

Задачи для подготовки к первой контрольной работе

Задача 1. В гадеробе стоят 8 пар ботинок, все пары разного размера. Сколькими способами можно выбрать один левый и один правый ботинок так, чтобы они оказались разного размера?

Задача 2. Готовясь к походу, солдат выбирает шапку, шашку и кинжал. У него есть 5 шапок (все разные), 6 шашек (все разные) и 7 кинжалов (тоже все разные). Сколькими способами он может сделать свой выбор?

Задача 3. Найдите сумму всех чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5.

Задача 4. Сколькими способами на шахматной доске можно расположить 8 ладей так, чтобы ни одна ладья не стояла под боем (ладья бьет поля по горизонтали и вертикали, все ладьи одинаковы)?

Задача 5. Сколько нечетных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Задача 6. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 белых пешек (пешки нельзя ставить на горизонтали 1 и 8, все пешки одинаковы)?

Задача 7. Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно составить из карточек 'б', 'и', 'е', 'к', 'ц', 'и', 'я'?

Задача 8. На плоскости проведены $n \geq 2$ прямых так, что никакие три из них не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны друг другу. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

Задача 9. На плоскости отмечены $n \geq 3$ различных точек. Сколько треугольников с вершинами в этих точках можно нарисовать?

Задача 10. У тренера есть в распоряжении 12 лыжников. Для первого старта нужно выбрать 5 из них (без учета порядка), для второго тоже 5 (тоже без учета порядка), но так, чтобы вторая пятерка не совпадала с первой (это не отменяет того, что какие-то лыжники могут стартовать и в первый, и во второй раз). Сколькими способами можно произвести выбор?

Задача 11. Пять конфет и три ореха надо раздать двум детям (по 4 предмета каждому) так, чтобы каждому достался хотя бы один орех. Сколькими способами это можно сделать (все конфеты различны, а орехи неразличимы)?

Задача 12. Сколькими способами можно извлечь из полной колоды (в ней 52 карты: четыре масти, причем в каждой туз, двойка, тройка, четверка, пятерка, шестерка, семерка, восьмерка, девятка, десятка, валет, дама, король) 8 карт так, чтобы в выборке были представлены все масти (порядок в выборке не важен)?

Задача 13. У Аристотеля 25 книг (все книги различны), а у Платона 20 книг (тоже все разные). Сколькими способами они могут обмениваться парами книг (Аристотель дает Платону две своих книги, а Платон Аристотелю две своих)?

Задача 14. В корзинке лежат 15 яблок (они между собой неразличимы), 10 груш (тоже неразличимы) и 8 бананов (тоже неразличимы). Для фруктового салата надо взять 6 фруктов. Сколько различных салатов можно приготовить?

Задача 15. Сколькими способами могут выпасть 3 одинаковые (неразличимые) игральные кости?

Задача 16. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы трех неотрицательных чисел (порядок слагаемых в сумме считаем важным)?

Задача 17. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы трех натуральных чисел (порядок слагаемых в сумме считаем важным)?

Задача 18. Сколькими способами можно разделить между тремя девушками 10 роз, 15 нарцисов и 20 тюльпанов (цветы одного вида между собой неразличимы, все девушки различны)?

Задача 19. Сколькими способами можно разделить между тремя девушками 45 различных цветов, так чтобы каждой досталось 15 цветов (все девушки различны)?

Задача 20. Сколькими способами можно разделить на три букета по 15 цветков в каждом 45 различных цветов?

Задача 21. Есть 10 девушек. Сколько различных хороводов в форме круга они могут образовать (в хороводе участвуют все девушки)?

Задача 22. Есть 10 драгоценных камней (все они различны). Сколько различных ожерелей можно из них составить (все камни надо использовать)?

Задача 23. В институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий язык и 23 — оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языка?

Задача 24. В институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий язык, 20 — французский язык, английский и французский — 12 человек, немецкий и французский — 11 человек, английский и немецкий — 23 человека и 5 человек знают три языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого, ни французского языка?

Задача 25. В классе учатся 45 школьников, из них 25 мальчиков. Учатся без троек 30 школьников, из них 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, из них 18 мальчиков. И занимаются спортом, и учатся без троек 17 учеников, причем из них 15 мальчиков. Докажите, что такого класса не существует.

Задача 26. Сколько чисел от 1 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Задача 27. На прогулку поехали 92 человека. Из них 47 взяли с собой бутерброды с колбасой, 38 — с сыром, 42 — с ветчиной, 28 — с сыром и колбасой, 31 — с колбасой и ветчиной, 26 — с сыром и ветчиной, а 25 — с сыром, колбасой и ветчиной. Сколько человек поехали без бутербродов?

Задача 28. На конференции необходимо заслушать 9 докладов, 4 из которых пленарные, а 5 секционные. Сколькими способами можно составить расписание конференции, при условии, что никакие два пленарных доклада не идут подряд (все доклады считаем различными)?

Задача 29. Сколькими способами можно переставить буквы слова “МОЛОКО” так, чтобы три буквы ‘О’ не шли подряд?

Задача 30. 4 футболиста, 3 баскетболиста и 2 гандболиста хотят сфотографироваться, стоя в один ряд, причем на фотографии футболисты хотят стоять рядом. Сколькими способами могут сфотографироваться наши спортсмены (всех людей считаем различными)?

Задача 31. Из плиток размера 1×1 (плитки неразличимы) надо построить лестницу высотой 5 и длиной 9. Сколько таких лестниц можно построить при условии, что все ступеньки должны иметь высоту 1?

Задача 32. Сколько существует возрастающих последовательностей из 5 цифр?

Задача 33. Сколькими способами можно расставить n единиц и m нулей так, чтобы никакие два нуля не стояли рядом?

Задача 34. На полке 12 мест. Сколькими способами можно поставить на полку 5 книг (все книги различны) так, чтобы никакие две книги не стояли рядом?

Задача 35. 12 гостей сидят за круглым столом (все люди разные; внимание, на семинаре мы разбирали случай, когда люди неразличимы). Сколькими способами можно выбрать 5 из них так, чтобы среди выбранных не было соседей?

Задача 36. Сколько шестизначных чисел составлены из 3 различных четных и 3 различных нечетных цифр?

Задача 37. В азбуке из двух букв буква a встречается n раз, а буква b — m раз. Сколько слов можно составить из этой азбуки, если использовать все буквы (буквы a между собой неразличимы; буквы b между собой тоже неразличимы)?

Задача 38. Сколько шестизначных чисел составлены из 3 четных и 3 нечетных цифр?

Задача 39. В купе два дивана по 5 мест на каждом, один по ходу, а другой против хода поезда. Из 10 пассажиров четверо хотят сидеть по ходу, трое — против, а остальным это безразлично. Сколькими способами могут разместиться пассажиры (места на диванах считаем различными)?

Задача 40. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду 5 человек. Сколькими способами можно набрать команду так, чтобы в нее вошли не более 3 юношей?

Задача 41. Сколькими способами можно извлечь из колоды в 52 карты 5 карт так, чтобы они были одной масти и шли подряд? Они просто были одной масти? Они просто шли подряд?

Задача 42. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12'335'233?

Задача 43. Найдите суммы

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^n n C_n^n = ?$$

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = ?$$

$$C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = ?$$

Задача 44. На балу присутствуют 50 кавалеров и 40 дам. В танце участвуют 12 пар (порядок пар не важен, все люди различны). Сколькими способами можно произвести выбор?