Экзамен по предмету "Прикладная математика и информатика" для поступающих в магистратуру по направлению "Прикладная математика и информатика" Факультет космических исследований МГУ имени М.В.Ломоносова

27 июня 2020 года. Вариант 1.

Во всех задачах нужно привести полное решение.

Задача 1. *а) Найдите значение интеграла*

$$\int_0^1 \left(e^{-x} + (x-1)\cos x\right)\, dx.$$

б) Докажите, что это значение положительно.
в) Укажите все значения параметра $p > 0$ при которых интеграл

$$\int_0^1 \frac{e^{-x} + (x-1)\cos x}{x^p}\, dx$$

сходится (имеет конечное значение).

Задача 2. *Плоскость α перпендикулярна вектору $\vec{n} = \{2, -2, 1\}$ и проходит через точку $A(3, 2, 0)$. Найдите расстояние от плоскости α до точки $B(-1, 7, 5)$.*

Задача 3. *Информация, полученная принимающим устройством, состоит из двух натуральных чисел A и B. Из-за технического сбоя при передаче информации одна или несколько цифр числа A могут быть записаны неверно. Известно, что число A должно делиться на B без остатка. Необходимо исправить минимально возможное количество цифр в числе A (не меняя самого количества цифр) так, чтобы исправленное число делилось на B. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, решающую эту задачу. Входные данные: два натуральных числа A и B, меньших* 1000. *Выходные данные: исправленная пара – два натуральных числа, первое из которых делится нацело на второе. Если ответа не существует, выведите* -1.

Примеры.

Вход: 123 10
Выход: 120 10

Вход: 123 141
Выход: 423 141

Вход: 10 100
Выход: -1

Задача 4. *Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ состоят из чисел 0 и 1 и определяются последовательностью $\{z_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ по формулам*

$$x_n = (x_{n-1} \oplus (y_{n-1} \vee z_n)), \quad y_n = ((x_{n-1} \wedge y_{n-1}) \Rightarrow z_n)$$

(здесь $\vee$ — дизъюнкция, $\wedge$ — конъюнкция, $\oplus$ — логическая сумма, $\Rightarrow$ — логическое следствие).
а) Найдите x_4 и y_4, если $x_0 = y_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$, $z_4 = 0$.
б) Докажите, что вне зависимости от начальной пары x_0, y_0, вне зависимости от последовательности z_n, пара $x_n = 1$, $y_n = 0$ при $n \geq 1$ появиться не сможет.

Задача 5. *Найдите классическое решение задачи Коши для волнового уравнения*

$$u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, \qquad u(x,0) = 1,\ u_t(x,0) = 1, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$