и j–го места (там запишем нули). Недостающие две единицы запишем на пересечении i–ой строки, j–го столбца (первую единицу) и j–ой строки, i–го столца (вторую). Все остальные элементы матрицы — нули. Например, если $m = 5$, $i = 1$, $j = 3$, то

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица интересна тем, что для произвольной $m \times n$ матрицы A (на примере $m = 5$, $n = 3$)

$$MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}$$

умножение на M слева приводит к перестановке i–ой и j–ой строк матрицы A.
Если слегка изменить матрицу M — записать единичную матрицу, а затем поставить единицу на место (ij) вместо нуля, то получим (вновь на примере $m = 5$, $n = 3$, $i = 1$, $j = 3$)

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{31} & a_{12} + a_{32} & a_{13} + a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}$$

третье элементарное преобразование — добавление 3–ей строки к 1–ой.
Наконец, если взять единичную матрицу M и на месте (ii) записать ненулевое число λ вместо единицы, то (на примере $m = 5$, $n = 3$, $i = 1$)

$$MA = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}.$$

Если домножать матрицу системы A на матрицу M справа, то получим элементарные преобразования столбцов матрицы A (проверьте сами).

Теорема 1. *Всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду элементарными преобразованиями ее строк.*

Доказательство. Если данная матрица A нулевая, то она уже ступенчатая. Пусть A — ненулевая матрица. Тогда существует номер j такой, что все столбцы с номерами 1, ... $j - 1$ являются нулевыми, а столбец с номером j —нет (возможно, $j = 1$, то есть первый столбец уже является ненулевым). Переставим строки так, чтобы элемент $a_{1j} \neq 0$. После этого к каждой строке, начиная со второй, прибавим первую строку, умноженную на подходящее число, с таким расчетом, чтобы все элементы j—го столбца, кроме a_{1j}, стали равны нулю.

Получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A_1 матрицу, стоящую в правом нижнем углу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и применим к ней рассуждения, аналогичные приведенным выше. И так далее, за конечное число шагов придем к ступенчатой матрице. □

Теорема 2 (равносильность систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях)**.** *Система линейных уравнений, полученная из данной с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы системы, эквивалентна исходной.*

Доказательство. Достаточно показать, что система, полученная из данной каким-либо элементарным преобразованием, эквивалентна исходной. Рассмотрим все три типа элементарных преобразований.
1) Транспозиция строк соответствует перестановке местами двух уравнений. Очевидно, что это не меняет множества решений системы.
2) Умножение строки на ненулевое число соответствует умножению обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число. Уравнение, полученное при этом, эквивалентно исходному, следовательно, и множество решений системы не изменится.
3) Сложение двух строк соответствует сложению двух уравнений системы. Рассмотрим систему, состоящую только из этих двух уравнений. Если мы одно из уравнений оставим без изменений, а вместо другого рассмотрим сумму исходных уравнений, то полученная система будет эквивалентна исходной. Действительно, если набор $x_1, \dots, x_n$ является решением каждого из двух уравнений, то он является и решением их суммы и разности. Значит, и при элементарном преобразовании третьего типа множество решений системы не меняется. □

Напомним, что главной диагональю (или просто диагональю) квадратной матрицы называют ее элементы a_{ii} с совпадающими индексами. Квадратная матрица называется диагональной, если $a_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$.

Определение 5. *Квадратная матрица называется верхнетреугольной, если все $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Аналогично, квадратная матрица называется нижнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ при всех $i < j$.*

При сложении и умножении двух диагональных (двух верхнетреугольных, двух нижнетреугольных) матриц получается диагональная (соответственно, верхнетреугольная или нижнетреугольная) матрица. Проверьте это свойство сами.

Любая ступенчатая квадратная матрица является верхнетреугольной. Действительно, номер ведущего элемента i–ой строки равен, как минимум, i (иначе номера ведущих элементов не строго возрастают). При этом возможны два случая. Возможно, номер ведущего элемента для i–ой строки равен i (для всех строк). Тогда на диагонали нашей матрицы стоят ненулевые элементы. Такая матрица называется *невырожденной*. В другом случае существует i–ая строка, для которой номер ведущего элемента больше, чем i. Тогда ведущий элемент последней n–ой строки уже должен быть больше, чем n. Это означает, что n–ая строка является нулевой. Такая матрица называется *вырожденной*.
Замечание. Если после приведения квадратной матрицы системы линейных уравнений к ступенчатому виду получилась невырожденная верхняя треугольная матрица, то ее элементарными

преобразованиями строк можно привести к единичной. А именно, сначала к каждой строке, кроме последней, прибавим последнюю строку с таким коэффициентом, чтобы все элементы последнего столбца, кроме последнего элемента, стали равны нулю. Затем таким же образом сделаем равными нулю все элементы предпоследнего столбца, кроме предпоследнего элемента. И так далее, в результате получим диагональную матрицу. Умножая ее строки на подходящие числа, получим единичную матрицу. Этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса*. Теперь общее решение системы просто считывается с полученной матрицы.

Лекция 2

4 Определитель квадратной матрицы

Дадим сначала общее определение определителя квадратной матрицы размера $n \times n$.

Определение 6. *Перестановкой из n элементов называется набор $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ чисел 1, 2, $\ldots$, n, расположенных в каком–либо порядке. Перестановка $(1, 2, \ldots, n)$ называется тривиальной.*
Говорят, что пара чисел образует инверсию в заданной перестановке, если большее из них стоит левее меньшего. Перестановка называется четной (нечетной), если число инверсий в ней четно (нечетно).

Иногда вместо записи $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ используют более подробную запись $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$, явно указывая, что на место числа 1 после перестановки попало число k_1, на место 2 — k_2 и т.д. Мы будем использовать первую, более компактную запись.

Пример 9. *Переставим числа от 1 до 5 в порядке (3, 5, 2, 1, 4). Число 3 в этой перестановке стоит левее 1 и 2, хотя больше их (две инверсии). Число 5 стоит левее 1, 2 и 4 (еще три инверсии). Число 2 стоит левее 1 (еще одна). Итого, шесть инверсий, т.е. наша перестановка четная.*

Определение 7. *Определителем (детерминантом) квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, называется число*

$$\det A = |A| = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} (-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \cdot a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n},$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, а выражение $N(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ означает число инверсий в перестановке $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ (то есть ее четность).

Это определение тяжело для применения на практике (хотя бы потому, что количество перестановок равно $n!$), поэтому удобно использовать следующие формулы:

- Для матриц размера 2×2:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
Действительно, для $n = 2$ возможны только две перестановки: (1, 2) (ноль инверсий, знак «+» в суммировании) и (2, 1) (одна инверсия, в суммировании знак «−»).

Пример 10.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

- Для матриц 3×3
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

- Для матриц размера 4×4 и больше можно использовать разложение по столбцу (строке) (см. теорему 3 ниже).

Определение 8. *Минорами квадратной матрицы называются определители всех матриц, полученных из данной вычеркиванием произвольных k строк и k столбцов. Порядком минора называется размер квадратной матрицы, полученной после вычеркивания.*

Пример 11. *У матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *есть девять миноров первого порядка (элементы матрицы):* $1, \quad 2, \quad 2, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad 0, \quad 2, \quad 0;$
девять миноров второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

один минор третьего порядка (определитель матрицы):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 2 - 0 = 2.$$

Определение 9. *Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i–той строки и j–того столбца.*

Теорема 3 (разложение определителя по столбцу (строке))**.** *Для любой квадратной матрицы A справедлива формула:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj},$$

где k — любое число от 1 до n, A_{jk} — алгебраическое дополнение к элементу a_{jk}.

Мы приводим эту теорему без доказательства. Для матриц размера 2×2 и 3×3 ее можно проверить непосредственными вычислениями.

Пример 12.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \textit{(разложение по последнему столбцу)} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+4} M_{14} + 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{4+4} M_{44} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (0 - 4 - 4 - 12 - 0 - 1) + (2 + 0 + 0 + 1 + 6 + 0) = 42 + 9 = 51.$$

Как видим, удобнее раскладывать по той строке (столбцу), которая содержит большое количество нулей.

Прежде, чем обсуждать свойства определителей, поговорим о том, откуда возник этот объект и для чего он нужен. Поясним на геометрических примерах.

а) Рассмотрим пару неколлинеарных векторов на плоскости $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ и $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Заметим сразу, что если обозначить $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то можно записать:

$$\vec{a}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2, \quad \vec{a}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2.$$

Назовем пару $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ *положительно ориентированной*, если поворот от $\vec{a}_1$ к $\vec{a}_2$ на угол, меньший π, происходит в положительном направлении (против часовой стрелки).

Обозначим теперь через $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (то есть площадь, взятую со знаком «+», если пара $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ориентирована положительно, и со знаком «−» иначе). Очевидно, что если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, то $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = 0$. Таким образом, величина $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ является мерой неколлинеарности (линейной независимости [1]) векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Кроме того, она обладает следующими свойствами:

1) $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ линенйна по $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$;

2) $S\{\vec{a}_2, \vec{a}_1\} = -S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$;

3) $S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = 1$.

Второе и третье свойства очевидны, проверим первое. Представим площадь параллелограмма как произведение стороны на высоту: $S = |\vec{a}_1| \cdot h_2$, где h_2 — проекция вектора $\vec{a}_2$ на прямую, ортогональную вектору $\vec{a}_1$. Поскольку операция проектирования обладает свойством линейности, то площадь линейна по $\vec{a}_2$. Аналогично для $\vec{a}_1$.

Пользуясь свойствами 1 – 3, можем вычислить $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Действительно,

$$S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = S\{a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2\} = S\{a_{11}\vec{e}_1, a_{12}\vec{e}_1\} + S\{a_{21}\vec{e}_2, a_{12}\vec{e}_1\} + S\{a_{11}\vec{e}_1, a_{22}\vec{e}_2\} +$$

$$+ S\{a_{21}\vec{e}_2, a_{22}\vec{e}_2\} = a_{11}a_{12}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_1\} + a_{21}a_{12}S\{\vec{e}_2, \vec{e}_1\} + a_{11}a_{22}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + a_{21}a_{22}S\{\vec{e}_2, \vec{e}_2\} =$$

$$0 - a_{21}a_{12}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + a_{11}a_{22}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + 0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Видим, что ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, в точности совпадает с определителем матрицы, составленной из координат этих векторов:

$$S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

б) Назовем тройку векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ в трехмерном пространстве *положительно ориентированной*, если поворот от $\vec{a}_1$ к $\vec{a}_2$ происходит в положительном направлении при взгляде с конца вектора $\vec{a}_3$. Обозначим через $V\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ в трехмерном пространстве. Можно показать, что он обладает свойствами:

1) линеен по каждому из аргументов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$;

2) меняет знак при перестановке любых двух аргументов;

3) $V\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = 1$,

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — стандартный базис. Пользуясь этими свойствами можем вычислить $V\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ и убедиться в том, что он в точности совпадает с определителем матрицы A, в которой по строкам записаны координаты векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Ясно, что $V\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \neq 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ некомпланарны (линейно независимы).

[1] общее определение линейной зависимости см. в разделе 10

- *Свойства определителя.*
  1) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется. Свойства строк и столбцов одинаковы.
  2) Если все элементы какой–либо строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.
  3) Если все элементы некоторой строки (столбца) матрицы умножить на число $\lambda \neq 0$, то ее определитель тоже умножится на число λ.
  4) При перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
  5) Если матрица содержит две одинаковых строки (столбца), то ее определитель равен нулю.
  6) («фальшивое» разложение по столбцу или строке). Для любой квадратной матрицы A:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}A_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{lj} = 0, \quad \text{если} \quad k \neq l.$$

  7) Если к одной из строк (столбцов) матрицы прибавить другую строку (столбец), умноженную на число $\lambda \neq 0$, то определитель матрицы не изменится.
  8) Определитель диагональной (а также верхнетреугольной или нижнетреугольной) матрицы равен произведению элементов на диагонали: $\det A = a_{11} \dots a_{nn}$.
  9) Определитель произведения матриц равен произведению их определителей:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

- *Вычисление определителя матрицы с помощью метода Гаусса.*
  Приводим матрицу к верхнетреугольному виду. Тогда определитель исходной матрицы равен определителю полученной, с учётом всех преобразований: при перестановке строк домножаем определитель на (-1), при вынесении общего коэффициента строки домножаем на него определитель.

Пример 13.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \textit{меняем местами 1–ю и 3–ю строки} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \textit{к 3–й строке прибавляем 1–ю, из 4–й вычитаем удвоенную 1–ю} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \textit{из 3–й строки вычитаем три 2–х, к 4–й прибавляем восемь 2–х} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 21 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \textit{к 4–й строке прибавляем 3–ю, умноженную на } \frac{7}{3} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17/3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(1 \cdot 1 \cdot (-9) \cdot \frac{17}{3}\right) = 51.$$

Результат, естественно, совпадает с полученным ранее (в примере 12).

Определение 10. *Квадратная матрица с нулевым определителем называется вырожденной. Квадратная матрица с ненулевым определителем назвыается невырожденной.*

Мы знаем, что любую квадратную матрицу можно элементарными преобразованиями привести к верхнетреугольному виду. Тогда по свойству 8) получаем, что у невырожденной матрицы после приведения получится верхнетреугольная матрица с ненулевыми элементами на диагонали. Наоборот, для вырожденной матрицы получим верхнетреугольную матрицу, на диагонали которой есть нули. Значит, наше последнее определение находится в согласии с определением невырожденной матрицы из раздела 4.

Теория к лекции 2

Свойства определителя.
1) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется. Свойства строк и столбцов одинаковы.
2) Если все элементы какой–либо строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.
3) Если все элементы некоторой строки (столбца) матрицы умножить на число $\lambda \neq 0$, то ее определитель тоже умножится на число λ.
4) При перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
5) Если матрица содержит две одинаковых строки (столбца), то ее определитель равен нулю.
6) («фальшивое» разложение по столбцу или строке) Для любой квадратной матрицы A:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{lj} = 0, \quad \text{если} \quad k \neq l.$$

7) Если к одной из строк (столбцов) матрицы прибавить другую строку (столбец), умноженную на число $\lambda \neq 0$, то определитель матрицы не изменится.
8) Определитель диагональной (а также верхнетреугольной или нижнетреугольной) матрицы равен произведению элементов на диагонали: $\det A = a_{11} \dots a_{nn}$.
9) Определитель произведения матриц равен произведению их определителей:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство. Свойство 1) доказывается по индукции по размеру матрицы. Для матриц 2×2 оно очевидно. Шаг индукции проводится с помощью разложения определителя по строке/столбцу (возьмем первую строку для матрицы A и первый столбец для A^T):

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^n a_{1n} M_{1n}, \quad \left|A^T\right| = a_{11}M_{11}^T - a_{12}M_{21}^T + \dots + (-1)^n a_{1n} M_{n1}^T.$$

Здесь через M_{i1}^T обозначены определители матрицы, полученной из A^T вычеркиванием i–ой строки и первого столца. Заметим, что эта матрица есть траспонированная к матрице, полученной из A вычеркиванием первой строки и i–го столбца. По предположению индукции тогда $M_{i1}^T = M_{1i}$ и все доказано.
Свойство 2) очевидно — разложим определитель по этой строке (столбцу), получим ноль.
Свойство 3) очевидно по той же причине.
Свойство 4) выводится непосредственно из определения 7. Ответим вначале на такой вопрос. Пусть дана некоторая перестановка $(k_1, \dots, k_n)$. Поменяем местами числа k_i и k_j в ней для произвольной пары индексов $i < j$. Как изменится четность перестановки? Пусть вначале $j = i + 1$. Тогда четность перестановки изменится на противоположную: если $k_j > k_i$, то число инверсий увеличится на 1, а если $k_j < k_i$, то уменьшится на 1. Общий случай сведем к разобранному. Чтобы поменять местами k_i и k_j сделаем так: поменяем местами k_i и k_{i+1}, затем k_i и k_{i+2} и т.д. до k_{j-1} (всего будет $j - i - 1$ смена). Теперь k_i и k_j стоят рядом — поменяем их местами. А теперь потащим k_j влево — поменяем с k_{j-1}, потом с k_{j-2} и т.д. до k_{i+1} (вновь $j - i - 1$ смена). Итого, $2(j - i - 1) + 1$ смена четности, т.е. в итоге четность изменится на противоположную. Теперь запишем определение определителя для матрицы $\widetilde{A}$, полученной из A перестановкой i–ой и j–ой строки

$$|\widetilde{A}| = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} (-1)^{N(k_1, \dots k_n)} a_{1\,k_1} \dots a_{i-1\,k_{i-1}} a_{j\,k_i} a_{i+1\,k_{i+1}} \dots a_{j-1\,k_{j-1}} a_{i\,k_j} a_{j+1\,k_{j+1}} \dots a_{n\,k_n}.$$

Теперь в каждом произведении переставим местами множители a_{jk_i} и a_{ik_j} (от этого ничего не изменится). Теперь заменим перестановку $(k_1, \dots, k_n)$ на $(k_1', \dots, k_n')$, где все $k_l' = k_l$ кроме k_j'

и k'_i, для которых $k'_i = k_j$, а $k'_j = k_i$ (это сменит четность перестановки, как мы доказали, т.е. сменит знак перед произведением). Теперь заметим, что $(k'_1, \ldots, k'_n)$ пробегает все возможные перестановки, т.е. мы получили

$$-\sum_{(k'_1,k'_2,\ldots,k'_n)} (-1)^{N(k'_1,\ldots k'_n)} a_{1\,k'_1} \ldots a_{n\,k'_n} = -|A|.$$

Для доказательства свойства 5) поменяем две эти равные строки местами. С одной стороны, ничего не изменилось. С другой стороны, по свойству 4), определитель меняет знак, т.е. должно быть выполнено: $\det A = -\det A$. Значит, $\det A = 0$.

Свойство 6). Возьмем матрицу A и заменим l–ую строку на k–ую (при этом k–ую строку не меняем на l–ую, а оставляем такой, как была). У полученной матрицы две одинаковые строки, т.е. ее определитель ноль. Если же мы посчитаем этот определитель разложением по l–ой строке, то получим $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} A_{lj}$.

Докажем свойство 7). Пусть мы в i–ую строку матрицы записали сумму i–ой и j–ой строки исходной матрицы, т.е. $\widetilde{a}_{ik} = a_{ik} + a_{jk}$. Посчитаем $\det \widetilde{A}$ разложением по i–ой строке

$$|\widetilde{A}| = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{ik} \widetilde{A}_{ik}.$$

Но другие элементы матрицы не менялись, т.е. $\widetilde{A}_{ik} = A_{ik}$, т.е.

$$|\widetilde{A}| = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + a_{jk}) A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik}.$$

Первая сумма равна $\det A$, а вторая равна нулю по свойству 6).

Докажем свойство 8) для верхнетреугольной матрицы. Заметим, что в сумме из определения 7 ненулевым может быть только одно слагаемое — то, которое отвечает тривиальной перестановке $(1, 2, \ldots, n)$. Действительно, $a_{n\,k_n} = 0$, если $k_n < n$ (наша матрица верхнетреугольная). Значит, приходится признать, что $k_n = n$. Далее, $a_{n-1\,k_{n-1}} = 0$, если $k_{n-1} < n-1$, т.е. либо $k_{n-1} = n-1$, либо $k_{n-1} = n$. Последний случай невозможен (число n в перестановке уже стоит на последнем месте, а повторений быть не может). Значит, $k_{n-1} = n-1$. Продолжая рассуждения, получим, что $k_i = i$ для всех i. Перестановка $(1, 2, \ldots, n)$ не имеет инверсий, т.е. $\det A = a_{11} \ldots a_{nn}$.

Докажем свойство 9). Для матрицы M, отвечающей первому элементарному преобразованию, имеем $\det M = -1$ (вне зависимости от i и j, лишь бы $i \neq j$) — проверьте это сами. Для матрицы M второго преобразования $\det M = \lambda$ (очевидно). Для матрицы M третьего преобразования $\det M = 1$ (легко проверяется — проверьте сами). Мы уже отмечали, что применение элементарного преобразования к матрице A приводит к матрице MA, где M — матрица соответствующего элементарного преобразования. Применяя свойства 3), 4) и 7), получаем, что для каждого из трех преобразований $\det(MA) = \det M \cdot \det A$. Пусть теперь нам даны две произвольные квадратные матрицы A и B одинакового размера. Применяя метод Гаусса, мы можем привести матрицу A к верхнетреугольному виду. Тогда $A = M_1 \ldots M_N \widetilde{A}$, где M_j — матрицы элементарных преобразований, которые применялись в методе Гаусса, а $\widetilde{A}$ верхнетреугольна. По доказанному,

$$\det A = |M_1| \cdot |M_2| \ldots |M_N| \cdot |\widetilde{A}|.$$

Если $\widetilde{A}$ содержит нулевые строки, то ее определитель равен нулю (естественно, тогда $\det A$ тоже нулевой). В этом случае имеем

$$A \cdot B = M_1 \ldots M_N \cdot \widetilde{A} \cdot B, \qquad \det(A \cdot B) = |M_1| \cdot |M_2| \ldots |M_N| \cdot |\widetilde{A} \cdot B|.$$

Но, очевидно, матрица $\widetilde{A} \cdot B$ имеет нулевые строки, т.е. ее определитель равен нулю и равенство $|AB| = |A| \cdot |B|$ выполняется.

Итак, пусть $\widetilde{A}$ невырождена. Применяя метод Гаусса с обратным ходом, мы можем элементарными преобразованиями строк матрицы A получить единичную матрицу. Тогда $A = M_1 \dots M_{N'}$ и $|A| = |M_1| \cdot \dots \cdot |M_{N'}|$. Но тогда

$$A \cdot B = M_1 \dots M_{N'} \cdot B, \qquad \det(A \cdot B) = |M_1| \cdot |M_2| \dots |M_{N'}| \cdot |B| = |A| \cdot |B|.$$

$\square$

Лекция 3

5 Метод Крамера

Определение 11. *Система линейных уравнений называется совместной, если у нее существует хотя бы одно решение. Система называется определенной, если ее решение существует и единственно.*

Есть несколько методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Выше мы уже рассматривали метод Гаусса. Познакомимся с методом Крамера. Он базируется на вычислении определителей, составленных стпециальным образом из коэффициентов системы.

Рассмотрим вначале систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Возможны следующие случаи:

1) $\begin{cases} \Delta = 0, \\ (\Delta_1)^2 + (\Delta_2)^2 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow$ *система несовместна* (решений нет),

2) $\begin{cases} \Delta = 0, \\ \Delta_1 = \Delta_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ система либо *несовместна* (решений нет), либо *не определена* (решений бесконечно много),

3) $\Delta \neq 0 \Longrightarrow$ система *совместна* и имеет единственное решение: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases}$

Доказательство. Пусть вначале $\Delta \neq 0$. Умножим первое уравнение на a_{22} и вычтем второе, умноженное на a_{12}: получим $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$. Если же первое уравнение умножить на a_{21} и вычесть второе, умноженное на a_{11}, то получим $-\Delta \cdot x_2 = -\Delta_2$.

Пусть теперь $\Delta = 0$. Повторив действия, придем к равенству $0 \cdot x_1 = \Delta_1$ и $0 \cdot x_2 = \Delta_2$. Значит, отличие от нуля любого из Δ_1 или Δ_2 ведет к противоречию (решений у системы нет).

Случай $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ разберите сами (приведите пример несовместной системы, пример неопределенной системы и обдумайте, почему определенной такая система быть не может). $\square$

Аналогичные рассуждения можно применять к системам любого размера $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Пример 14. *Продемонстрируем на примере системы размера* 3×3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 8 - 2 + 2 + 2 = 12, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 + 2 + 2 = 6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 + 2 - 0 + 1 = 6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 4 - 2 - 1 - 0 = -6,$$

следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Теорема 4 (формулы Крамера)**.** *Если* $\Delta = \det A \neq 0$ *то система* (2) *имеет единственное решение* $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ *где* Δ_i *— определитель матрицы* A_i*, полученной из матрицы* A *подстановкой вместо* $i-$*го столбца столбца правых частей системы.*

6 Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица $n \times n$.

Определение 12. *Матрица* A^{-1} *называется обратной к матрице* A*, если*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E *— единичная матрица.*

Заметим, что поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, а определитель единичной матрицы равен 1, то *вырожденная матрица не имеет обратной.* Иначе мы бы имели противоречивую цепочку соотношений

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 0 \cdot \det A^{-1} = 0.$$

На самом деле, верно и обратное (критерий обратимости матрицы): *квадратная матрица* A *имеет обратную тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$.

Способы нахождения обратной матрицы:

1) С помощью матрицы алгебраических дополнений:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathcal{A}^T, \qquad \text{где } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A.

2) Записываем матрицу A и рядом единичную матрицу, разделив их вертикальной чертой. Далее, путём элементарных преобразований, приводим матрицу A к единичной, тогда матрица справа будет являться обратной к матрице A. То есть решение будет иметь следующий вид

$$(A|E) \to \ldots \to (E|A^{-1}).$$

Пример 15. *Пусть* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Найдем обратную матрицу.*

Вычислим определитель: $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. *Теперь найдем агебраические дополнения*

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(4) = 4, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\det(3) = -3, \qquad A_{21} = -2, \qquad A_{22} = 1.$$

Тогда $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, *транспонируем* $\mathcal{A}$ *и находим* $A^{-1} = \dfrac{1}{(-2)}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Пример 16. *Расмотрим матрицу размера* 3×3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель: $\det B = 2 + 0 + 0 - (1 + 0 + 0) = 1$ *и алгебраические дополнения*

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Тогда матрица алгебраических дополнений и обратная матрица равны соответственно

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \mathcal{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. *Найдём матрицу, обратную матрице из предыдущего примера, путём элементарных преобразований (методом Гаусса):*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\textit{Тогда } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5 (существование и единственность обратной матрицы)**.** *Если A вырождена, то обратной A^{-1} не существует. Если матрица A невырождена, то у нее существует, причем единственная, обратная матрица.*

Свойства обратной матрицы

- $E^{-1} = E$ (очевидно);

- $(A^{-1})^{-1} = A$ (следует из определения);
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Действительно,

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E, \qquad (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E.$$

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Действительно,

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E; \quad (B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E.$$

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ (следует из того, что определитель произведения равен произведению определителей, то есть $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det E = 1$).

7 Матричные уравнения

С помощью обратной матрицы можно решать СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений). Пусть дана СЛАУ вида (2) с квадратной матрицей A. Заметим, что вводя обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ее можно записать в виде $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Предположим, что матрица A невырождена. Тогда

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad - \quad \text{единственное решение системы.}$$

Если же матрица A вырождена, то ее определитель равен нулю, следовательно, СЛАУ либо несовместна, либо не определена. В этом случае метод обратных матриц не подходит и следует применять метод Гаусса.

Рассмотрим случай, когда неизвестная матрица в уравнении не является вектор–столбцом, а имеет другой размер. Пусть дано уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad X \in \mathbb{R}_{2\times 2}.$$

Способ 1. Запишем его в виде $AX = B$. Домножим обе части уравнения на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B$$

Остается найти обратную матрицу A^{-1} и перемножить:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Примечание: в случае уравнения $XA = B$ домножение на обратную матрицу A^{-1} выглядело бы так:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}, \qquad X = BA^{-1}.$$

Если матрица A — невырожденная, то из теоремы о существовании и единственности обратной матрицы сразу следует теорема о существовании и единственности решения матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$.

Способ 2. Запишем неизвестную нам матрицу X в виде $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a+2c=5 \\ b+2d=6 \\ 3a+4c=7 \\ 3b+4d=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-4 \\ c=4 \\ d=5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Примечание: Если матрицы A и B вырожденные, то можно решить это матричное уравнение с помощью способа 2 (способ 1 не подходит). Ответ будет (если он будет) не единственным.

Пример 18.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2a+4c=2 \\ 2b+4d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-2c \\ b=-2d, \end{cases} \quad \textit{где } c \textit{ и } d \textit{ — произвольные.}$$

В случае, когда матрица A — вырожденная, а матрица B — нет, матричное уравнение $A \cdot X = B$ не имеет решений в силу противоречивого равенства $0 = \det A \cdot \det X = \det B \neq 0$. В случае же, когда матрица A — невырожденная, а матрица B — вырожденная, решение есть: $X = A^{-1} \cdot B$. Точно так же можно решать и матричные уравнения вида:

$$A \cdot X \cdot B = C, \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Квадратные матричные уравнения, например $X^2 = A$, гораздо сложнее и требуют отдельного разговора.

Пример 19. *Запишем простейшее уравнение* $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Легко видеть, что кроме очевидных решений* $X = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ *уравнение имеет ещё и такие:* $X = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Теория к лекции 3

Теорема 4 (формулы Крамера). *Если* $\Delta = \det A \neq 0$ *то система* (2) *имеет единственное решение* $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ *где* Δ_i *— определитель матрицы* A_i*, полученной из матрицы* A *подстановкой вместо* $i-$*го столбца столбца правых частей системы.*

Доказательство. При любом элементарном преобразовании системы (2) в матрицах A и A_i одновременно происходит соответствующее элементарное преобразование строк. Следовательно, отношение $\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ при этом не меняется (при первом элементарном преобразовании оба определителя меняют знак, при втором — оба умножаются на λ, при третьем — оба не меняются). Приведем матрицу A элементарными преобразованиями к единичному виду. Это возможно: поскольку определитель матрицы не равен нулю, то матрица невырождена. Тогда после приведения ее к ступенчатому виду получаем верхнюю треугольную матрицу с ненулевыми элементами на диагонали. Теперь обратным ходом метода Гаусса приводим ее к единичной. Пусть $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$, ... , $\widetilde{b}_n$ — правые части системы после приведения, тогда система, очевидно, имеет решение $x_i = \widetilde{b}_i$. $i = 1, 2, \ldots, n$.

С другой стороны, у приведенной системы $\widetilde{\Delta} = 1$, $\widetilde{\Delta}_i = \widetilde{b}_i$, следовательно,

$$x_i = \widetilde{b}_i = \frac{\widetilde{\Delta}_i}{\widetilde{\Delta}} = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

□

Теорема 5 (существование и единственность обратной матрицы). *Если* A *вырождена, то обратной* A^{-1} *не существует. Если матрица* A *невырождена, то у нее существует, причем единственная, обратная матрица.*

Доказательство. Первое утверждение уже доказано (см. текст лекции). Пусть теперь A невырождена, т.е. $\det A \neq 0$. Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ & & & \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножая A на $\mathcal{A}^T$, получим

$$A \cdot \mathcal{A}^T = (b_{ij}), \quad \text{где} \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Здесь первое равенство есть теорема 3 о разложении определителя по строке, а второе равенство (точнее, $n-1$ равенство) есть свойство 6) определителя — «фальшивое» разложение по строке. Значит, $\dfrac{1}{\det A} A\mathcal{A}^T = E$.

Перемножая матрицы в обратном порядке, получим

$$\mathcal{A}^T \cdot A = (c_{ij}), \quad \text{где} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

— разложение по столбцу и «фальшивое» разложение по столбцу.

Докажем единственность. Пусть $A^{-1} = A_1$ и $A^{-1} = A_2$, тогда

$$A_1 = A_1 \cdot E = A_1 \cdot (A \cdot A^{-1}) = (A_1 \cdot A) \cdot A^{-1} = (A_1 \cdot A) \cdot A_2 = (A^{-1} \cdot A) \cdot A_2 = E \cdot A_2 = A_2.$$

□

Лекция 4

8 Системы линейных уравнений

Расмотрим произвольную систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из m уравнений с n неизвестными. Приведем ее расширенную матрицу к ступенчатому виду. Обозначим через r число ненулевых строк (ступенек) матрицы системы, а через $\widetilde{r}$ — число ненулевых строк расширенной матрицы. Очевидно, что возможны две ситуации: $\widetilde{r} = r$ или $\widetilde{r} = r + 1$. Далее возможны следующие три принципиально разных случая.
1) $\widetilde{r} = r + 1$. Тогда система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$, следовательно, является несовместной.
2) $\widetilde{r} = r = n$. В этом случае после отбрасывания нулевых уравнений получаем систему из n уравнений с n неизвестными. Матрица полученной системы является квадратной, ступенчатой и не содержит нулевых строк. Следовательно, на ее диагонали нет нулевых элементов. Значит, система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

причем $a_{jj} \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда из последнего уравнения можно однозначно выразить x_n, подставить полученное значение в предпоследнее уравнение, после чего однозначно найти x_{n-1}, и так далее. Получаем, что система имеет единственное решение.
3) $\widetilde{r} = r < n$. Пусть в этом случае j_1, j_2, ... , j_r — номера ведущих коэффициентов ненулевых уравнений системы. Переменные x_{j_1}, x_{j_2}, ... x_{j_r} назовем *главными* (*базисными*), а остальные — *свободными*. Отбросим все нулевые уравнения и перенесем слагаемые со свободными переменными в правую часть. Получим треугольную систему относительно главных неизвестных. Применим к ней рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 2, найдем выражения главных неизвестных через свободные. Эти выражения называют *общим решением системы*. Все решения системы получаются из общего подстановкой вместо свободных неизвестных каких–то конкретных значений. Поскольку эти значения могут выбираться произвольно, то система имеет бесконечно много решений.

Скоро мы узнаем, что число r есть ранг матрицы системы A, а число $\widetilde{r}$ — ранг расширенной матрицы системы $(A|b)$.

Пример 20. *Решим систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получаем, что $\widetilde{r} = r = 2 < 4 = n$, следовательно, система совместна, но не определена. Возьмем в качестве базисных переменных x_1 и x_2 (ведущие элементы в первых двух строках); x_3 и x_4 —

свободные переменные. Перепишем систему в виде $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 - x_3, \\ x_2 = 2 - x_3 + x_4. \end{cases}$ *Получаем, что общее решение системы имеет вид:* $x_1 = -2 + x_3 - 2x_4$, $x_2 = 2 - x_3 + x_4$, *где* x_3 *и* x_4 *произвольны.*

Определение 13. *Система линейных алгебраических уравнений называется однородной, если в правой ее части стоят нули. Иначе система называется неоднородной.*

Свойства решений системы линейных уравнений

- Однородная система всегда является совместной, поскольку имеет тождественно нулевое решение (его называют *тривиальным*).
- Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ являются решениями однородной системы, то любая их линейная комбинация $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ также является решением этой системы.
- Если однородная система с m неизвестными содержит n уравнений, причем $m > n$, то она имеет нетривиальное решение (очевидно, т.к. после приведения к ступенчатому виду появятся свободные переменные, которые всегда можно взять ненулевыми).
- Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — решения неоднородной системы $A\vec{x} = \vec{b}$, то разность $\vec{x} - \vec{y}$ — решение однородной системы с той же матрицей A.
- Если удалось подобрать какое–то решение $\vec{x}_{\text{частн}}$ неоднородной системы $A\vec{x} = \vec{b}$ (частное решение) и известно общее решение однородной системы $\vec{x}_o$, то общее решение неоднородной системы имеет вид $\vec{x}_{\text{частн}} + \vec{x}_o$

9 Ранг матрицы и линейная зависимость

Определение 14. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *— строки некоторой матрицы* $X = (x_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. *Их линейной комбинацией с коэффициентами (числами)* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *называется сумма (строка длины* m*)*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X_k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} c_k x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} c_k x_{k2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} c_k x_{km} \end{pmatrix}.$$

Линейная комбинация называется тривиальной, если все коэффициенты $c_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 15. *Строки матрицы называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.*

Пример 21. *Рассмотрим матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3. \end{pmatrix}$$

Обозначим

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что $X_1 - X_2 + X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Следовательно, строки матрицы* A *являются линейно зависимыми, т.к. существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.*

Аналогичное определение линейной зависимости можно дать для столбцов матрицы.

Определение 16. *Рангом матрицы называется максимально возможное количество ее линейно независимых строк. Обозначение:* $\operatorname{rang} A$ *или* $\operatorname{rg} A$ *или* $\operatorname{rk} A$.

Пример 22. *У матрицы из предыдущего примера* $\operatorname{rang} A = 2$. *Действительно, три строки матрицы линейно зависимы, т.е.* $\operatorname{rang} A < 3$. *С другой стороны, строки* X_1 *и* X_2 *линейно независимы. Действительно, если мы составим их линейную комбинацию с коэффициентами* c_1 *и* c_2 *и приравняем ее к нулю, то получим систему* $\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0, \\ 3c_1 + 5c_2 = 0, \\ 4c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$ *Вычитая из второго уравнения утроенное первое, получим* $-c_2 = 0$. *Подставляя в первое, получим* $c_1 = c_2 = 0$.

Свойства ранга матрицы:

1) Для $n \times m$ матрицы rang $\leq n$ (очевидно).

2) Если взять матрицу A ранга r и дописать к ней снизу несколько строк (k штук), то у полученной матрицы $\widetilde{A}$ ранг заключен между r (когда все дописанные строки суть линейные комбинации строк матрицы A) и $r + k$ (когда все дописанные строки линейно независимы между собой и линейно независимы со строками матрицы A).

3) Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Пусть матрица имеет размер $n \times m$, а r — число ее ненулевых строк:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1\,j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2\,j_2} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{r\,j_r} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r$, $a_{k\,j_k} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Заметим, что первые r строк матрицы линейно независимы. Действительно, если мы составим их линейную комбинацию с коэффициентами $c_1, \ldots, c_r$, то получим строку, j_1–ый элемент которой равен $c_1 a_{1j_1}$. Равенство его нулю влечет $c_1 = 0$. Теперь посмотрим на элемент с номером j_2. Он равен $c_1 a_{1j_2} + c_2 a_{2j_2} = c_2 a_{2j_2}$. Вновь равенство нулю дает $c_2 = 0$. Продолжая процесс, получим $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. Значит, не существует нетривиальной линейной комбинации первых r строк матрицы, дающей нулевую строку. Значит, $\operatorname{rang} A \geq r$. С другой стороны, как ни выбирай $r' > r$ строк, среди выбранных окажется нулевая строка. Взяв линейную комбинацию с набором коэффициентов «все нули, а у этой строки — единица», получим нулевую строку. Значит, выбранные строки линейно зависимы. Следовательно, $\operatorname{rang} A$ не может быть никаким $r' > r$. □

4) Ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк.

Пример 23. *Рассмотрим матрицу A:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 12 & 3 & -3 & 18 \\ 6 & -15 & 9 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 0 & -11 & 7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу ступенчатого вида с двумя ненулевыми строками, то есть $\operatorname{rang} A = 2$.

Теорема 6. *Ранг матрицы равен максимально возможному количеству ее линейно независимых столбцов.*

5) Для $n \times m$ матрицы $\operatorname{rang} \leq \min\{n, m\}$ (следует из теоремы).

6) Ранг матрицы не меняется при траспонировании (следует из теоремы).

7) Ранг квадратной матрицы $n \times n$ равен n в точности тогда, когда матрица невырождена (т.е. имеет ненулевой определитель). Действительно, приведем матрицу к ступенчатому виду. Мы знаем, что такая матрица невырождена в точности тогда, когда в ней нет нулевых строк, т.е. $r = n$.

8) Ранг произведения $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A$ и $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} B$ (мы отложим доказательство этого факта до курса линейной алгебры следующего семестра).

9) Ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов:

$$\operatorname{rang}(A + B) \leqslant \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

Доказательство. Обозначим $C = A + B$. Составим матрицу D, приписав к матрице C справа матрицу A, а затем — матрицу B:

$$D = (C|A|B).$$

Поскольку ранг матрицы равен максимальному количеству ее линейно независимых столбцов (теорема 6), то $\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} D$. Далее, поскольку каждый столбец матрицы C есть линейная комбинация (а именно, сумма) соответствующих столбцов матриц A и B, то $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang}(A|B)$. Из свойства 2, $\operatorname{rang}(A|B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$, следовательно, $\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} D \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$. □

Напомним, что минором порядка r матрицы A называется определитель квадратной матрицы размера $r \times r$, полученной из A вычеркиванием некоторых строк и/или некоторых столбцов.

Определение 17. *Минор $r-$го порядка матрицы A называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ этой матрицы либо не определены, либо равны нулю.*

Теорема 7. *Ранг матрицы равен порядку ее базисного минора*

Пример 24. *Рассмотрим матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что у нее есть нелулевые миноры порядка 1. *Рассмотрим минор порядка* 2, *стоящий в левом верхнем углу (такой минор называется главным):*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0.$$

Мы нашли ненулевой минор порядка 2, *значит,* $\operatorname{rang} A \geq 2$. *Приступим к поиску ненулевого минора порядка* 3. *Если все миноры третьего порядка окажутся равны нулю, то можно будет сделать вывод, что* $\operatorname{rang} A = 2$. *Иначе* $\operatorname{rang} A = 3$ *(поскольку матрица имеет всего три строки).*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 5 + 4 = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 10 - 8 = -4.$$

Значит, $\operatorname{rang} A = 3$.

Вернемся к началу нашей лекции. Наши рассуждения теперь можно оформить следующей известной теоремой.

Теорема 8 (Кронекер — Капелли)**.** *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы ее коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.*

Теория к лекции 4

• Ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк.

Доказательство. Заметим, что каждое из трех элементарных преобразований (поменять местами строчки, умножить строку на ненулевой коэффициент, прибавить к одной строке другую, умноженную на коэффициент) обратимо, причем обратным является вновь элементарное преобразование. Значит, достаточно проверить, что при каждом преобразовании ранг матрицы не возрастает — обращая преобразования вспять увидим, что он тогда и не убывает.

Итак, пусть $\operatorname{rang} A = r$, т.е. в матрице нашлись r линейно независимых строк $X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}$ (для краткости, назовем их семейством). При этом число r макисмально возможное, т.е. добавление к семейству любой другой строки X_j вызывает возникновение линейной зависимости — нетривиальной линейной комбинации с нулевой суммой. Причем в этой линейной комбинации коэффициент при X_j ненулевой (иначе была бы линейная зависимость в семействе без X_j, что неверно). Значит, строка X_j (перенесем ее в правую часть и поделим на коэффициент перед ней) линейно выражается через строки семейства:

$$X_j = d_1 X_{i_1} + \cdots + d_r X_{i_r}.$$

Заметим теперь, что при элементарных преобразованиях строки полученной матрицы $\widetilde{A}$ являются линейными комбинациями строк матрицы A. Но каждая строка матрицы A, как мы поняли, является линейной комбинацией строк семейства. Значит (тривиальное соображение — линейная комбинация линейных комбинаций есть вновь линейная комбинация), строки матрицы $\widetilde{A}$ являются линейными комбинациями строк семейства.

Пусть теперь при преобразовании ранг увеличился, т.е. в матрице $\widetilde{A}$ нашлось $s > r$ линейно независимых строк (назовем их $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_s}$). Проверим их на линейную независимость — составим линейную комбинацию с неопределенными коэффициентами

$$x_1 Y_{j_1} + \cdots + x_s Y_{j_s} = 0.$$

Подставим сюда линейные выражения строк Y через X:

$$\begin{aligned}
Y_{j_1} &= a_{11} X_{i_1} + a_{21} X_{i_2} + \cdots + a_{r1} X_{i_r}, \\
Y_{j_2} &= a_{12} X_{i_1} + a_{22} X_{i_2} + \cdots + a_{r2} X_{i_r}, \\
&\cdots \\
Y_{j_s} &= a_{1s} X_{i_1} + a_{2s} X_{i_2} + \cdots + a_{rs} X_{i_r},
\end{aligned}$$

откуда получаем

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s) X_{i_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s) X_{i_2} + \cdots + (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s) X_{i_r} = 0.$$

Но нулевую линейную комбинацию строчек X_i можно получить только взяв нулевые коэффициенты. Получаем систему уравнений на (неизвестные нам) числа x_j

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0, \\
\cdots \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s = 0.
\end{cases}$$

Остается заметить, что это однородная система, в которой число переменных s больше числа уравнений r. Такая система заведомо имеет нетривиальные решения (см. текст лекции). Строки Y_j оказались линейно зависимыми — проитворечие возникло из–за предположения $s > r$. Значит, при элементарных преобразованиях ранг матрицы не может увеличиться. Следовательно, он вообще не меняется. □

Теорема 6. *Ранг матрицы равен максимально возможному количеству ее линейно независимых столбцов.*

Доказательство. Возьмем произвольную матрицу A и обозначим максимально возможное число ее линейно независимых столбцов через s (временно назовем это число столбцовым рангом), а строк — через r (строчный ранг). Приведем матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду (3). Число r не изменится, т.е. получим матрицу с r ненулевыми строками.

Заметим, что число s тоже не меняется при элементарных преобразованиях строк. К счастью, доказать это гораздо проще, чем для r. Пусть столбец X высоты n есть какая–то линейная комбинация столбцов $X_1, \ldots, X_k$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + c_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Тогда $x_i = \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell x_{i\ell}$.

Первое элементарное преобразование вызывает перестановку местами двух координат. Естественно, если вектор X нулевой (ненулевой) до перестановки, то он таков и после. Аналогично для второго преобразования. Наконец, третье преобразование помещает вместо координаты x_i сумму $\widetilde{x}_i = x_i + \lambda x_j$. Если вектор X был нулевым, то он таким и останется. Если $x_j = 0$, но $x_i \neq 0$, то $\widetilde{x}_i = x_i \neq 0$ (вектор остался ненулевым). Если же $x_j \neq 0$, то вектор остался ненулевым, т.к. на j–ом месте стоит по–прежнему $x_j \neq 0$.

Итак, мы можем привести матрицу A к виду (3), причем числа s и r не изменятся. Заметим теперь, что столбцы с номерами j_1, $j_2, \ldots,$ j_r линейно независимы. Действительно, если мы составим их линейную комбинацию с коэффициентами $c_1, \ldots, c_r$, то на r–ом месте окажется число $c_r a_{rj_r}$. Равенство нулю линейной комбинации означает тогда $c_r = 0$. Посмотрим на $r-1$–ое место: там находится число $c_{r-1}a_{r-1j_{r-1}} + c_r a_{rj_r} = c_{r-1}a_{r-1j_{r-1}}$. Равенство нулю вектора влечет теперь $c_{r-1} = 0$. Посмотрим теперь на $r-2$ место и т.д. В результате получим, что все c_j нулевые, т.е. линейной зависимости нет. Это означает, что столбцовый ранг матрицы $\widetilde{A}$, как минимум, равен r, т.е. $s \geq r$.

Закончим доказательство красивым приемом. Мы доказали, что $s \geq r$. Вернемся к матрице A и транспонируем ее. Теперь строчный ранг матрицы A^T равен s, а столбцовый r. Приведем матрицу A^T к ступенчатому виду и получим, что ее столбцовый ранг не меньше строчного, т.е. $r \geq s$. Значит, $r = s$. □

Теорема 7. *Ранг матрицы равен порядку ее базисного минора.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r, а число $s > r$. Тогда любые s строк матрицы A линейно зависимы. Тем более, линейная зависимость сохранится, когда мы удалим несколько столбцов (т.е. у строк пропадут координаты с некоторыми номерами), составив квадратную $s \times s$ подматрицу B. Итак, строки любой такой подматрицы линейно зависимы, т.е. $\det B = 0$. Значит, все миноры матрицы A размера $> r$ равны нулю.

Остается найти ненулевой минор размера r. По условию, в A есть r линейно независимых строк. Составим из этих строк прямоугольную подматрицу C. Ее ранг (число линейно независимых строк) равен r. Но тогда у нее есть r линейно независимых столбцов (теорема 6). Вычеркнем остальные столбцы и получим матрицу $r \times r$, содержащую r линейно независимых столбцов, т.е. ранга r. Значит, ее определитель не ноль — мы нашли ненулевой минор порядка r. □

Лекция 5

10 Линейное пространство

Определение 18. *Линейным пространством*[2] *называется множество V произвольных элементов (векторов), в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие следующим аксиомам:*
1) любым двум векторам $x, y \in V$ поставлен в соответствие элемент из V, обозначаемый $x+y$ и называемый суммой элементов x и y;
2) любому вектору $x \in V$ и любому $\lambda \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие элемент из V, обозначаемый λx и называемый поизведением числа λ и вектора x.
Введенные операции должны удовлетворять следующим аксиомам
1. $x+y=y+x \quad \forall\, x, y \in V$ — коммутативность сложения;
2. $(x+y)+z=x+(y+z) \quad \forall\, x, y, z \in V$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists\, 0_V \in V : x+0_V=0_V+x=x \;\forall\, x \in V$ — существование нейтрального элемента по сложению;
4. $\forall x \in V \quad \exists\, (-x) \in V : \quad x+(-x)=0_V$ — существование обратного элемента по сложению;
5. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x, y \in V : \quad \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ — дистрибутивность;
6. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\, x \in V : \quad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ — дистрибутивность;
7. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in V : \quad \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ — ассоциативность умножения;
8. $\forall\, x \in V : \quad 1 \cdot x = x$ — свойство единицы.

Примеры линейных пространств

- Множество векторов с n координатами с известными уже вам (покоординатными) операциями сложения и умножения на коэффициент.
- Совокупность матриц фиксированного размера $n \times m$ с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.
- Множество векторов — решений однородной системы линейных уравнений $A\vec{x}=0$ с обычными операциями.
- Множество алгебраических многочленов одной переменной степени $\leq n$.

Примеры множеств, не являющихся линейными пространствами над $\mathbb{R}$

- Множество векторов с целочисленными координатами (умножение на число $\lambda \notin \mathbb{Z}$ выводит за пределы множества).
- Множество алгебраических многочленов степени n (разность двух многочленов степени n может быть многочленом меньшей степени).
- Множество решений неоднородной системы линейных уравнений $A\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{b} \neq (0,0,\ldots,0)^T$ (если умножить решение неоднородной системы на число, отличное от единицы, оно перестает быть решением этой системы).

Классической моделью для любого[3] линейного пространства является модель, в которой элементы пространства записываются в виде вертикальных вектор–столбцов с n вещественными координатами

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

[2] в стандартном определении здесь добавляются слова «над полем K» — что это такое, вы узнаете позже
[3] на самом деле, любого конечномерного

(запись вектора в строчку с указанием последующего траспонирования используется просто для экономии места на печати). Два вектора равны, если у них совпадают все координаты, сложение и умножение на коэффициент проводится покоординатно. Аксиомы 1–8 легко проверяются (нулевым вектором является вектор с нулевыми координатами, стрелочку над ним обычно не пишут).

Например, любую матрицу размера $n \times m$ мы можем записать в виде вектора, договорившись, что ее элементы записываются в порядке $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, a_{21}, \ldots, a_{2m}, \ldots)^T$. Любой многочлен степени $\leq n$ вида $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ можно тоже записать в виде вектора $(a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$ длины $n+1$. Такая запись не нарушает операций сложения и умножения на коэффициент.

Итак, далее будем придерживаться именно такой векторной модели линейного пространства.

Определение 19. *Вектор $\vec{x}$ назывется линейной комбинцией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, если найдутся такие $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, что $\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m$*

Определение 20. *Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ называется линейно зависимой, если существуют такие константы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, не все одновременно равные нулю, что*

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m = 0. \tag{4}$$

Определение 21. *Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ линейно независима, если соотношение* (4) *выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.*

Свойства линейной зависимости:

1) Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы (возьмем все коэффициенты λ_j нулями, кроме коэффициента при нулевом векторе).

2) Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ есть два равных вектора, то эти векторы линейно зависимы (возьмем все коэффициенты нулями, кроме коэффициентов при равных векторах — их выберем 1 и -1).

3) Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ есть два пропорциональных вектора, то эти векторы линейно зависимы (докажите сами).

4) Если некоторая подсистема $\{\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \ldots, \vec{a}_{j_k}\}$ системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Доказательство. Пусть векторы $\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \ldots, \vec{a}_{j_k}$ линейно зависимы ($k < m$), тогда найдется нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_{j_1} \vec{a}_{j_1} + \lambda_{j_2} \vec{a}_{j_2} + \ldots + \lambda_{j_k} \vec{a}_{j_k} = 0.$$

Дополним ее слагаемыми с нулевыми коэффициентами при остальных векторах. □

5) Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в качестве линейной комбинации остальных.

Доказательство. Действительно, если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно зависимы, то существуют постоянные $\lambda_1, \ldots \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m = 0$. Пусть $\lambda_k \neq 0$, тогда из последнего соотношения можем выразить вектор $\vec{a}_k$ через остальные. Обратно, пусть какой–либо из векторов выражается через остальные. Перенесем все слагаемые в одну часть равенства, получим нетривиальню линейную комбинацию векторов, равную нулю. □

Заметим, что из линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ не следует, что *любой* из них может быть представлен линейной комбинацией остальных.

Определение 22. *Пусть S — какое-либо подмножество линейного пространства V. Линейной оболочкой множества S называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов множества S. Обозначение:* $\operatorname{Lin} S$.

Легко видеть, что если $\vec{x},\ \vec{y} \in \operatorname{Lin} S$, то и их линейная комбинация $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y} \in \operatorname{Lin} S$. Таким образом, $\operatorname{Lin} S$ является линейным пространством, вложенным в V — *подпространством* в V.

Определение 23. *Пусть S — какое-либо подмножество линейного пространства V. Говорят, что пространство V порождается множеством S, если $\operatorname{Lin} S = V$. Любую систему S, порождающйю все V и состоящую из конечного числа векторов, называют полной системой.*

Пример 25. *Пусть множество S в $\mathbb{R}^3$ состоит из двух векторов: $S = \{(1,\,1,\,1)^T, (1,\,0,\,0)^T\}$. Тогда $\operatorname{Lin} S = \{(t+s,\,t,\,t)^T :\ t,\,s \in \mathbb{R}\}$ — двумерная плоскость в $\mathbb{R}^3$.*
Пусть в трехмерном пространстве S состоит из двух векторов: $S = \{(1,\,1,\,1)^T,\ (-1,\,-1,\,-1)^T\}$. Тогда $\operatorname{Lin} S = \{(t,\,t,\,t)^T :\ t \in \mathbb{R}\}$ — одномерная прямая в $\mathbb{R}^3$.
Пусть множество S в трехмерном пространстве состоит из всех векторов единичной сферы: $S = \{(x,\,y,\,z)^T :\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Тогда $\operatorname{Lin} S = \mathbb{R}^3$ (любой вектор можно получить из вектора единичной сферы умножением на подходящий коэффициент).

Определение 24. *Векторное пространство V называется конечномерным, если V можно породить множеством S, содержащим конечное число векторов, и бесконечномерным в противном случае.*

Определение 25. *Базисом конечномерного линейного пространства V называется любая полная линейно независимая система векторов в нем.*

Теорема 9. *Всякое конечномерное линейное пространство V обладает базисом. Более точно, из всякого конечного множества векторов S, порождающего пространство V, можно выбрать базис для пространства V.*

Доказательство. Если множество S линейно независимо, то оно само является базисом. Если оно линейно зависимо, то можем выбрать из него вектор (назовем его $\vec{a}$), линейно выражающийся через остальные. Отбросим его, получим множество $S_1 = S \setminus \{\vec{a}\}$, которое содержит на один вектор меньше, но по–прежнему порождает пространство V. Действительно, произвольный вектор $\vec{x}$ выражается линейной комбинацией векторов из S. Если эта линейная комбинация содержит вектор $\vec{a}$, то мы можем заменить его на линейную комбинацию других векторов системы и получить выражение $\vec{x}$ через векторы системы S_1. Применим к системе S_1 аналогичные рассуждения. И так далее, в конце концов получим множество линейно независимых векторов, порождающее пространство V. Это и будет базис. □

Пример 26. *Пространство всех многочленов степени не выше n конечномерно. Действительно, оно порождается линейной оболочкой многочленов $\{1,\,x,\,x^2,\ldots,\,x^n\}$. Любой другой многочлен $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ есть их конечная линейная комбинация с коэффициентами a_j.*

Лемма 1. *Если векторное пространство V порождается системой S, содержащей n векторов, то любая система из m векторов в пространстве V, где $m > n$, будет линейно зависимой.*

Теорема 10. *Пусть V — некоторое конечномерное линейное пространство. Тогда любые два базиса в нем содержат одинаковое число векторов.*

Доказательство. Предположим, что в пространстве V есть два базиса с различным числом векторов. Рассмотрим тот, который содержит большее количество векторов. Из леммы 1 следует, что он является линейно зависимым. Это противоречит определению базиса. Следовательно, наше предположение неверно и число векторов во всех базисах пространства V одинаково. □

Определение 26. *Количество векторов в любом из базисов линейного векторного пространства V называется его размерностью и обозначается $\dim V$.*

Замечание. Пространство, состоящее из одного нулевого вектора считается обладающим «пустым» базисом. Его размерность по определению равна нулю.

Пример 27. *1)* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
2) Пусть V — пространство многочленов степени не выше n. Тогда $\dim V = n+1$. В качестве базиса можно взять систему $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.
3) Пространство всех многочленов бесконечномерно. Действительно, рассмотрим систему

$$\{1,\, x,\, x^2, \dots\}$$

элементов нашего пространства. Она содержит бесконечное число элементов. Кроме того, система линейно независима. Ведь любая нетривиальная линейная комбинация (а мы по–прежнему рассматриваем в качестве линейных комбинаций конечные суммы векторов пространства с коэффициентами) элементов системы не равна нулевому элементу пространства (тождественно нулевому многочлену). Ведь не может же многочлен $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ с ненулевыми коэффициентами оказаться тождественным нулем (кстати, почему?). Если бы в нашем пространстве существовал бы базис из n элементов, то любая система из $n+1$ элемента была бы линейно зависимой (см. лемму 1). Противоречие.

Замечание. Лемму 1 можно сформулировать так: в n–мерном линейной пространстве любая линейно независимая система имеет $\leq n$ векторов. Верно и симметричное утверждение: в n–мерном линейном пространстве любая полная система имеет $\geq n$ векторов. Соединяя эти два утверждения, возвращаемся к теореме 10: в n–мерном пространстве любая полная линейно независимая система (т.е. базис) имеет ровно n векторов.

Доказательство. Докажем, что в n–мерном линейном пространстве любая полная система имеет $\geq n$ векторов. Если бы в такой системе было $< n$ векторов, то применяя к ней процесс выкидывания «лишних» элементов, описанный в доказательстве теоремы 9, мы пришли бы к базису из $< n$ векторов. Это противоречит теореме 10. □

Теорема 11. *В n–мерном пространстве любая линейно независимая система из n векторов является базисом. Любая полная система из n векторов также является базисом.*

Пример 28. *Является ли базисом в $\mathbb{R}^4$ система векторов*

$$\{(0,\,1,\,1,\,1)^T,\ (1,\,0,\,1,\,1)^T,\ (1,\,1,\,0,\,1)^T,\ (1,\,1,\,1,\,0)^T\}?$$

Векторов в системе как раз 4, что равно размерности пространства (иначе мы сразу бы дали отрицательный ответ). Составим из этих векторов матрицу, записав координаты векторов по ее столбцам

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен максимально возможному числу линейно независимых столбцов, и найдя его, мы узнаем, является ли наша система линейно независимой. Приведем матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\operatorname{rang} A = 4$, система линейно независима. Согласно последней теореме, это влечет базисность системы.

11 Фундаментальная система решений

Пример 29. *Линейное пространство V составлено из всех решений однородной системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Укажите какой–нибудь базис в V.
Приведем матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, переменные x_3 и x_4 свободные, а остальные переменные через них выражаются:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 = -x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4. \end{cases}$$

Свободных переменных две, значит, пространство решений V двумерно. Возьмем $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ — получим решение системы $(-1,\, 1,\, 1,\, 0)^T$. Теперь возьмем $x_3 = 0$, а $x_4 = 1$ — получим решение системы $(1,\, -1,\, 0,\, 1)^T$. Получили базис в пространстве V. Действительно, эти два вектора линейно независимы: если записать их линейную комбинацию с коэффициентами c_1 и c_2, то получим вектор $(-c_1 + c_2,\, c_1 - c_2,\, c_1,\, c_2)^T$. Равенство его нулю (посмотрите на две последние координаты) влечет $c_1 = c_2 = 0$ (кстати, именно для этого мы брали наборы свободных переменных $(1,\, 0)$ и $(0,\, 1)$). Итак, наша система линейно независима и состоит из двух векторов в пространстве размерности 2. Значит, она является базисом.

Определение 27. *Любой базис в пространстве решений линейной однородной системы называется фундаментальной системой решений — ФСР.*

По определению базиса, любое другое решение этой системы есть линейная комбинация векторов ФСР с произвольными коэффициентами. Так, в последнем примере общее решение системы имеет вид

$$\vec{x}_o = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t,\, s \in \mathbb{R}.$$

Пример 30. *Найдем общее решение системы:* $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 2. \end{cases}$ *Сначала найдем фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы. Приведем матрицу системы* $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$ *к ступенчатому виду:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть x_1 и x_3 — базисные переменные, x_2 и x_4 — свободные переменные. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4, \\ x_3 = -\dfrac{5}{7}x_4. \end{cases}$$

Поскольку у нас две свободные переменные, то ФСР будет содержать два линейно независимых решения. Удобно положить в первом решении $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, *а во втором, наоборот:* $x_2 = 0$, $x_4 = 1$. *Это гарантирует линейную независимость векторов системы. Получим решения* $(2,\ 1,\ 0,\ 0)^T$ *и* $(2/7,\ 0,\ -5/7,\ 1)^T$. *Тогда общее решение однородной системы имеет вид:*

$$\vec{x}_o = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Частное решение неоднородной системы в данном случае легко подбирается: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$. *Таким образом, общее решение неоднородной системы записывается в виде*

$$\vec{x}_{он} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Теория к лекции 5

Лемма 1. *Если векторное пространство V порождается системой S, содержащей n векторов, то любая система из m векторов в пространстве V, где $m > n$, будет линейно зависимой.*

Доказательство. Пусть $S = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$. Возьмем систему $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ векторов пространства V, где $m > n$, и покажем, что она линейно зависима. Выразим векторы системы B через векторы системы S:

$$\begin{gathered}\vec{b}_1 = \mu_{11}\vec{a}_1 + \mu_{12}\vec{a}_2 + \ldots + \mu_{1n}\vec{a}_n,\\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\ \vec{b}_m = \mu_{m1}\vec{a}_1 + \mu_{m2}\vec{a}_2 + \ldots + \mu_{mn}\vec{a}_n.\end{gathered}$$

Мы хотим составить нулевую линейную комбинацию векторов $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$. Составим ее пока что с неопределенными коэффициентами $x_1, \ldots, x_m$:

$$x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_m\vec{b}_m = (x_1\mu_{11} + x_2\mu_{21} + \ldots + x_m\mu_{m1})\vec{a}_1 + \ldots + (x_1\mu_{1n} + x_2\mu_{2n} + \ldots + x_m\mu_{mn})\vec{a}_n.$$

Линейная комбинация заведомо окажется нулевой, если коэффициенты при векторах $\vec{a}_j$ сделать нулями. Рассмотрим однородную систему из n уравнений с m неизвестными

$$\begin{cases}\mu_{11}x_1 + \mu_{21}x_2 + \ldots + \mu_{m1}x_m = 0,\\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\ \mu_{1n}x_1 + \mu_{2n}x_2 + \ldots + \mu_{mn}x_m = 0.\end{cases} \tag{5}$$

Число уравнений в ней меньше числа неизвестных, следовательно, она имеет нетривиальное решение (см. свойства решений однородной системы). Значит, найдется ненулевой набор $(x_1, \ldots, x_m)$, являющийся решением системы (5). Но тогда $x_1\vec{b}_1 + \ldots + x_m\vec{b}_m = 0$, то есть система векторов B линейно зависима. □

Теорема 11. *В n–мерном пространстве любая линейно независимая система из n векторов является бизасом. Любая полная система из n векторов также является базисом.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть дана линейно независимая система векторов $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$. Если мы добавим к ней произвольный вектор $\vec{x}$, то получим систему из $n+1$ вектора в n–мерном пространстве. Согласно лемме 1, эта система линейно зависима, т.е. выполнено соотношение $c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n + c_{n+1}\vec{x} = 0$. Но коэффициент $c_{n+1} \neq 0$ — иначе получим линейную зависимость исходной системы, что неверно. Значит, перенося $\vec{x}$ в правую часть и деля на $-c_{n+1}$ получаем линейное выражение произвольного $\vec{x}$ через векторы системы, т.е. свойство полноты.
Докажем второе утверждение. От противного. Если система является линейно зависимой, то выбрасывая из нее «лишние» векторы, как в доказательстве теоремы 9, получим полную линейно независимую систему из $< n$ элементов. Противоречие с теоремой 10. Значит, исходная система линейно независима, т.е. базис. □

Теорема 12. *Пусть V — n–мерное векторное пространство. Если система $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ является базисом в V, то каждый вектор $\vec{x} \in V$ раскладывается в линейную комбинацию*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \tag{6}$$

причем единственным образом.
Обратно, если для некоторой системы $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ выполнено хотя бы одно из условий:
а) для любого $x \in V$ существует хотя бы одно разложение (6),
б) для любого $x \in V$ разложение (6) единственно (или не существует),
то система является базисом в V.

Доказательство. Пусть $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис, а $\vec{x} \neq 0$ — произвольный вектор. Тогда $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ — линейно независимая система (определение базиса), а система $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x}\}$ линейно зависима (лемма 1). Значит существует линейная комбинация $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n + \lambda\vec{x} = 0$, где $\lambda \neq 0$. Перенеся $\vec{x}$ и поделив на $-\lambda$, получим (6). Итак, существование разложения для любого $\vec{x} \neq 0$ доказано. В случае $\vec{x} = 0$ в разложении (6) достаточно взять все x_j нулями. Докажем единственность. Если для некоторого $\vec{x}$ существуют два различных разложения вида (6) (обозначим коэффициенты в них x_j и x'_j), то вычитая одно из другого, получим

$$(x_1 - x'_1)\vec{e}_1 + (x_2 - x'_2)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n - x'_n)\vec{e}_n = 0.$$

Так как система $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ линейно независима, то все $x_j - x'_j = 0$ — противоречие. Единственность доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть для некоторой системы $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ выполнено условие а). Другими словами, система полна. Тогда (теорема 11) эта система — базис.

Пусть теперь для некоторой системы $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ выполнено условие б). Пусть некоторая линейная комбинация $c_1\vec{e}_1 + \ldots + c_n\vec{e}_n$ равна нулю. Если не все из c_j равны нулю, то мы получили второе разложение вида (6) для вектора $\vec{0}$ (первое разложение этого вектора мы уже знаем — это разложение с нулевыми коэффициентами). Противоречие с условием б). Значит все c_j равны нулю, т.е. линейная комбинация $c_1\vec{e}_1 + \ldots + c_n\vec{e}_n$ оказалась тривиальной. Мы доказали линейную независимость системы. Тогда вновь из теоремы 11 вытекает, что система является базисом. □

Определение 28. *Разложение* (6) *называют разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису. Коэффициенты* x_j *называют коэффициентами разложения или координатами вектора* $\vec{x}$ *в базисе* $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Лекция 6

12 Комплексные числа

Определение 29. *Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y — действительные числа, i — мнимая единица. Число x называется действителной частью комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$. Число y называется мнимой частью числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$.*

Можно воспринимать любое комплексное число как *упорядоченную пару* (x, y) двух вещественных чисел, т.е. как точку на двумерной плоскости. Ниже будут введены арифметические операции над комплексными числами, с помощью которых будет определен объект «мнимая единица».

- Если $x = 0$, $y \neq 0$, то $z = x + iy = iy$ называется *чисто мнимым* числом.
- Если $y = 0$, то $z = x$ — действительное число.
- Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, $z = 0$, если $x = 0$, $y = 0$.
- Множество комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.
- Геометрическое представление комплексного числа: $z = x + iy$ — это точка M на плоскости с координатами (x, y). Часто удобно ставить в соответствие комплексному числу вектор $\overrightarrow{OM}$. Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + i \cdot 0 = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной и мнимой осями.*
- Длина отрезка $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Арифметические операции над комплексными числами

1) **Сложение (вычитание)** комплексных чисел. По определению: $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$ — *сумма (разность)* чисел z_1 и z_2.

   Свойства операции сложения:

   a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — коммутативность;

   b) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ — ассоциативность;

   c) $\exists!\, 0_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}, 0_{\mathbb{C}} = 0 + i \cdot 0 : \forall z \in \mathbb{C} \;\; z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = 0$ (далее $0_{\mathbb{C}}$=0) — нейтральный элемент;

   d) $\forall z \in \mathbb{C}, \;\; z = x + iy, \;\; \exists!(-z) \in \mathbb{C} : z + (-z) = 0$ — обратный элемент. Легко видеть, что $-z = -x - iy$.

2) **Умножение** комплексных чисел. По определению, умножение проводится раскрытием скобок с использованием аксиомы $i^2 = -1$:

   $$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i \cdot (x_1y_2 + x_2y_1) - \textit{произведение} \text{ чисел } z_1 = x_1 + iy_1 \text{ и } z_2 = x_2 + iy_2.$$

   Замечание. Таким образом, можем воспринимать комплексные числа как алгебраические двучлены с обычными арифметическими операциями, если положить $i^2 = -1$.

   Свойства операции умножения:

   a) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ — коммутативность.

b) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ — ассоциативность.

c) $\exists!\, 1_{\mathbb{C}} = 1 + i \cdot 0 : \forall z \in \mathbb{C} \;\; z \cdot 1_{\mathbb{C}} = z$ (далее $1_{\mathbb{C}} = 1$) — нейтральный элемент.

d) $\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy \neq 0, \;\; \exists! z^{-1} : z \cdot z^{-1} = 1$ — обратный элемент. Проверим, что

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Действительно, $z \cdot z^{-1} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + i \cdot \dfrac{-xy + xy}{x^2 + y^2} = 1 + i \cdot 0 = 1$. В частности, видно, что z^{-1} определен для любого $z \neq 0$.

3) Деление комплексных чисел. Пусть ($z_2 \neq 0$). Тогда

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1)(x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2)(x_2 - i \cdot y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i \cdot (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

— *частное* чисел z_1 и z_2.

Легко видеть, что $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$, т.е. деление, как обычно, есть операция обратная умножению:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = z_1.$$

Поскольку обратный элемент определен для любого $z_2 \neq 0$, то, как обычно: «на ноль делить нельзя, а на все остальное — можно».

Замечание. Операции сложения и умножения связаны свойством дистрибутивности:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Определение 30. *Множество комплексных чисел с введенными на нем арифметическими операциями называют полем комплексных чисел.*

Смысл термина «поле» станет ясен позднее.

Пример 31. *Пусть* $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 + 2i$. *Тогда*

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (1 + 2i) = 3 + 3i;$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (1 + 2i) = 1 - i;$$

$$z_1 z_2 = (2 + i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 4i + i + 2i^2 = 2 - 2 + 5i = 5i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{1 + 2i} = \frac{(2 + i) \cdot (1 - 2i)}{(1 + 2i) \cdot (1 - 2i)} = \frac{2 + i - 4i - 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{4 - 3i}{5} = 0,8 - 0,6i.$$

Комплексно сопряжённые числа

Определение 31. *Два комплексных числа называются комплексно сопряжёнными, если их действительные части равны, а мнимые противоположны по знаку. Число, сопряжённое числу* $z = a + bi$, *обозначается как* $\overline{z} = a - bi$.

Свойства операции комплексного сопряжения:

1) Сумма и произведение двух комплексно сопряжённых чисел являются действительными числами, причем произведение является квадратом модуля любого из этих чисел:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbb{R} \qquad \text{и} \qquad z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \in \mathbb{R}.$$

2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ (очевидно);

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (проверьте сами);

4) $\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}$ (проверьте сами);

5) $\overline{\overline{z}} = z$ (очевидно).

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Запись $z = x + iy$ обычно называют *алгебраической формой* записи комплексного числа z. Это форма не всегда является удобной. В частности, как мы видим, операции умножения и деления выглядят довольно громоздко. Еще более сложно возводить в степень и извлекать корни из комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.

Рассмотрим другой способ записи комплексных чисел. Обозначим через φ и r ($r \geq 0$) полярные координаты точки $M(x, y)$, считая начало координат полюсом, а положительное направление оси Ox — полярной осью. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Следовательно, комплексное число можно представить в форме:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Это выражение называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

- Число $r = |OM|$, является модулем комплексного числа: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Угол φ, образованный радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси OX, называется *аргументом* комплексного числа z. Обозначается: $\operatorname{Arg} z = \left\{\varphi : \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \sin\varphi = \dfrac{y}{r}\right\}$.

Замечание. $\operatorname{Arg} z$ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Из значений $\operatorname{Arg} z$ выделяется главное значение $\arg z$. По умолчанию обычно полагают, что $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Тогда $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 32. $\arg 2 = 0$; $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{Arg}(1 - i) = \left\{-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Свойства модулей и аргмуентов комплексных чисел.

1) При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиус–векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.

2) Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а его аргумент — сумме (разности) аргументов этих чисел.[4]

Действительно, пусть $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_1(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

(применили тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы). Далее,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

согласно тригонометрическим форммулам косинуса и синуса разности.

[4]Здесь есть маленькая тонкость. Мы договорились выбирать $\arg z$ из промежутка $(-\pi, \pi]$. Если мы сложим два таких аргумента, то сумма может не принадлежать нашему промежутку. Поэтому формулу $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ правильно дополнять словами «с точностью до прибавления или вычитания 2π». Аналогично дело обстоит с аргументом дроби.

3) **Формула Муавра.** При возведении комплексного числа в натуральную степень n его модуль возводится в степень n, а аргумент увеличивается в n раз.

Действительно, пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда согласно правилу умножения, имеем:

$$z^n = z\cdot z\cdot\ldots\cdot z = (r\cdot r\cdot\ldots\cdot r)(\cos(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)).$$

Пример 33. *Какое множество на плоскости задает неравенство* $0 < |z-1| < 3$*?*
Заметим, что для любых $z_1 = x_1+iy_1$ *и* $z_2 = x_2+iy_2$ *число* $|z_1-z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ *есть расстояние между точками* z_1 *и* z_2 *на плоскости. Значит, неравенство можно прочесть так: все точки* z*, удаленные от точки* 1 *на расстояние от* 0 *до* 3*. Расстояние равно нулю, только если точки совпадают. Получаем открытый круг с центром в точке* $(1, 0)$ *радиуса* 3 *с проколотым центром.*

Пример 34. *Докажите неравенства*

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \qquad |z_2-z_1| \ge \Big||z_2|-|z_1|\Big|. \tag{7}$$

Первое неравенство докажем геометрически. Отложим вектор z_1 *от начала координат, а вектор* z_2 *— от точки* z_1*. Тогда сумма этих векторов укажет в точку* z_1+z_2 *и мы получим треугольник с вершинами* O*,* z_1 *и* z_1+z_2*. Теперь наше неравенство преватилось в неравенство треугольника.*
Второе неравенство выведем из первого

$$|z_2| = |z_2-z_1+z_1| \le |z_2-z_1|+|z_1| \Longrightarrow |z_2|-|z_1| \le |z_2-z_1|,$$
$$|z_1| = |z_1-z_2+z_2| \le |z_1-z_2|+|z_2| \Longrightarrow |z_1|-|z_2| \le |z_2-z_1|.$$

Извлечение корня $n-$й степени из комплексного числа. Пусть известно, что $\zeta^n = z$, где

$$\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Задача: зная r и φ, найти ρ и ψ, то есть извлечь корень $n-$й степени из числа r. Заметим сразу, что эта задача не такая простая, как возведение в степень. Запишем соответствующие уравнения:

$$\rho^n = r, \qquad \cos(n\psi) = \cos\varphi, \quad \sin(n\psi) = \sin\varphi.$$

Модуль находится однозначно: поскольку r и ρ — неотрицательные числа, то $\rho = \sqrt[n]{r}$. С аргументом сложнее: из того, что у некоторых двух углов совпадают синус и косинус не следует, вообще говоря, что эти улы совпадают. Они могут отличаться на $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad \text{следовательно,} \quad \psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Значит, аргумент ψ определяется не единственным образом. Сколько различных значений может принимать ψ? Поскольку при добавлении целого числа периодов 2π к аргументу точка на плоскости переходит в себя, то количество различных значений будет равняться n: $\psi = \dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, окончательный ответ следующий:
корень из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ne 0$ *определен не однозначно. Существуют* n *различных комплексных чисел* $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$*, каждое из которых является значением корня* $n-$*й степени из* z:

$$\zeta_k^n = z, \qquad \zeta_k = \sqrt[n]{r}(\cos\psi_k + i\sin\psi_k), \qquad \psi_k = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда следует, что $\sqrt[n]{z}$ является *многозначной функцией*. Подробно такие функции будут изучаться в курсе комплексного анализа.

Пример 35. *Вычислим* $\sqrt[4]{1}$. *Запишем в тригонометрической форме* $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$, *тогда* $r = 1$, $\varphi = 0$. *Значит,* $\rho = 1$, $\psi = \dfrac{2\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. *Таким образом,*

$$\zeta_0 = 1, \quad \zeta_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad \zeta_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \quad \zeta_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Заметим, что если изобразить полученные четыре точки на плоскости и последовательно соединить друг с другом, то получим квадрат. Вообще, корни $n-$*й степени из* $z \neq 0$ *на плоскости всегда образуют правильный* $n-$*угольник.*

Показательная форма записи комплексного числа

Есть еще один способ записи комплексных чисел — он удобен тем, что является наиболее компактным и позволяет легко работать с операциями возведения в стпень и извлечения корня. Это способ записи числа в *показательной форме.* Основан на следующей идее: мы знаем, что для любого вещественного числа x справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$. Оказывается, что аналогичный факт справедлив и для комплексных чисел: для любого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ выполнено $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$. Положим по определению: $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. При этом, очевидно, если $z = x + i \cdot 0$ — действительное число, то $e^z = e^x$. Более того, функция e^z обладает свойствами, аналогичными свойствам обычной экспоненты:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}, \quad (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 \cdot z_2}.$$

Положим теперь $z = i\varphi$, тогда $e^z = e^0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, следовательно,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad - \quad \text{формула Эйлера.}$$

Приходим к показательной форме записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arg z.$$

Отсюда и из свойств операций над комплексными числами в тригонометрической форме сразу получаем, что

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Теория к лекции 6

- для любого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ выполнено $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Доказательство.[5] Вначале найдем предел модулей

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)} = e^{\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+O(n^{-2})\right)} = e^{x+o(1)} \to e^x$$

(мы воспользовались эквивалентностью $\ln(1+\alpha) = \alpha + O(\alpha^2)$ при $\alpha \to 0$). Теперь займемся аргументом. Прежде всего, $\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\cdot\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)$. Теперь заметим, что при достаточно больших n число $1+z/n$ лежит в правой полуплоскости, т.е.

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n} = \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} = \frac{y}{n+x} + O(n^{-3})$$

(мы воспользовались эквивалентностью $\operatorname{arctg}(\alpha) = \alpha + O(\alpha^3)$ при $\alpha \to 0$). Тогда

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \frac{ny}{n+x} + O(n^{-2}) \to y.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ существует. Это комплексное число с модулем e^x и аргументом y, т.е. число $e^x(\cos y + i\sin y)$. $\square$

[5] Читайте это доказательство после того, как в курсе математического анализа пройдете разложения Маклорена элементарных функций.

Лекция 7

13 Алгебра многочленов

Определение 32. *Многочленом (вещественным) называется функция вещественной переменной x вида*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \text{где} \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Число n называется степенью многочлена $P(x)$. Пишут: $\deg P(x) = n$. Если многочлен представляет из себя константу, отличную от нуля, то его степень равна нулю. Многочлен, тождественно равный нулю, называют нулевым многочленом. Его степень не определена (иногда полагают, что степень нулевого многочлена равна $-\infty$).

Теорема 13. *Многочлены $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ совпадают при любом значении переменной x тогда и только тогда, когда у них равны все коэффициенты при соответствующих степенях: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ и т.д.*

Доказательство. Пусть для определенности $n \geq m$ (иначе поменяем многочлены местами). Рассмотрим многочлен $R(x) = P(x) - Q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. Если у многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны все коэффициенты при соответствующих степенях, то у многочлена $R(x)$ все коэффициенты равны нулю, следовательно, он принимает нулевые значения при всех значениях переменной x. Но это и означает, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают при всех значениях x.

Докажем обратное. Пусть многочлен $R(x)$ принимает значение 0 при всех значениях переменной x. Предположим вначале, что $c_n \neq 0$. Тогда устремляя x к бесконечности получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \left(c_n + c_{n-1}\frac{1}{x} + c_{n-2}\frac{1}{x^2} + \cdots + c_0 \frac{1}{x^n} \right) = c_n.$$

Так как $R(x) \equiv 0$, то мы должны получить ноль — противоречие, т.е. $c_n = 0$. Предположим, что $c_{n-1} \neq 0$ и найдем $\lim_{x\to\infty} \dfrac{R(x)}{x^{n-1}} = c_{n-1}$. Так как $R(x) \equiv 0$, то мы должны получить ноль — вновь противоречие. Продолжая, получим, что $c_n = c_{n-1} = \cdots = c_0 = 0$. □

Здесь возникает конфликт обозначений. Равенство $P(x) = Q(x)$ можно понимать двояко. То ли это уравнение на переменную x, то ли это утверждение о том, что все коэффициенты многочленов P и Q совпадают. В частности, совсем двусмысленно выглядит равенство $P(x) = 0$ (ведь тождественно нулевой многочлен мы тоже обозначаем символом 0). Чтобы избежать конфликта договоримся в дальнейшем, что запись $P(x) = Q(x)$ означает уравнение на x, а равенство двух многочленов будем записывать либо $P(x) \equiv Q(x)$, либо $P(\cdot) = Q(\cdot)$, либо просто $P = Q$. Исключение (в силу традиции) делается только для записей вида $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, которые определяют многочлен.

Арифметические операции (сложение, вычитание, умножение на коэффициент и перемножение многочленов) нам хорошо известны. В частности, мы знаем, что выполнены свойства

- $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ (ассоциативность сложения);
- $P + 0 = 0 + P$ (существование нуля по сложению — многочлен с нулевыми коэффициентами);
- $P + Q = Q + P$ (коммутативность сложения);
- $P + (-P) = 0$ (существование обратного элемента по сложению);
- $(P \cdot Q)R = P(Q \cdot R)$ (ассоциативность умножения);
- $P \cdot 1 = 1 \cdot P$ (существование единицы по умножению — многочлен $1(x) = 1$);

- $PQ = QP$ (коммутативность умножения);
- $(P+Q)R = PR + QR$ (дистрибутивность).

Про существование обратного по умножению элемента ничего хорошего сказать нельзя. Например, взяв многочлен $P(\cdot) = x$, мы не найдем обратного к нему по умножению — нет такого многочлена $Q(x)$, что $xQ(x) \equiv 1$.

Теорема 14 (деление многочленов с остатком)**.** *Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, причем многочлен $Q(x)$ не является тождественно нулевым. Тогда найдется такой многочлен $T(x)$ (возможно, тождественно нулевой), для еоторого будет выполнено равенство*

$$P(\cdot) = T(\cdot)Q(\cdot) + R(\cdot), \quad \text{где} \quad R(x) - \text{многочлен}, \quad \deg R < \deg Q. \tag{8}$$

При этом многочлены $T(x)$ и $R(x)$ определены однозначно.

Нахождение таких многочленов $T(x)$ и $R(x)$ называется *делением с остатком* многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$. Многочлен $T(x)$ называется *неполным частным*, $R(x)$ — *остатком*. Возможно, $R(x) \equiv 0$, тогда говорят, что многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $Q(x)$, а многочлен $T(x)$ называют *частным* от деления.

Доказательство. Если $\deg P < \deg Q$, то можно взять $T(x) \equiv 0$, $R(\cdot) = P(\cdot)$.
Пусть $\deg P \geq \deg Q$, тогда

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0, \quad n \geq m.$$

Рассмотрим многочлен

$$P_1(\cdot) = P(\cdot) - T_1(\cdot)Q(\cdot), \quad \text{где} \quad T_1(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.$$

Очевидно, что $\deg P_1 \leq n-1$. Если $\deg P_1 < m$, то положим $T = T_1$, $R = P_1$.
Если нет, то применим к многочлену P_1 рассуждения, аналогичные приведенным выше, и получим многочлены T_2 и P_2. И так далее, за конечное число шагов получим многочлены T_k и P_k такие, что

$$P_k(\cdot) = P_{k-1}(\cdot) - T_k(\cdot)Q(\cdot), \quad \deg P_k < \deg Q.$$

Тогда положим

$$R(\cdot) = P_k(\cdot), \quad T(\cdot) = T_1(\cdot) + \ldots + T_{k-1}(\cdot) + T_k(\cdot).$$

Покажем, что многочлены T и R определены однозначно. Допустим, что

$$P(\cdot) = T(\cdot)Q(\cdot) + R(\cdot) = \widetilde{T}(\cdot)Q(\cdot) + \widetilde{R}(\cdot).$$

Тогда $R(x) - \widetilde{R}(x) \equiv (T(x) - \widetilde{T}(x))Q(x)$. Предположим, что $T(\cdot) \neq \widetilde{T}(\cdot)$, тогда

$$\deg(R - \widetilde{R}) = \deg((T - \widetilde{T})Q) \geq \deg Q,$$

что противоречит (8). Значит, $T(\cdot) = \widetilde{T}(\cdot)$, тогда $R(\cdot) = \widetilde{R}(\cdot)$. Единственность доказана. □

Пример 36. *Разделим с остатком многочлен $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ на многочлен $Q(x) = x^2 - x + 1$. Положим $T_1(x) = 2x^3$. Тогда*

$$P_1(x) \equiv P(x) - T_1(x)Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 - (2x^5 - 2x^4 + 2x^3) = -x^4 - x^3 - x^2 + x + 2.$$

Степень P_1 больше, чем у Q, поэтому продолжаем процесс: $T_2(x) = -x^2$,

$$P_2(x) \equiv P_1(x) - T_2(x)Q(x) = -x^4 - x^3 - x^2 + x + 2 - (-x^4 + x^3 - x^2) = -2x^3 + x + 2.$$

Степень P_2 опять больше, чем степень Q, поэтому положим $T_3(x) = -2x$,

$$P_3(x) \equiv P_2(x) - T_3(x)Q(x) = -2x^3 + x + 2 - (-2x^3 + 2x^2 - 2x) = -2x^2 + 3x + 2.$$

Степень P_3 равна степени Q, значит последним будет $T_4(x) = -2$,

$$P_4(x) \equiv P_3(x) - T_4(x)Q(x) = -2x^2 + 3x + 2 - (-2x^2 + 2x - 2) = x + 4.$$

Ответ: неполное частное равно $T(x) \equiv T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 2$, остаток $R(x) \equiv P_4(x) = x + 4$.

Заметим, что гораздо быстрее и компактнее оформлять процесс деления как стандартное деление «уголком».

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^5 & -3x^4 & +x^3 & -x^2 & +x+2 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
2x^5 & -2x^4 & +2x^3 & & & 2x^3 - x^2 - 2x - 2 \\
\cline{1-3}
 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & +x+2 & \\
 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & -2x^3 & & +x+2 & \\
 & & -2x^3 & +2x^2 & -2x & \\
\cline{3-5}
 & & & -2x^2 & +3x+2 & \\
 & & & -2x^2 & +2x-2 & \\
\cline{4-5}
 & & & & x+4 &
\end{array}$$

Следствие 1 (теорема Безу)**.** *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на линейный двучлен $(x-c)$ равен $P(c)$.*

Доказательство. Положим в теореме $Q(x) = x - c$. Тогда $\deg R = 0$, то есть $R(\cdot)$ — константа. Значит, $P(x) \equiv T(x)(x-c) + R$, следовательно $P(c) = R$. □

До настоящего момента мы говорили о многочленах с вещественными коэффициентами. Но ничто не мешает нам изучать многочлены с коэффициентами $a_j \in \mathbb{C}$. Переменную x тоже можно отпустить с вещественной оси в комплексную плоскость. Все это никак не скажется на наших рассуждениях, т.к. арифметические операции с комплексными числами обладают всеми теми же свойствами, что и операции с вещественными числами. Итак, с этого момента $P(z)$ — многочлен комплексной переменной z с комплексными коэффициентами. В случае вещественных коэффициентов говорят $P(z)$ — *вещественный многочлен.*

Определение 33. *Число $c \in \mathbb{C}$ называется корнем многочлена $P(z)$, или алгебраического уравнения $P(z) = 0$, если выполняется равенство $P(c) = 0$.*

Следствие 2. *Число $c \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда P делится без остатка на двучлен $(z - c)$.*

Теорема 15. *Число различных корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.*

Доказательство. Пусть c_1 — корень многочлена $P(z)$. Тогда P делится на $z - c_1$ без остатка, то есть $P(z) \equiv (z - c_1)P_1(z)$, где $P_1(z)$ — тоже многочлен. Далее, пусть c_2 — корень многочлена $P_1(z)$, тогда $P_1(z) \equiv (z - c_2)P_2(z)$. И так далее, получаем

$$P(z) \equiv (z - c_1)(z - c_2)\dots(z - c_m)Q(z), \tag{9}$$

где многочлен $Q(z)$ не имеет корней. Видим, что степень многочлена P больше или равна, чем степень многочлена $(z - c_1)(z - c_2)\dots(z - c_m)$, то есть $\deg P \geq m$. При этом числа $c_1, \dots, c_m$ являются корнями многочлена $P(z)$, а других корней у P нет. Заметим, что среди $c_1, \dots, c_m$ могут быть совпадающие корни, т.е. число различных корней $k \leq m \leq \deg P$. □

Определение 34. *Корень $c \in \mathbb{C}$ многочлена $P(z)$ называется простым, если P делится без остатка на $(z-c)$, а на $(z-c)^2$ делится с ненулевым остатком. Иными словами, если $P(z) \equiv (z-c)Q(z)$, где Q — многочлен, причем $Q(c) \neq 0$. Корень называется кратным, если существует натуральное число $k \geq 2$ такое, что $P(z) \equiv (z-c)^k Q(z)$, где Q — многочлен, причем $Q(c) \neq 0$. Число k в этом случае называется кратностью корня k.*

Пример 37. *Многочлен $P(z) = z^5 - 2z^4 - 2z^3 + 4z^2 + z - 2$ можно разложить на множители:*

$$P(z) = (z+1)^2(z-1)^2(z-2).$$

Значит, он имеет простой корень $c_1 = 2$ и два корня кратности 2: $c_2 = c_3 = -1$, $c_4 = c_5 = 1$.

Возвращаясь к доказательству теоремы 15, видим, что m есть число корней многочлена P с учетом их кратности (т. е. каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Получаем усиление теоремы 15.

Теорема 16. *Число корней ненулевого многочлена с учетом их кратности не превосходит степени многочлена.*

Заметим, что многочлен положительной степени может вовсе не иметь вещественных корней. Например, у многочлена $x^2 + 1$ нет корней, принадлежащих $\mathbb{R}$ (в таком случае говорят, что многочлен *не имеет корней над полем вещественных чисел* $\mathbb{R}$). Над полем комплексных чисел многочлен $x^2 + 1$ имеет два корня: $\pm i$. Справедлив общий факт:

Теорема 17 (основная теорема алгебры)**.** *Над полем комплексных чисел любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Оговорка про учет кратности существенна. Например, многочлен z^2 имеет степень 2 и всего один корень $c = 0$. Однако считать этот корень надо дважды, поскольку он имеет вторую кратность.

Пример 38. *Пусть $P(z) = z^5 + 3z^3 - 4z$. Очевидно, что у него есть корень $c_1 = 0$. Разложим на множители, получим $P(z) = z(z^4 + 3z^2 - 4)$. Многочлен $P_1(z) = z^4 + 3z^2 - 4$ обращается в ноль в точке 1, следовательно, он имеет вещественный корень $c_2 = 1$. Разделим $P_1(z)$ на двучлен $(z-1)$, получим*

$$P_1(z) = (z-1)(z^3 + z^2 + 4z + 4).$$

Многочлен $P_2(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$ обращается в ноль в точке -1, следовательно, имеет корень $c_3 = -1$. Разделим $P_2(z)$ на двучлен $z+1$, получим

$$P_2(z) = (z+1)(z^2 + 4).$$

Очевидно, что многочлен $P_3(z) = z^2 + 4$ принимает положительные значения при любом вещественном z, следовательно, он не имеет вещественных корней. Однако у него есть два комплексных корня: $c_4 = 2i$, $c_5 = -2i$.
Таким образом, многочлен $P(z)$ имеет над полем комплексных чисел 5 корней: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 2i$, $c_5 = -2i$. Его разложение на множители над полем вещественных чисел имеет вид

$$P(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+4),$$

а над полем комплексных чисел:

$$P(z) = z(z-1)(z+1)(z-2i)(z+2i).$$

Теория к лекции 7

Теорема 16 (основная теорема алгебры). *Над полем комплексных чисел любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Лемма 2. *Любой многочлен $P(z)$ степени ≥ 1 имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.*

Доказательство леммы (не полное). Если $n = 1$, то все очевидно. Пусть $n \geq 2$.
Шаг 1. Функция $f(z) = z$, очевидно, непрерывна в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ (оно равно ε), что как только $|z - z_0| < \delta$, так сразу получаем $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Произведение сумма непрерывных функций непрерывны (пробел в доказательстве — пока вы это знаете только для функций вещественной переменной), т.е. любой многочлен $P(z)$ непрерывен в любой точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда непрерывна и функция $f(z) = |P(z)|$. Действительно, $|f(z) - f(z_0)| \leq |P(z) - P(z_0)|$ (см. второе неравенство в (7)).
Шаг 2. Функция $f(z) = |P(z)|$ неотрицательна, значит у множества ее значений в $\mathbb{C}$ существует точная нижняя грань — обозначим ее $\mu \geq 0$. Так как степень многочлена ≥ 1, то $f(z) \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$. Рассмотрим замкнутый круг $|z| \leq r$ в комплексной плоскости настолько большого радиуса r, чтобы $f(z) > \mu + 1$ на множестве $|z| \geq r$. Тогда точная нижняя грань функции $f(z)$ на нашем круге вновь равна μ (ведь вне круга значения функции не могут приблизиться к μ — значит, они это делают внутри круга).

Но замкнутый круг — компакт (пробел!). По теореме Вейерштрасса непрерывная функция на компакте достигает своей точной нижней грани (пробел!). Значит, найдется точка z_0 из круга $|z| \leq r$, в которой $f(z_0) = \mu$. Так как $f(z) > \mu + 1$ на окружности $|z| = r$, то эта точка лежит в открытом круге $|z| < r$.
Шаг 3. Обозначим $P(z_0) = a$. Многочлен $P(z) - a$ обнуляется в z_0. Пусть k — кратность его корня z_0. Тогда многочлен можно поделить на $(z - z_0)^k$ без остатка, т.е. $P(z) - a \equiv (z - z_0)^k Q(z)$, причем $Q(z_0) = b \neq 0$. Если $\deg Q = 0$, то мы остановимся на этом, а если $\deg Q \geq 1$, то разделим $Q(z) - b$ на $(z - z_0)$ и получим $Q(z) - b \equiv (z - z_0)R(z)$. В любом случае,

$$P(z) \equiv P(z_0) + b(z - z_0)^k + (z - z_0)^{k+1} R(z)$$

(в первом случае $R(z) \equiv 0$). Функция $|R(z)|$ непрерывна. Рассмотрим маленький кружок $|z - z_0| \leq \varepsilon$ такой, чтобы он попал внутрь круга $|z| < r$. В этом кружке функция $|R(z)|$ ограничена сверху по теореме Вейерштрасса (пробел!), т.е. $|R(z)| \leq M$.
Шаг 4. Если $\mu = 0$, то $P(z_0) = 0$ и лемма доказана. Предположим, что $\mu > 0$ и попробуем прийти к противоречию. Обозначим $\arg P(z_0) = \varphi$, т.е. $P(z_0) = \mu e^{i\varphi}$. Пусть $b = se^{i\psi}$, где $s > 0$. Подберем точку $z = z_0 + \delta e^{i(\varphi - \psi + \pi)/k}$, где число δ выберем меньше ε и вообще устремим к нулю. Тогда

$$P(z) = \mu e^{i\varphi} + s\delta^k e^{i\varphi + i\pi} + \delta^{k+1} e^{i\alpha} R(z) = (\mu - s\delta^k)e^{i\varphi} + \delta^{k+1} e^{i\alpha} R(z),$$

где $\alpha = (\varphi - \psi + \pi)(1 - 1/k)$. Последнее слагаемое по модулю не превосходит $M\delta^{k+1}$, т.е.

$$|P(z)| \leq |(\mu - s\delta^k)e^{i\varphi}| + |\delta^{k+1} e^{i\alpha} R(z)| \leq \mu - s\delta^k + M\delta^{k+1} < \mu,$$

если $\delta < s/M$. Получается что функция $f(z) = |P(z)|$ принимает значения меньше, чем μ — противоречие (напомним, что μ — точная нижняя грань $f(z)$). Значит, все–таки, $\mu = 0$ и z_0 — корень многочлена P. □

Доказательство теоремы 17. Пусть $\deg P = n \geq 1$. Согласно лемме, найдется его корень c_1, т.е. $P(z) \equiv (z - c_1)P_1(z)$, причем P_1 — многочлен степени $n - 1$. Если $n - 1 = 0$, то теорема доказана. Иначе снова применим лемму и найдем корень c_2 многочлена P_1, т.е. $P(z) \equiv (z - c_1)(z - c_2)P_2(z)$, где $\deg P_2 = n - 2$. Продолжим наш процесс. На n–ом шаге придем к равенству

$$P(z) \equiv (z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_n)P_n(z),$$

где $\deg P_n = 0$, т.е. P_n — константа (ненулевая — иначе $P \equiv 0$). Мы нашли ровно n корней многочлена P и видим, что других корней нет. □

Лекция 8

14 Алгебраические структуры: группы, кольца, поля, алгебры

Мы с вами знаем к текущему моменту уже много различных алгебраических структур — матрицы, векторы, комплексные числа, многочлены. И структуры эти различаются своими свойствами — например, перемножение матриц некоммутативно, т.е. AB не обязано равняться BA. Перемножение многочленов коммутативно, но обратный элемент по умножению есть только для ненулевых констант. Перемножение векторов вообще не определено, хотя есть операция умножения на скаляр. Давайте попробуем разобраться в этом многообразии структур.

Определение 35. *Группой называется множество G с введенной на нем операцией $\circ$, обладающей следующими свойствами:*

1) *для любых a, $b \in G$ выполнено: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ — ассоциативность;*

2) *существует элемент $e \in G$ такой, что $a \circ e = e \circ a = a$ для любого $a \in G$ — существование нейтрального элемента;*

3) *для любого $a \in G$ существует $a^{-1} \in G$ такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ — существование обратного элемента.*

Группа называется абелевой (коммутативной), если для любых $a, b \in G$ выполнено: $a \circ b = b \circ a$.

Замечание. Из определения сразу вытекает единственность нейтрального и обратного элементов. Действительно, пусть e_1 и e_2 — два нейтральных элемента. Тогда по определению

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$

Аналогично, пусть a_1, a_2 — два обратных элемента к элементу a. Тогда

$$a_1 = a_1 \circ e = a_1 \circ (a \circ a_2) = (a_1 \circ a) \circ a_2 = e \circ a_2 = a_2.$$

Группы, в которых групповую операцию $\circ$ принято (в силу традиции) называть сложением, называют *аддитивными*. Группы, в которых $\circ$ — это умножение, называют *мультипликативными*.

Примеры.

1) Числовые множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ являются аддитивными абелевыми группами. Групповая операция — отлично известное нам сложение чисел. Роль нейтрального элемента выполняет 0, роль обратного элемента к числу a — противоположное число $(-a)$.

2) Числовые множества $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются мультипликативными абелевыми группами. Групповая операция — известное нам умножение. Роль нейтрального элемента выполняет число 1, роль обратного к числу a — число $\dfrac{1}{a}$.

3) Множество векторов любого векторного пространства (в частности, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$) является абелевой группой относительно операции сложения векторов.

4) Множество всех невырожденных квадратных матриц фиксированного размера $n \times n$ образует мультипликативную группу относительно операции умножения матриц. Роль нейтрального элемента выполняет единичная матрица E, роль обратного элемента к матрице A — обратная матрица A^{-1} (для невырожденных матриц она всегда существует и сама невырождена, т.к. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0$). Как мы знаем, умножение матриц не коммутативно, поэтому данная группа не является абелевой.

5) Множество всех биекций множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ является группой относительно операции композиции отображений. Действительно, если f и g — две биекции, то композиция $f(g(\cdot))$ тоже является биекцией. Ассоциативность очевидна (подумайте!), единичный элемент — это тождественное отображение. Наконец, у любой биекции существует обратное отображение — тоже биекция. Получившуюся группу называют *группой перестановок*, т.к. биекция на n числах — это как раз перестановка этих чисел. В отличие от всех предыдущих примеров, данная группа конечна — в ней $n!$ элементов. Эту группу обозначают S_n.

6) Множество всех комплексных корней n–ой степени из единицы, как мы знаем, имеет вид $\{\varepsilon_k = e^{2i\pi k/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Снабдим это множество операцией умножения комплексных чисел: $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_m$, где $m = k+l$, если $k+l < n$, а иначе $m = k+l-n$. Получим абелеву группу из n элементов. Единицей является $\varepsilon_0 = 1$, а обратным к ε_k является ε_{n-k}. Интересной ее особенностью является то, что $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$, т.е. все элементы группы порождаются степенями одного фиксированного элемента. Такие группы называют *циклическими*.

Определение 36. *Кольцом называется множество K с операциями сложения и умножения, обладающее следующими свойствами:*

1) *относительно операции сложения K есть абелева группа (она называется аддитивной группой кольца K);*

2) *для любых $a, b, c \in K$ выполнено: $a(b+c) = ab + ac$ и $(a+b)c = ac + bc$ — дистрибутивность умножения относительно сложения;*

Кольцо называется ассоциативным, если умножение в нем ассоциативно: $(ab)c = a(bc)$, и коммутативным, если умножение в нем коммутативно: $ab = ba$. Элемент 1 кольца называется единицей, если $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для любого $a \in K$. Если такой элемент есть, то K называют кольцом с единицей.

Замечание. Нейтральный элемент по сложению (обозначим его 0) определен единственным образом: если 0_1 и 0_2 — два таких элемента, то $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. Далее, для любого a из кольца $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Если обозначить $0 \cdot a = b$, то получаем $b = b + b$. Прибавляя к обеим частям элемент $-b$, получим $0 = b$. Итак, $0 \cdot a = 0$. Ааналогично проверяется, что $a \cdot 0 = 0$.

Замечание. Если в кольце существует единица, то она определена единственным образом (докажите сами).

Примеры.

1) Числовые множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ являются ассоциативными коммутативными кольцами с единицей относительно обычных операция сложения и умножения.

2) Множество $2\mathbb{Z}$ всех четных чисел является ассоциативным коммутативным кольцом без единицы.

3) Множество всех многочленов является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей относительно обычных операций сложения и умножения.

4) Множество всех векторов трехмерного пространства с операциями сложения и векторного умножения является неассоциативным некоммутативным кольцом без единицы (проверьте!).

5) Зафиксируем натуральное число n. Возьмем множество целых чисел и отождествим те из них, которые при целочисленном делении на n имеют одинаковый остаток. Другими словами, числа k и m отождествляются в точности тогда, когда $k - m$ кратно n. Например, если $n = 3$, то

$$0 = 3 = -3 = 6 = \ldots, \qquad 1 = 4 = -2 = 7 = -5 = \ldots, \qquad 2 = 5 = -1 = 8 = -4 = \ldots,$$

так что в нашей алгебраической структуре ровно три элемента $\{0, 1, 2\}$. Число n называют *модулем сравнения*, а равенства снабжают пометкой, что они справедливы *по модулю* n, например

$$12 = 0 \pmod 3.$$

«12 равно нулю по модулю 3» или «12 сравнимо с нулем по модулю 3». Снабдим структуру операциями обычного сложения и умножения. При этом результат договоримся приводить в диапазон от 0 до $n-1$ с помощью сравнения по модулю n. Например, для $n = 3$ таблицы сложения и умножения таковы[6]

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Поскольку для сложения и умножения выполнены все аксиомы кольца, а после взятия сравнения равенства сохраняются, то мы получим кольцо. Единственное, что все–таки требует проверки — существование обратного элемента по сложению. Легко видеть, что обратным к k является $n-k$. Построенное кольцо называют *кольцом вычетов по модулю* n и обозначают $\mathbb{Z}_n$. Очевидно, это кольцо ассоциативно, коммутативно и обладает единицей — число 1.

Определение 37. *Полем называется асоциативное коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый элемент, кроме нулевого, имеет обратный. Кольцо, состоящее из одного нуля, полем не считается.*

Примеры.

1) Числовые множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ являются полями. Кольцо $\mathbb{Z}$ полем не является: в нем обратимы только элементы ± 1.

2) Множество, состоящее из двух элементов: $\{0, 1\}$ является полем относительно операций сложения и умножения, если положить:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=0, \quad 0\cdot 0=0, \quad 0\cdot 1=0, \quad 1\cdot 0=0, \quad 1\cdot 1=1.$$

3) Кольцо матриц размера $n \times n$ полем не является — нет коммутативности по умножению, да и обратная матрица существует только у матриц с ненулевым определителем.

4) Кольцо многочленов не является полем — обратный элемент по умножению существует только для ненулевых констант.

5) Множество комплексных чисел является полем.

Заметим, что если a, b — элементы поля, то из соотношения $ab = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$. Действительно, если, например, $a \neq 0$, то

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b.$$

В кольце это свойство, вообще говоря, выполняться не обязано. Если оно не выполняется, то такие кольца называют кольцами *с делителями нуля*.

[6] обратите внимание, что в нашем кольце дважды два равно один, вопреки общеизвестной истине

Пример 39. *Рассмотрим кольцо всех функций на отрезке* $[0,1]$. *Оно является коммутативным и асссоциативным, однако в нем есть делители нуля. Действительно, рассмотрим функции*

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1/2,\\ 0, & 1/2\le x\le 1\end{cases}\qquad \text{и}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1/2,\\ 1, & 1/2\le x\le 1.\end{cases}$$

Очевидно, что обе они не являются нулевыми элементами кольца, однако их произведение — тождественно нулевая функция.

Бывают, однако, коммутативные ассоциативные кольца с единицей и без делителей нуля, но не поля. Например, кольцо многочленов.

Пример 40. *Кольцо вычетов* $\mathbb{Z}_n$ *является полем в точности тогда, когда* n *— простое число. Если* $n=pq$ *— составное, то появляются делители нуля, т.к.* $pq=0$.
Если n *— простое, то проведем следующие рассуждения. Возьмем произвольное* $k\in\{1,\,2,\dots,\,n-1\}$. *Составим все произведения*

$$\{kl \pmod n:\ l=0,\,1,\,2,\dots,\,n-1\}.$$

Заметим, что если $kl_1=kl_2 \pmod n$, *то* $k(l_1-l_2)=nm$ *для некоторого целого* m. *Правая часть равенства делится на* n, *значит и левая делится на* n. *Но* n *— простое, значит на* n *делится либо* k, *либо* l_1-l_2. *Первое невозможно, т.к.* $k\in\{1,\,2,\dots,\,n-1\}$. *Второе возможно только при* $l_1=l_2$, *т.к.* $l_1-l_2\in\{-n+1,\,-n+2,\dots,\,n-1\}$. *Итак, все наши произведения различны. Их* n *штук и они заключены в диапазоне от* 0 *до* $n-1$. *Значит, в списке этих произведений встречаются все целые числа от* 0 *до* $n-1$. *В частности,* $kl=1 \pmod n$ *для некоторого* l. *Мы доказали, что у каждого* $k\in\mathbb{Z}_n$ *есть обратный элемент по умножению. Значит, по определению, в случае простого* n *кольцо* $\mathbb{Z}_n$ *— поле.*

В лекции о векторных пространствах мы говорили, что эти пространства вводятся над полем $\mathbb{R}$. Теперь мы готовы пояснить эти слова. Наши векторные пространства конечномерны, т.е. фактически составлены из векторов $\vec{x}$ с n координатами. Если эти координаты — вещественные числа, то говорят, что задано линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (пространство $\mathbb{R}^n$). Если же координаты — элементы какого–то поля K, то получим линейное пространство над полем K. Такое изменение никак не скажется на результатах лекции 5 (мы там использовали только стандартные аксиомы поля). Надо только понимать, что все коэффициенты теперь — элементы поля K. В частности, если $K=\mathbb{C}$, говорят об n–мерном пространстве $\mathbb{C}^n$.

Определение 38. *Пусть* V *— линейное пространство над полем* K. *Пусть в* V *ввели операцию произведения векторов — отображение* $\times$, *которое каждой паре векторов ставит в соответствие вновь вектор из* V. *Если эта операция линейна по каждому своему аргументу, т.е.*

$$(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\times\vec{z}=\lambda(\vec{x}\times\vec{z})+\mu(\vec{y}\times\vec{z}),\qquad z\times(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda(\vec{z}\times\vec{x})+\mu(\vec{z}\times\vec{y}),\quad \forall\lambda,\,\mu\in K,\ \forall x,\,y,\,z\in V,$$

то говорят, что V *— алгебра над полем* K. *В зависимости от свойств операции* $\times$ *говорят об ассоциативных и/или коммутативных и/или с единицей алгебрах. Естественно, любая такая алгебра является ассоциативным и/или коммутативным и/или с единицей кольцом.*

Изобразим иерархию изученных структур.

- Квадратные невырожденные матрицы с операцией умножения образуют неабелеву группу.
- Группа комплексных корней из единицы абелева, но это не кольцо и не линейное пространство.
- Матрицы размера $n \times m$ при $n \neq m$ образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, но не являются алгеброй (мы не можем их перемножать).
- Пример неассоциативной некоммутативной алгебры без единицы: $\mathbb{R}^3$, где умножение — векторное произведение.
- Пример ассоциативной некоммутативной алгебры с единицей: квадратные матрицы.
- Четные числа образуют ассоциативное и коммутативное кольцо без единицы.
- Пример ассоциативной коммутативной алгебры с единицей, но не поля: многочлены.

Определение 39. *Поле K называется алгебраически замкнутым, если любой многочлен $P(x) = a_n x^{n-1} + \ldots + a_0$ переменной $x \in K$ с коэффициентами $a_j \in K$ (и значениями $P(x) \in K$) имеет нули. Иными словами, уравнение $P(x) = 0_K$ имеет решения в K.*

Пример 41. *Поле $\mathbb{Q}$ алгебраически незамкнуто. Например, многочлен x^2-2 имеет рациональные коэффициенты, но не имеет рациональных корней. Поле $\mathbb{R}$ тоже алгебраически незамкнуто: возьмите многочлен x^2+1. А вот поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.*

Такое замечательное свойство комплексных чисел порождает вопрос: а нельзя ли устроить «комплексные числа» в $\mathbb{R}^n$ размерности n больше двух?

Определение 40. *Кватернионами называют числа (векторы из $\mathbb{R}^4$) вида $q = a + bi + cj + dk$, где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$; i, j, k — три мнимые единицы. Сложение и умножение на вещественный скаляр кватернионов определяется обычным образом. Умножение проводится раскрытием скобок с учетом аксиом $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $ik = -j$, $ki = j$, $jk = i$, $kj = -i$. Множество кватернионов обозначают $\mathbb{H}$.*

Видно, что умножение кватернионов некоммутативно (хотя ассоциативность, дистрибутивность и существование единицы выполнены). Таким образом, $\mathbb{H}$ — некоммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Очень важно, однако, то, что у каждого кватерниона (кроме тождественно нулевого) существует обратный:

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \text{ поскольку } (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Кватернионы — пример ассоциативной некоммутативной алгебры с единицей и делением. Такие структуры называют *телами*.

Последний пример показывает, что наша схема с иерархией алгебраических структур не полна. Есть и другие очень важные структуры, не вошедшие в схему. Мы ничего не сказали про *полугруппы, моноиды, модули, алгебры Ли* и т.д. Впрочем, любой, кому это интересно, может почитать учебники из нашего списка литературы.

Пример списка экзаменационных вопросов

1) Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами и их свойства.

2) Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы. Матрицы элементарных преобразований.

3) Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы. Теорема о приведении матрицы к ступенчатому виду.

4) Теорема о равносильности систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях. Невырожденные верхнетреугольные матрицы.

5) Определители матриц второго и третьего порядков и их свойства. Определитель матрицы $n-$го порядка (определение и разложение по строке/столбцу).

6) Определитель матрицы $n-$го порядка (определение). Свойства определителей 1)–5).

7) Определитель матрицы $n-$го порядка (определение). Свойства определителей 6)–9).

8) Метод Крамера.

9) Обратная матрица. Определение. Способы вычисления обратной матрицы. Критерий существования обратной матрицы.

10) Обратная матрица. Определение. Матричная форма записи систем линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.

11) Ранг матрицы. Определение ранга матрицы. Свойства ранга 1)–3).

12) Ранг матрицы. Определение ранга матрицы. Свойство ранга 4).

13) Ранг матрицы. Определение ранга матрицы. Теорема о совпадении строчного и столбцового ранга.

14) Ранг матрицы. Определение ранга матрицы. Свойства ранга 5)–8). Теорема о порядке базисного минора.

15) Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.

16) Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость. Свойства.

17) Определение линейного пространства. Полная система и базис. Теорема о существовании базиса.

18) Определение линейного пространства. Размерность. Теорема о числе векторов базиса. Теорема о базисности линейно независимой системы, о базисности полной системы.

19) Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

20) Комплексные числа. Определение. Свойства. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Комплексно сопряженные числа.

21) Комплексные числа (определение). Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Свойства модулей и аргументов.

22) Комплексные числа (определение). Показательная форма записи комплексного числа. Извлечение корня $n-$й степени из комплексного числа.

23) Многочлены — определение и арифметические операции. Теорема о равенстве двух многочленов.

24) Теорема о делении многочленов. Теорема Безу.

25) Теорема об оценке сверху числа корней многочлена.

26) Основная теорема алгебры.

27) Группы — определение, примеры. Кольца — определение, примеры.

28) Поля — определение, примеры. Теорема о кольце вычетов. Алгебраическая замкнутость. Алгебры — определение и примеры.

Пример списка определений и формулировок

1) Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы.

2) Матрицы элементарных преобразований.

3) Определитель матрицы $n-$го порядка.

4) Свойства определителя.

5) Связь определителя квадратной матрицы и элементарных преобразований строк.

6) Алгебраическое дополнение к элементу матрицы. Минор порядка k.

7) Обратная матрица.

8) Способы вычисления обратной матрицы.

9) Свойства обратной матрицы.

10) Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.

11) Критерий существования обратной матрицы.

12) Линейная зависимость векторов. Ранг матрицы.

13) Свойства ранга матрицы.

14) Способы вычисления ранга матрицы.

15) Теорема Кронекера–Капелли.

16) Решение систем линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ с помощью обратной матрицы.

17) Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

18) Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

19) Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.

20) Теорема о структуре решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

21) Линейное пространство.

22) Примеры линейных пространств.

23) Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.

24) Свойства линейной зависимости.

25) Базис и размерность линейного пространства.

26) Комплексные числа — определение и арифметические операции.

27) Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

28) Возведение комплексного числа в степень. Извлечение корня n–й степени из комплексного числа.

29) Показательная форма записи комплексного числа.

30) Теорема Безу.

31) Теорема о разложении многочлена на множители.

32) Основная теорема алгебры многочленов.

33) Группа.

34) Кольцо.

35) Поле.

36) Алгебра.

Пример списка задач к экзамену

Уровень 1

1) Вычислите значение многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 2$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Вычислите

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & 10 & -2 & 18 \\ 1 & 6 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

3) Найдите число инверсий в перестановке (3, 6, 8, 2, 1, 4, 5, 7) на 8 элементах.

4) Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Решите матричное уравнение $XA + B = 2X$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6) Найдите все значения параметра a, при которых система векторов $(2,\, a-2,\, 1)^T$, $(3,\, 2,\, 5)^T$, $(1,\, -1,\, 2)^T$ линейно зависима.

7) В линейном пространстве многочленов степени не выше 2 найдите разложение многочлена $T(x) = 3x^2 - x - 2$ по базису $\{P,\, Q,\, R\}$, где

$$P(x) = 2x^2 + x + 3, \qquad Q(x) = x^2 - x + 1, \qquad R(x) = x^2 + 4x - 3.$$

8) Вычислите z^{25}, где $z = 1 + i\sqrt{3}$.

9) Какую линию на комплексной плоскости задает уравнение $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$?

10) При всех значениях $\lambda \in \mathbb{R}$ найдите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2-\lambda & \lambda-1 & 3 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

11) Представьте общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 12x_4 = 10 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

12) При каких значениях параметра λ система уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

совместна?

13) Система векторов $\{(3,\, 1,\, 1,\, 5)^T,\ (1,\, 2,\, 3,\, 4)^T\}$ образует фундаментальную систему решений некоторой однородной системы уравнений. Является ли вектор $(3,\, -4,\, -7,\, -2)^T$ решением этой системы?

14) При каких значениях параметров a и b многочлен $P(x) = ax^4 + bx^2 + 1$ делится на многочлен $Q(x) = x^2 + x + 1$ без остатка?

Уровень 2

1) Докажите, что уравнение $|z|^2 + \operatorname{Re}(Bz) + C = 0$, где $B \in \mathbb{C}$ — комплексный коэффициент, а C — вещественный коэффициент, причем $4C < |B|^2$, задает окружность в $\mathbb{C}$. Докажите, что любую окружность можно записать таким уравнением.

2) Пусть комплексное число ω удовлетворяет равенству $\omega^n = 1$ для некоторого натурального $n \geq 2$. Докажите формулу

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

3) Дан многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ с комплексными коэффициентами. Докажите, что этот многочлен принимает при вещественных z только вещественные значения $\Longleftrightarrow$ все a_j вещественны.

4) Докажите, что для любого многочлена $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ степени $n \geq 1$ с вещественными коэффициентами выполнено тождество $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Выведите отсюда, что любой такой многочлен раскладывается в произведение скобок вида $(z - a_j)$ и/или $(z^2 - b_j)$ с вещественными a_j и b_j.

5) Квадратная матрица A называется *кососимметрической*, если $a_{ji} = -a_{ij}$ для всех i, j. Докажите, что любая кососимметрическая матрица нечетного размера имеет нулевой определитель.

6) Пусть S_n — группа перестановок на $\{1, \ldots, n\}$ с операцией произведения (композиции) перестановок. Элемент t этой группы называется *транспозицией*, если перестановка t меняет местами числа i и j для некоторых двух $i \neq j$, а все остальные числа оставляет на своих местах. Докажите, что любую нетождественную перестановку из S_n можно записать в виде произведения конечного числа транспозиций.

7) Определите четность перестановки $(1,\, n,\, 2,\, n-1, \ldots)$ на $n \geq 1$ элементах в зависимости от n.

8) Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ дана конечная система векторов S. Докажите, что размерность линейного пространства $V = \operatorname{Lin} S$ не превосходит числа векторов в системе S. Что можно сказать о $\dim V$ в случае линейно независимости системы S?

9) Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ дана конечная система векторов S. Линейное пространство $V = \operatorname{Lin} S$ называется *линейным подпространством* в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если U и V — два таких подпространства, то их пересечение $U \cap V$ и сумма $U + V = \{u + v : \ u \in U,\, v \in V\}$ также являются линейными подпространствами.

10) Найдите базис пересечения подпространств пространства $\mathbb{R}^3$, натянутых на системы векторов

$$X_1 = \operatorname{Lin}\{a_1 = (2,\, 1,\, 0)^T,\ a_2 = (1,\, 2,\, 3)^T,\ a_3 = (-5,\, -2,\, 1)^T\}$$

и

$$X_2 = \operatorname{Lin}\{b_1 = (1,\, 1,\, 2)^T,\ b_2 = (-1,\, 3,\, 0)^T,\ b_3 = (2,\, 0,\, 3)^T\}.$$

11) Проверьте, образуют ли векторы $(1, 2, -2, -1)^T$ и $(3, 1, -1, -3)^T$ фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

12) Докажите, что если квадратная $n \times n$ матрица M коммутирует с любой матрицей размера $n \times n$, то $M = \lambda E$ с некоторым коэффициентом λ.

13) Пусть A — матрица размера $n \times m$, а B — невырожденная матрица размера $n \times n$. Докажите, что $\operatorname{rang}(BA) = \operatorname{rang} A$.

14) Докажите, что

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nc + \frac{n(n-1)}{2} ab \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1, \end{pmatrix}$$

где a, b, c — произвольные вещественные, а n — произвольное натуральное.

15) Пусть $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1, \ldots,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ldots$ — *числа Фибоначчи*. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\lambda_2/5 & 1/5 \\ -\lambda_1\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1/5 \\ \lambda_1\sqrt{5} & -\lambda_2/5 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Проверьте, что $A = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot B$. Докажите, что $A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$ для любого натурального n. Выведите отсюда явное выражение для чисел f_n.

16) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные числа. Определитель

$$W = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вандермонда*. Докажите, что W равен произведению всех разностей $a_j - a_i$ с номерами $1 \le i < j \le n$, т.е. $W = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.

17) Пусть $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ размера $n \times n$ составлена из матриц B размера $m \times m$, C размера $m \times k$ и D размера $k \times k$, где $n = m + k$. Докажите, что $\det A = \det B \cdot \det D$.

18) Матрица A называется *трехдиагональной*, если все ее элементы $a_{ij} = 0$ при $|j - i| \ge 2$. Пусть у трехдиагональной матрицы A размера $n \times n$ на главной диагонали стоят числа 2, т.е. все $a_{ii} = 2$, на на остальных диагоналях стоят -1, т.е. все $a_{i\,i+1} = a_{i-1,\,i} = -1$. Докажите, что $\det A = n + 1$.

19) Докажите, что группа перестановок S_3 не является циклической.

20) Докажите, что множество аффинных отображений $f(x) = ax + b$, $a \ne 0$, на прямой $\mathbb{R}$ образует неабелеву группу относительно операции композиции. Покажите, что условие $a \ne 0$ существенно.

21) Элемент кольца $x \ne 0$ называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна нулю: $x^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}_{2020}$ нильпотентные элементы есть, а в кольце $\mathbb{Z}_{2021}$ — нет.

План семинаров

По задачнику А.И.Кострикина [3]

Лекция 1. Семинар 1. 17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.5, 17.6, 17.7, 17.14, 17.15, 17.16, 17.20

Лекция 1. Семинар 2. 8.1, 8.2, 8.3, 8.7, 8.8, 8.25

Лекция 2. Семинар 3. 9.1, 9.2, 3.5, 3.6, 10.1, 10.2, 10.4, 11.1, 11.2, 11.3

Лекция 2. Семинар 4. 12.1, 12.2, 12.3, 13.1, 13.2, 15.1

Лекция 3. Семинар 5. 18.1, 18.2, 18.3, 18.9, 18.10, 18.11

Лекция 3. Семинар 6. 18.8, 18.20, 18.21, 16.4, 8.6

Лекция 4. Семинар 7. 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.8, 7.9, 8.4

Лекция 4. Семинар 8. Контрольная работа 1.

Лекция 5. Семинар 9. 6.1, 6.2, 6.3, 6.5, 6.6, 6.7, 6.9, 6.10, 6.12

Лекция 5. Семинар 10. 35.1, 35.3, 35.7, 35.11, 35.14, 35.16

Лекция 6. Семинар 11. 20.1, 20.2, 20.3, 20.4, 20.5, 21.1, 21.2, 21.9, 21.11

Лекция 6. Семинар 12. 22.2, 22.3, 22.4, 22.7, 22.9, 22.17

Лекция 7. Семинар 13. 25.1, 25.2, 25.3, 25.5, 25.8, 26.1, 26.2, 26.3

Лекция 7. Семинар 14. 27.1, 27.2, 27.3, 27.4, 27.8

Лекция 8. Семинар 15. 55.1, 55.5, 55.6, 63.1, 63.2, 63.3, 66.1

Лекция 8. Семинар 16. Контрольная работа 2.

Список литературы

[1] Э. Б. Винберг *Курс алгебры*, Москва, Изд-во «Факториал Пресс», 2001.

[2] А. И. Кострикин *Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры*, Москва, Физ.-Мат. Лит., 2000.

[3] А. И. Кострикин (под редакцией) и др. *Сборник задач по алгебре*, Москва, Физ.-Мат. Лит., 2001.