

Экзамен по предмету "Математика"  
для поступающих в магистратуру по направлению  
"Механика и математическое моделирование"  
Факультет космических исследований МГУ имени  
М.В.Ломоносова

27 июня 2020 года. Вариант 1.

**Во всех задачах нужно привести полное решение.**

**Задача 1.** Найдите периметр (длину границы) плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y = \sqrt{5 - 2x - x^2} \quad \text{и} \quad y = 0.$$

**Задача 2.** Даны точки  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(3, 0, 3)$ ,  $C(5, 4, 1)$  и  $D(-4, 1, -2)$ .

- а) Докажите, что эти четыре точки лежат в одной плоскости.
- б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
- в) Найдите площадь четырехугольника с вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

**Задача 3.** Траектория движения материальной точки задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad \text{Известно, что}$$

$$x'(t) + 2y'(t) = 1, \quad (x'(t))^2 + 12(y'(t))^2 = 1, \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Найдите  $x(4)$  и  $y(4)$ , если  $y'(t) > 0$  всюду при  $t \in [0, 4]$ .

**Задача 4.** Случайные величины  $a$  и  $b$  равномерно распределены на отрезке  $[-1, 1]$ . Какова вероятность того, что уравнение  $x^2 + 2ax + b = 0$  имеет два различных вещественных корня?

**Задача 5.** Дважды дифференцируемая функция  $u(x, y)$ ,  $x, y > 0$ , удовлетворяет уравнению

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

а) Сделайте в уравнении замену переменных

$$t = xy, \quad s = \frac{x}{y}.$$

Запишите полученное уравнение.

б) Найдите общее решение исходного уравнения.