5 — 6 КЛАССЫ

Задача 1. Все обитатели планеты N имеют либо три, либо четыре глаза. Трехглазые на любой вопрос отвечают правдиво, четырехглазые всегда лгут. Высадившийся на планете экипаж два раза задал трехглазому жителю планеты N один и тот же вопрос. Могло ли так получиться, что экипаж получил два разных ответа? Если могло, то приведите пример вопроса. Если нет, то объясните почему.

Ответ. Да, такое возможно. Например: «Мы в первый раз задаем тебе вопрос?».

Критерии проверки. 10 баллов – ответ верный, полностью обоснован.
8 баллов – рассуждение верное, нет примера.
5 баллов – ошибки в рассуждениях, ответ неверный.

Задача 2. На планете N планируется установить высокочастотные (ВД) и низкочастотные (НД) сейсмические датчики. Датчики должны быть установлены так, что на расстоянии ровно 2 км от каждого ВД должны находиться как минимум два НД. Известно, что было установлено четыре НД. Каким могло быть наибольшее количество ВД при таких условиях? Нарисуйте расположения датчиков.

Решение. Фактически, надо так расположить 4 точки на плоскости, чтобы можно было провести как можно больше окружностей радиуса 2, на каждой из которой лежали бы как минимум 2 точки. Обозначим наши точки A, B, C и D. Тогда окружности могли бы пройти через пары AB, AC, AD, BC, BD и CD — максимум двенадцать окружностей (через пару точек на плоскости можно провести максимум две окружности). Для того, чтобы через пару точек проходили две окружности радиуса два необходимо и достаточно, чтобы расстояние между точками было меньше 4 (меньше диаметра окружности). Тогда подойдет такое расположение: $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$.

Ответ: Например, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$.

Критерии проверки. 20 баллов – ответ верный, полностью обоснован.
7 баллов – предложен не оптимальный вариант расстановки датчиков.

Задача 3. В коллекции учащегося Школы юного исследователя космоса есть открытки с датами 10 различных пусков с космодрома «Восточный» (на каждой открытке ровно одна дата). Если случайно выбрать 10 открыток, то среди них найдутся 5 открыток с различными датами. Какое наибольшее количество открыток может быть в коллекции?

Решение. Пусть в коллекции ровно n_1 открыток с первой датой, ровно n_2 — со второй, и так далее (по условию, все эти числа отличны от нуля). Для удобства занумеруем даты так, что $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_{10}$. Заметим, что $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 < 10$. Действительно, если $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq 10$, то взяв именно эти 10 открыток, получили бы набор из 10 открыток с 4 различными датами, что противоречит условию. Отсюда, в частности, следует, что $n_4 < 3$. Иначе бы получили $n_1 \geq n_4 \geq 3$, аналогично $n_2 \geq 3$, $n_3 \geq 3$ и тогда

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq 12$. Для $n_4 = 2$ можно предложить либо $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$, либо $n_1 = 3$, а $n_2 = n_3 = n_4 = 2$. Поскольку нам надо составить наибольшую по числу открыток коллекцию, то выбираем второй вариант. Из тех же соображений возьмем тогда $n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = n_{10}$ максимально возможными, т.е. равными 2.

Ответ. Максимально возможное число открыток в коллекции 21 — девять видов в двух экземплярах и один в трех.

Критерии проверки. 15 баллов – ответ верный, полностью обоснован.
10 баллов – есть разумные идеи, ответ неверный.
5 баллов –грубые ошибки в рассуждениях, ответ неверный.
2 балла – есть попытка решения, ответ не получен.

Задача 4. Клетки таблицы 5 на 5 должны быть раскрашены в разные цвета так, что:
а) клеток одного цвета должно быть как можно меньше;
б) среди любых трех соседних клеток должны быть хотя бы две клетки одного цвета (под тремя соседними клетками понимаем любой набор из трех клеток, в котором одна из клеток граничит с двумя другими по сторонам, т. е. три клетки, расположенные полоской или уголком).
Каким можно раскрасить таблицу?

Решение. Нам необходимо раскрасить клетки таблицы в несколько различных цветов, соблюдая условие пункта б). При этом, клеток одинакового цвета должно быть как можно меньше: если обозначить число клеток первого цвета n_1, второго — n_2 и т.д., то необходимо добиться как можно меньшего числа m, для которого все $n_j \leq m$. Иными словами, необходимо минимизировать величину $\max\{n_1, n_2, \ldots\}$ (поиск наименьшего возможного числа m в условии задачи не требуется). Пусть вначале число цветов равно двум. Тогда $n_1 + n_2 = 25$, а значит, $\max\{n_1, n_2\} \geq 13$. Равенство достигается, например, для шахматной раскраски. Пусть теперь число цветов равно трем. Тогда $n_1 + n_2 + n_3 = 25$, так что $\max\{n_1, n_2, n_3\} \geq 9$. Равенство достигается например при раскраске, приведенной на рисунке.

1	1	2	2	3
1	2	2	3	3
2	2	3	3	1
2	3	3	1	1
3	3	1	1	2

Можно показать, что дальнейшее увеличение числа цветов не снижает числа m, но это в задачу не входит.

Критерии проверки. 20 баллов – предложен вариант с 9 клетками одного цвета.
12 баллов – предложен вариант с 10 клетками одного цвета.
10 баллов – из двух предложенных вариантов один не оптимальный (более 10 клеток),

другой не удовлетворяет условию.
7 баллов – предложен вариант с более, чем 10 клетками.
5 баллов –неверно понято условие, предложен некоторый вариант.
2 балла – есть попытка решения.

Задача 5. На одной из планет земной группы было решено проложить тоннель под горным хребтом. Для простоты будем считать, что начальная и конечная точки тоннеля находятся на нулевой высоте «над уровнем моря». Строители проложили тоннель по прямой линии, корректируя свои действия с помощью лазерного луча. Однако после окончания работ было замечено, что подземные воды, попадающие в тоннель, скапливаются в его центре.
а). Объясните, почему так произошло.
б). Как следует изменить форму тоннеля, чтобы нейтрализовать этот эффект? Радиус планеты примите равным 3400 км, длина тоннеля —- 2 км.

Решение. а). Проведем сечение планеты, содержащее тоннель и центр планеты. Получим окружность (поверхность планеты) и хорду этой окружности (тоннель). Расстояние от центра планеты до середины хорды меньше, чем до концов — соответственно, вода стекает к центру тоннеля.
б.) Необходимо изменить форму тоннеля, проложив его не по прямой, а по дуге большого круга. Вычислим, какую коррекцию надо провести в центре тоннеля. Обозначим его концы через A и B, середину через C, а центр планеты через O. Тогда $OA = OB = 3400$ км, $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{3400^2 - 1} \approx 3399,99985$ км, т. е. коррекция составляет всего 15 см.

Ответ. Достаточно изменить форму дна тоннеля, подняв его в окрестности центра тоннеля на 15 см.

Критерии проверки. 15 баллов – есть верное объяснение явления и предложения по устранению эффекта.
10 баллов – нет удовлетворительного объяснения природы явления, есть предложения по его устранению.
5 баллов – неверно понято условие.
2 балла – только попытка решения.

Задача 6. Таблицу, состоящую из N строк и 8 столбцов, нужно заполнить различными натуральными числами так, чтобы модуль разности чисел, расположенных в соседних ячейках, не превосходил 5. Какое наибольшее количество строк может быть в такой таблице?

Решение. В таблице могут быть пять строк: заполним первую числами 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 (слева направо); заполним вторую строку 2, 7, . . . , 37; заполним третью числами от 3 до 38; четвертую — от 4 до 39; пятую — от 5 до 40. Докажем, что более пяти строк в таблице быть не может. Действительно, если строк ≥ 6, то размах чисел в таблице заведомо больше 12. Выберем любое число a такое, что в таблице есть, как минимум, шесть чисел меньших a и, как минимум, шесть чисел больших a. Разделим всю таблицу на две области: числа меньшие a и числа больше либо равные a. Пары ячеек, которые содержат числа из разных областей назовем пограничными. Граница может проходить либо по горизонтали, либо по вертикали и содержит тогда не менее шести пограничных ячеек. Но это невозможно, так как число в пограничной ячейке не может отличаться от a более, чем на 5.

Ответ. Пять строк.

Критерии проверки. 20 баллов – ответ верный, обоснован. 18 баллов – ответ верный, пробелы в обосновании.
15 баллов – приведен верный пример, нет обоснования, что больше нельзя.
7 баллов – приведен неверный пример *или* ответ верный, но нет ни примера, ни доказательства.
2 балла – ответ неверный, решение практически отсутствует.

7 — 8 КЛАССЫ

Задача 1. Известно, что числа a, b, c все отличны от нуля и таковы, что прямые $y = ax + bc$, $y = bx + ac$ и $y = cx + ab$ имеют общую точку. Докажите, что по крайней мере две из этих трех прямых совпадают.

Решение. Общая точка (пусть ее координаты равны (x, y)) должна лежать на всех трех прямых, т. е. удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} y = ax + bc, \\ y = bx + ac, \\ y = cx + ab. \end{cases}$$

Вычитая из второго первое, получим $(b-a)x + (a-b)c = 0$, откуда либо $b = a$, либо $x = c$. Вычитая из третьего второе, получим $(c-b)x + (b-c)a = 0$, откуда либо $c = b$, либо $x = a$. Итак, либо $a = b$ (совпадают первые две прямые), либо $b = c$ (совпадают вторая и третья), либо $x = c = a$ (совпадают первая и третья).

Критерии проверки. 10 баллов — верное решение;
7 баллов — неполное обоснование;
4 балла — есть разумные продвижения *или* все прямые совпали;
2 балла — есть только попытка решения.

Задача 2. На одной из планет земной группы было решено проложить тоннель под горным хребтом. Для простоты будем считать, что начальная и конечная точки тоннеля находятся на нулевой высоте «над уровнем моря». Строители проложили тоннель по прямой линии, корректируя свои действия с помощью лазерного луча. Однако после окончания работ было замечено, что подземные воды, попадающие в тоннель, скапливаются в его центре.
а). Объясните, почему так произошло.
б). Как следует изменить форму тоннеля, чтобы нейтрализовать этот эффект? Радиус планеты примите равным 3400 км, длина тоннеля —- 2 км.

Решение. а). Проведем сечение планеты, содержащее тоннель и центр планеты. Получим окружность (поверхность планеты) и хорду этой окружности (тоннель). Расстояние от центра планеты до середины хорды меньше, чем до концов — соответственно, вода стекает к центру тоннеля.
б.) Необходимо изменить форму тоннеля, проложив его не по прямой, а по дуге большого круга. Вычислим, какую коррекцию надо провести в центре тоннеля. Обозначим его концы через A и B, середину через C, а центр планеты через O. Тогда $OA = OB = 3400$ км, $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{3400^2 - 1} \approx 3399,99985$ км, т. е. коррекция составляет всего 15 см.

Ответ. Достаточно изменить форму дна тоннеля, подняв его в окрестности центра тоннеля на 15 см.

Критерии проверки. 15 баллов — полное решение;
12 баллов — близкое, но неверное число в пункте б);

10 баллов — только качественные объяснения без подсчетов;
7 баллов — не вполне верное объяснение в пункте а) и нет подсчетов;
5 баллов — решен только пункт а);
2 балла — есть только попытка решения.

Задача 3. Планета, обнаруженная космической экспедицией, полностью покрыта водой, а сверху —- слоем льда. Однако в сплошном слое льда встречаются полыньи. Для нужд экспедиции сверху был спущен контейнер, представляющий собой стальной полый куб с ребром 4 метра и толщиной стенок 4 см. Внутри куба помещен полезный груз массой 34 тонны. Из-за ошибки оператора груз приземлился не на сплошной массив льда, а на отдельно плавающую льдину. Льдина представляет собой круглый диск радиусом 6 метров и толщиной 5 метров. Утонет ли контейнер, если он приземлится точно в центре льдины? Не в центре? Плотности веществ примите равными: сталь — 7900 кг/м^3, лед — 900 кг/м^3, вода — 1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.

Решение. Объем контейнера $V = 4^3 = 64\,\text{м}^3$. Масса контейнера равна 34000 кг плюс масса стенок. Чтобы найти массу стенок, найдем вначале объем внутренней части контейнера. Учитывая, толщину стенок, получим куб размера $4 - 2 \cdot 0,04 = 3,92$ м. Тогда $V_0 = 3,92^3 = 60,236288\,\text{м}^3$. Тогда масса стенок равна $m = \rho(V - V_0) = 7900 \cdot 3,763712 \approx 29733,3$ кг. Итого, общая масса контейнера с грузом равна $M = 63733,3$ кг. Средняя плотность контейнера с грузом равна $\rho = M/V = 995,83$ кг/м^3.

Если бы контейнер попал в воду (т. е. льдины бы просто не было), то он бы не утонул — его средняя плотность меньше плотности воды. Тем более, он не утонет, если окажется на льдине, так как плотность льда еще меньше. Если контейнер приземлился точно в центр льдины, то он притопит эту льдину в воду, но не утонет. Если контейнер окажется не в центре льдины, то льдина накренится, контейнер, скорее всего, по ней соскользнет в воду, но, опять же не утонет. Правда, при соскальзывании, он скорее всего, перевернет льдину, которая накроет плавающий в воде контейнер, как крышка.

Ответ. Контейнер в любом случае не утонет.

Критерии проверки. 15 баллов — полное решение;
12 баллов — пункт а) решен, а в пункте б) только идея;
10 баллов — неверный обсчет стенок *или* арифметические ошибки;
8 баллов — неверный обсчет стенок *и* арифметические ошибки;
6 баллов — множественные ошибки;
5 баллов — неверная физика *или* не доведено до ответа;
2 балла — есть только попытка решения.

Задача 4. Номер билетика на прогулку на луноходе состоит из шести цифр. Назовем

билетик «очень счастливым», если сумма цифр, стоящих на четных местах, совпадает с суммой цифр, стоящих на нечетных местах. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, проверяющую, является ли данный билетик «очень счастливым». Программа должна выводить YES, если это так, и NO в противном случае.
Пример.
Ввод:
123475
Вывод:
YES

Решение. Вариант программы на Python

```
a=int(input())
b=(a % 10) + (a % 1000 // 100) + (a % 100000 // 10000)
c=(a % 100 // 10) + (a % 10000 // 1000) + (a // 100000)
if (b==c): print("Yes")
else: print("No")
```

Критерии проверки. 20 баллов — верное решение;
15 баллов — небольшие синтаксические ошибки;
10 баллов — верная идея, синтаксические ошибки;
5 баллов — верная идея, грубые синтаксические ошибки;
2 балла — верная идея, нет программы.

Задача 5. На планете N планируется установить высокочастотные (ВД) и низкочастотные (НД) сейсмические датчики. Датчики должны быть установлены так, что на расстоянии ровно 2 км от каждого ВД должны находиться как минимум два НД. Известно, что было установлено четыре НД. Каким могло быть наибольшее количество ВД при таких условиях? Нарисуйте расположения датчиков.

Решение. Фактически, надо так расположить 4 точки на плоскости, чтобы можно было провести как можно больше окружностей радиуса 2, на каждой из которой лежали бы как минимум 2 точки. Обозначим наши точки A, B, C и D. Тогда окружности могли бы пройти через пары AB, AC, AD, BC, BD и CD — максимум двенадцать окружностей (через пару точек на плоскости можно провести максимум две окружности). Для того, чтобы через пару точек проходили две окружности радиуса два необходимо и достаточно, чтобы расстояние между точками было меньше 4 (меньше диаметра окружности). Тогда подойдет такое расположение: $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$.

Ответ: Например, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$.

Критерии проверки. 15 баллов — верное решение;
12 баллов — верная идея, но нет численной реализации;
5 баллов — неверный вариант *или* неверно понято условие;
2 балла — только попытка решения.

Задача 6. Искусственный спутник Луны выведен на круговую орбиту над ее экватором. В одной из точек экватора в лунной коре находится порода повышенной плотности — маскон (массовый концентрат).
а). Будет ли меняться со временем орбита спутника?
б). Если будет, то как?
в). Как изменится ситуация, если в диаметрально противоположном первому маскону месте будет находиться еще один, такой же по массе?

Решение. Маскон притягивает спутник, и при пролете над ним вектор скорости, который изначально был параллелен плоскости местного горизонта, немного отклоняется вниз, к поверхности Луны. В результате круговая орбита превращается в эллиптическую, периселений которой (ближайшая к Луне точка) с каждым витком становится ниже, зато апоселений, расположенный напротив — выше. При этом, при каждом пролете над масконом центральные проекции переселения и апоселения на поверхность Луны будут еще и смещаться. Периселений не будет находиться строго над масконом, поскольку вектор скорости в этой точке не параллален плоскости местного горизонта. Эволюция орбиты через несколько месяцев заканчивается столкновением спутника с Луной, поскольку периселений оказывается под поверхностью Луны.

Если масконов два, то второй (симметричный первому) маскон будет располагаться после периселения, но до апоселения орбиты. Таким образом, вектор скорости спутника над этим масконом слегка отклонен от плоскости местного горизонта в сторону от Луны. Второй маскон будет отклонять вектор обратно, к Луне, исправляя таким образом орбиту (стремясь вернуть ее к окружности). Таким образом, время жизни спутника на орбите Луны увеличится. При этом, орбита не обязана оказаться стационарной. Для того, чтобы орбита была стационарной необходимо, чтобы периселений оказался строго посередине между масконами. Этого, однако, можно добиться, подбирая высоту орбиты и начальную скорость спутника (скорость при выходе на орбиту).

Критерии проверки. 25 баллов — верное решение;
10 баллов — есть разумные рассуждения по нескольким пунктам;
5 баллов — есть понимание, что маскон меняет орбиту, и частично правильное описание этой орбиты;
2 балла — есть только попытка решения.

9 — 10 КЛАССЫ

Задача 1. Найдите наименьшее восьмизначное натуральное число, десятичная запись которого оканчивается на 2024 и которое делится на 17.

Решение. По условию, искомое число имеет вид $x = \overline{abcd2024}$, где a, b, c, d — цифры. Попробуем взять цифру a наименьшей возможной, т. е. будем искать наше число в виде

$$x = \overline{1bcd2024} = 10000000 + b \cdot 1000000 + c \cdot 100000 + d \cdot 10000 + 2024.$$

Отбросим все, что заведомо делится на 17, а именно, запишем $2024 = 119 \cdot 17 + 1$, $10000 = 588 \cdot 17 + 4$, $100000 = 5882 \cdot 17 + 6$, $1000000 = 58823 \cdot 17 + 9$, $10000000 = 588235 \cdot 17 + 5$. Получим, что на 17 должно делиться число $y = 5 + 9b + 6c + 4d + 1$, т. е. $9b + 6c + 4d + 6 = 17k$. Чтобы x было минимальным, можно попробовать взять $b = c = 0$. Получаем уравнение $4d + 6 = 17k$. Перебирая $d = 0,\ 1, \ldots,\ 9$, получим в левой части $6,\ 10,\ ,14, \ldots 42$ — единственное подходящее $d = 7$.

Ответ. 10072024.

Критерии проверки. 10 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
7-8 баллов — ответ верный, есть пробелы в обосновании.
3 балла — найден неоптимальный вариант *или* ответ дан, но решение полностью отсутствует.
2 балла — есть попытка решения, ответ не получен.

Задача 2. Алексей находится в пункте A и хочет успеть на электричку, которая отправляется из пункта D через 1 час 50 минут. Расстояние между пунктами A и D по прямой составляет 10 км. Скорость движения Алексея пешком равна 5 км/ч, при этом он может двигаться с этой скоростью в любом направлении, независимо от наличия дороги. Из пункта A в пункт D как раз отправляется попутная машина, которая движется со скоростью 50 км/ч, но только по дороге. Дорога из A в D идет сначала по прямой до пункта C, а затем – по прямой от C до D. Может ли Алексей успеть на электричку, если $AC = 50$ км, а $\angle CAD = 60^o$? Как следует двигаться Алексею, чтобы добраться до станции за минимальное время?

Решение. У Алексея есть три возможности: идти пешком от начала до конца, ехать на машине от начала до конца (варианты с высадкой из машины, движения пешком, а затем снова посадки в машину приводят, очевидно, к тому же времени в пути) или вначале ехать на машине, а потом идти пешком. В первом случае время в пути $T_1 = \frac{AD}{5} = 2$ — Алексей не успевает. Найдем CD по теореме косинусов: $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos 60^o} = \sqrt{2100}$. Тогда во втором случае время в пути $T_2 = \frac{AC+CD}{50} = \frac{50+10\sqrt{21}}{50} > 1.9$ часа — вновь не успевает. Проведем высоту DB к стороне AC. Тогда $DB = AD \sin 60^o = 5\sqrt{3}$, а $AB = AD \cos 60^o = 5$. Если доехать на машине до точки B, а затем идти пешком, то получим время $T_3 = \frac{AB}{50} + \frac{BD}{5} = 0.1 + \sqrt{3} < 1.8321$ часа — Алексей успевает за 4,5 секунды до отхода электрички. Последний вариант, однако не является оптимальным. Найдем точку X на стороне AC, в которой надо покинуть машину, чтобы получить оптимальное время. Обозначим $\angle DXB = \alpha$, тогда $DX = \frac{BD}{\sin \alpha}$,

$BX = \frac{BD \cos\alpha}{\sin\alpha}$, а время в пути

$$T_4 = \frac{AB}{50} - \frac{BX}{50} + \frac{DX}{5} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{50} \cdot \frac{10 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{100} \cdot \frac{11\sin^2\frac{\alpha}{2} + 9\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и видим, что необходимо найти минимум выражения $f(x) = 11x + \frac{9}{x}$. Приравнивая к нулю производную, находим точку минимума $x_0 = \sqrt{\frac{9}{11}}$ и $f(x_0) = 2\sqrt{99}$. Тогда $T_4 = 0.1 + \frac{3\sqrt{33}}{50}$ часа (у Алексея 36 секунд в запасе), $\cos\alpha = \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} = 0.1$, $\sin\alpha = \frac{2x_0}{1+x_0^2} = \frac{\sqrt{99}}{10}$,

$$AX = AB - BX = 5 - 5\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha = 5 - 5\sqrt{3}\frac{2x_0}{1-x_0^2} = 5 - \frac{5}{\sqrt{33}} \approx 4,13 \text{ км}.$$

Ответ. Алексей может успеть. Чтобы добраться за минимальное время, ему следует проехать на машине $5 - \frac{5}{\sqrt{33}}$ км, а затем идти пешком по прямой к станции.

Примечание. Для поиска угла α можно воспользоваться законом Снеллиуса (преломление света при переходе из одной среды в другую), поскольку свет распространяется в точности по тому пути, время движения по которому является наименьшим. В первой «среде» (дорога) скорость движения в 10 раз больше, чем во второй. Луч начинает движение вдоль дороги, т.е. под углом $\gamma = 90^o$ к вертикали. При сходе с дороги луч начинает движение под углом $90^o - \alpha$ к вертикали. Тогда $\frac{\sin(90^o-\alpha)}{\sin\gamma} = \frac{v_2}{v_1} = 0.1$, откуда $\cos\alpha = 0.1$.

Критерии проверки. 15 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
10 баллов — решение с арифметической ошибкой, ответ верный.
7 баллов — ответ неверный вследствие арифметической ошибки.
5 баллов — рассмотрены только два частных случая, ответ неверный.
4 балла — рассмотрен только один частный случай, ответ неверный.

Задача 3. Космический аппарат AB имеет форму длинной прямой спицы. Его длина ℓ много больше его толщины d. Плотность массы единицы длины космического аппарата однородна вдоль отрезка AB. Точка C расположена вне космического аппарата. Как направлен вектор силы $\vec{G}$ гравитационного притяжения, действующей на небольшую материальную частицу, находящуюся в точке C, со стороны космического аппарата?

Решение. Рассмотрим вначале случай, когда C не лежит на прямой AB. В этом случае вектор $\vec{G}$ будет направлен по биссектрисе угла ACB (обозначим ее CD)— докажем это. Разобьем угол ACB лучами, проведенными из C, на много маленьких углов раствора δ. Тогда AB разобьется на много маленьких отрезков, которые при малом δ можно считать материальными точками. Масса этой точки равна $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \pi d^2 \rho \cdot \Delta l$, где ρ — плотность материала аппарата (по условию, она постоянна). Рассмотрим теперь один из углов нашего разбиения, который образует треугольник CXX'. Пусть h — длина высоты из точки C к отрезку AB. Тогда

$$S_{\triangle CXX'} = \frac{1}{2}h|XX'| = \frac{h}{2}\Delta l = \frac{1}{2}|CX||CX'|\sin\delta.$$

Итак, $\Delta m = \pi d^2 h^{-1} \rho |CX||CX'| \sin\delta$. По закону Ньютона, сила, с которой притягивает материальная точка XX' небольшую материальную частицу массы M, находящуюся в точке C, равна

$$|\Delta F| = \frac{GM\Delta m}{R^2} = \pi G M \rho d^2 h^{-1} \sin\delta \frac{|CX||CX'|}{R^2} \approx \pi G M \rho h^{-1} d^2 \sin\delta,$$

поскольку расстояние от C до нашей точки $R \approx |CX| \approx |CX'|$. При этом, вектор $\Delta\vec{F}$ направлен из C на точку, т.е. вдоль вектора $\vec{CX}$. Общая сила, с которой действует аппарат AB на массу в точке C, равна сумме всех таких сил. Теперь рассмотрим симметричный относительно биссектрисы CD треугольник CYY' (т.е. такой, что углы XCD и YCD равны). Получим такую же по величине силу, направленную вдоль $\vec{CY}$. Складывая два равных вектора, получим, что их сумма будет направлена по биссектрисе CD (поскольку углы XCD и YCD равны). Остается заметить, что поскольку $\angle ACD = \angle BCD$, то каждому вектору силы слева от CD соответствует симметричный вектор справа. Сложив все вектора попарно, получим, что результирующая сила направлена по биссектрисе CD.

Теперь рассмотрим вырожденный случай, когда C лежит на продолжении отрезка AB. В силу симметрии очевидно, что здесь $\vec{G}$ будет направлен по прямой AB в сторону аппарата.

Ответ. Если C не лежит на прямой AB, то $\vec{G}$ направлен по биссектрисе угла ACB. Если C лежит на прямой AB, то $\vec{G}$ направлен вдоль этой прямой в сторону аппарата.

Критерии проверки. 20 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
10 баллов — есть верная идея о направлении вектора, ответ не получен.
7 баллов — есть попытка рассчитать вектор как равнодействующую, ответ не получен.
5 баллов — неверный вывод о том, что вектор направлен по медиане.
3 балла — неверная идея о том, что вектор направлен по высоте.

Задача 4. В какой области Земли наблюдатель может заметить, что Солнце движется по отношению к нему либо слева направо, либо справа налево в зависимости от времени года? Поясните свой ответ.

Решение. По определению Солнце может кульминировать в зените на тропиках (северном и южном). Для наблюдателя северного полушария севернее северного тропика Солнце всегда движется слева направо и кульминирует к югу от зенита. Для наблюдателя точно на тропике оно движется также, кроме одного дня в году (летнего солнцестояния в северном полушарии), когда траектория его движения перпендикулярна горизонту, а кульминирует оно в зените. Если наблюдатель находится южнее северного тропика, то Солнце может кульминировать и к югу, и к северу от зенита, соответственно, наблюдатель, обращенный лицом к Солнцу будет видеть его движение либо слева направо (кульминация к югу от зенита), либо справа налево (кульминация к северу от зенита). Такой же ход рассуждений может быть приведен для наблюдателя в южном полушарии. Таким образом, эта область — кольцо между северным и южным тропиками, не включающее сами тропики.

Ответ. В приэкваториальной области Земли южнее северного тропика и севернее южного тропика с широтами от приблизительно 23 градуса 26 минут северной широты до приблизительно 23 градуса 26 минут южной широты (точное значение положения тропиков на поверхности Земли циклически меняется из-за нутации земной оси и является непостоянным).

Критерии проверки. 10 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
8 баллов — есть пробелы в обосновании или ответ не вполне строго описывает искомую область.
3 балла — ошибочный вывод о том, что искомая область находится на полюсах.
2 балла — есть некоторые разумные рассуждения, ответ не получен.

Задача 5. Пусть X — некоторое четырехзначное число. Индийский математик Капрекар предложил применить к нему следующее преобразование: он взял наибольшее число, которое можно получить из X перестановкой цифр, и вычел из него наименьшее число, которое можно получить перестановкой цифр из X (при этом допускается, чтобы после перестановки число начиналось с нуля, например запись 0001 будет означать число 1). Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая вычисляет преобразование Капрекара для данного числа X.
Пример.
Ввод:
5707
Вывод:
7173
Пояснение: в самом деле, $7750 - 0577 = 7173$.

Решение. Вариант программы на Python

```
Y="".join(list(sorted(input())))
print(int(Y[::-1])-int(Y))
```

Критерии проверки. 20 баллов — код работает корректно.
16 баллов — есть незначительные ошибки.
10 баллов — есть верный алгоритм, но код нерабочий.
5 баллов — код не завершен.

Задача 6. Искусственный спутник Луны выведен на круговую орбиту над ее экватором. В одной из точек экватора в лунной коре находится порода повышенной плотности – маскон (массовый концентрат).
а). Будет ли меняться со временем орбита спутника?
б). Если будет, то как?

в). Как изменится ситуация, если в диаметрально противоположном первому маскону месте будет находиться еще один, такой же по массе?

Решение. Маскон притягивает спутник, и при пролете над ним вектор скорости, который изначально был параллелен плоскости местного горизонта, немного отклоняется вниз, к поверхности Луны. В результате круговая орбита превращается в эллиптическую, периселений которой (ближайшая к Луне точка) с каждым витком становится ниже, зато апоселений, расположенный напротив — выше. При этом, при каждом пролете над масконом центральные проекции переселения и апоселения на поверхность Луны будут еще и смещаться. Периселений не будет находиться строго над масконом, поскольку вектор скорости в этой точке не параллелен плоскости местного горизонта. Эволюция орбиты через несколько месяцев заканчивается столкновением спутника с Луной, поскольку периселений оказывается под поверхностью Луны.

Если масконов два, то второй (симметричный первому) маскон будет располагаться после периселения, но до апоселения орбиты. Таким образом, вектор скорости спутника над этим масконом слегка отклонен от плоскости местного горизонта в сторону от Луны. Второй маскон будет отклонять вектор обратно, к Луне, исправляя таким образом орбиту (стремясь вернуть ее к окружности). Таким образом, время жизни спутника на орбите Луны увеличится. При этом, орбита не обязана оказаться стационарной. Для того, чтобы орбита была стационарной необходимо, чтобы периселений оказался строго посередине между масконами. Этого, однако, можно добиться, подбирая высоту орбиты и начальную скорость спутника (скорость при выходе на орбиту).

Критерии проверки. 25 баллов — верное решение;
14 баллов — есть понимание, что орбита будет эволюционировать;
10–11 баллов — есть представление об эллиптичности орбиты, рассуждения о периселении и апоселении;
7 баллов — есть понимание, что маскон меняет орбиту, и частично правильное описание этой орбиты;
3 балла — есть понимание, что маскон меняет орбиту.

11 КЛАСС

Задача 1. Найдите наименьшее восьмизначное натуральное число, десятичная запись которого оканчивается на 2024 и которое делится на 17.

Решение. Мы должны рассматривать числа, начиная с 10002024, причем каждое следующее число больше предыдущего на 10000, то есть мы ищем число вида $x = 10^7 + 10000d + 2024$, где d — целое число, $0 \leqslant d \leqslant 8999$ с наименьшим возможным d при котором x делится на 17. Запишем $2024 = 119 \cdot 17 + 1$, $10000 = 588 \cdot 17 + 4$, $10000000 = 588235 \cdot 17 + 5$ и отбросим все слагаемые, которые уже делятся на 17. Получим, что $5 + 4d + 1$ должно делиться на 17, то есть $6 + 4d = 17k$, где $k = 0, 1, \dots$. Тогда чтобы найти наименьшее подходящее d будем перебирать k с нуля. При $k = 0$ и $k = 1$ получаются нецелые d, а вот при $k = 2$ получаем $d = 7$

Ответ. 10072024.

Критерии проверки. 10 — верное решение;
9 — верное решение с небольшим пробелом в обосновании минимальности найденного числа;
5 — обосновано найдено число, делящееся на 17, но оно не минимально из-за ошибки в рассуждении;
0 — нет продвижений или предложен необоснованный неподходящий под условия ответ.

Задача 2. Алексей находится в пункте A и хочет успеть на электричку, которая отправляется из пункта D через 1 час 50 минут. Расстояние между пунктами A и D по прямой составляет 10 км. Скорость движения Алексея пешком равна 5 км/ч, при этом он может двигаться с этой скоростью в любом направлении, независимо от наличия дороги. Из пункта A в пункт D как раз отправляется попутная машина, которая движется со скоростью 50 км/ч, но только по дороге. Дорога из A в D идет сначала по прямой до пункта C, а затем – по прямой от C до D. Может ли Алексей успеть на электричку, если $AC = 50$ км, а $\angle CAD = 60^o$? Как следует двигаться Алексею, чтобы добраться до станции за минимальное время?

Решение. У Алексея есть три возможности: идти пешком от начала до конца, ехать на машине от начала до конца (варианты с высадкой из машины, движения пешком, а затем снова посадки в машину приводят, очевидно, к тому же времени в пути) или вначале ехать на машине, а потом идти пешком. В первом случае время в пути $T_1 = \frac{AD}{5} = 2$ — Алексей не успевает. Найдем CD по теореме косинусов: $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos 60^o} = \sqrt{2100}$. Тогда во втором случае время в пути $T_2 = \frac{AC+CD}{50} = \frac{50+10\sqrt{21}}{50} > 1.9$ часа — вновь не успевает. Проведем высоту DB к стороне AC. Тогда $DB = AD \sin 60^o = 5\sqrt{3}$, а $AB = AD \cos 60^o = 5$. Если доехать на машине до точки B, а затем идти пешком, то получим время $T_3 = \frac{AB}{50} + \frac{BD}{5} = 0.1 + \sqrt{3} < 1.8321$ часа — Алексей успевает за 4,5 секунды до отхода электрички. Последний вариант, однако не является оптимальным. Найдем точку X на стороне AC, в которой надо покинуть машину, чтобы получить оптимальное время. Обозначим $\angle DXB = \alpha$, тогда $DX = \frac{BD}{\sin \alpha}$,

$BX = \frac{BD\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а время в пути

$$T_4 = \frac{AB}{50} - \frac{BX}{50} + \frac{DX}{5} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{50}\cdot\frac{10-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{100}\cdot\frac{11\sin^2\frac{\alpha}{2} + 9\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и видим, что необходимо найти минимум выражения $f(x) = 11x + \frac{9}{x}$. Приравнивая к нулю производную, находим точку минимума $x_0 = \sqrt{\frac{9}{11}}$ и $f(x_0) = 2\sqrt{99}$. Тогда $T_4 = 0.1 + \frac{3\sqrt{33}}{50}$ часа (у Алексея 36 секунд в запасе), $\cos\alpha = \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} = 0.1$, $\sin\alpha = \frac{2x_0}{1+x_0^2} = \frac{\sqrt{99}}{10}$,

$$AX = AB - BX = 5 - 5\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha = 5 - 5\sqrt{3}\frac{2x_0}{1-x_0^2} = 5 - \frac{5}{\sqrt{33}} \approx 4,13 \text{ км}.$$

Ответ. Алексей может успеть. Чтобы добраться за минимальное время, ему следует проехать на машине $5 - \frac{5}{\sqrt{33}}$ км, а затем идти пешком по прямой к станции.

Примечание. Для поиска угла α можно воспользоваться законом Снеллиуса (преломление света при переходе из одной среды в другую), поскольку свет распространяется в точности по тому пути, время движения по которому является наименьшим. В первой «среде» (дорога) скорость движения в 10 раз больше, чем во второй. Луч начинает движение вдоль дороги, т.е. под углом $\gamma = 90^o$ к вертикали. При сходе с дороги луч начинает движение под углом $90^o - \alpha$ к вертикали. Тогда $\frac{\sin(90^o-\alpha)}{\sin\gamma} = \frac{v_2}{v_1} = 0.1$, откуда $\cos\alpha = 0.1$.

Критерии проверки. 15 — верное решение;
12 — верно найдена точка минимума, но нет обоснования минимальности;
8 — найден некоторый путь, по которому можно успеть, но он не является оптимальным;
5 — показано, что путь «только пешком» и «только на машине» не укладываются в отведенное время.

Задание 3. Равновесная температура космического аппарата, освещенного Солнцем и находящегося на орбите Марса, равна -30 градусов Цельсия. Какова будет равновесная температура того же аппарата на подлете к Меркурию (расстояние от Меркурия до Солнца примите равным $0,39$ а.е., Марса до Солнца – $1,52$ а.е.)?

Решение. Температура аппарата определяется балансом энергии. На орбитах Марса и Меркурия основным источником энергии является солнечный свет, остальные источники излучения пренебрежимо малы. Эта энергия убывает пропорционально квадрату расстояния, так что $E_1^+/E_2^+ = R_2^2/R_1^2$. Нагретый Солнцем аппарат теряет энергию, излучая ее в пространство. По закону Стефана–Больцмана эта энергия пропорциональная четвертой степени абсолютной температуры тела, т.е. $E_1^-/E_2^- = T_1^4/T_2^4$. Приравнивая $E_1^+ = E_1^-$, $E_2^+ = E_2^-$, получаем

$$\frac{T_1^4}{T_2^4} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad\Longleftrightarrow\quad T_2 = T_1\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Подставляя сюда $T_1 = 273-30 = 243$ К, $R_1 = 1,52$ а.е., $R_2 = 0,39$ а.е., получаем $T_2 = 480$ К или 207 градусов Цельсия.

Ответ. 207 градусов Цельсия.

Критерии проверки. 10 — верное решение;
9 — арифметическая ошибка;
5 — есть одна из двух формул для энергии (поглощаемая или излучаемая);
0 — нет продвижений.

Задача 4. Пусть X — некоторое четырехзначное число. Индийский математик Капрекар предложил применить к нему следующее преобразование: он взял наибольшее число, которое можно получить из X перестановкой цифр и вычел из него наименьшее число, которое можно получить перестановкой цифр из X (при этом допускается, чтобы после перестановки число начиналось с нуля, например, запись 0001 будет означать число 1). Например, преобразование Капрекара, примененное к числу $X = 5707$ даст результат $7750 - 0577 = 7173$. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая вычисляет преобразование Капрекара для всех чисел в диапазоне от 1000 до 9999 и выводит количество разных ответов (например, в диапазоне от 1000 до 1005 получим

$$1000 - 0001 = 999, \quad 1100 - 0011 = 1089, \quad 2100 - 0012 = 2088,$$
$$3100 - 0013 = 3087, \quad 4100 - 0014 = 4086, \quad 5100 - 0015 = 5085,$$

то есть, всего шесть разных ответов).

Решение. Вариант программы на C++

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <set>
#include <vector>

using namespace std;

int Kaprekar(int k){
    vector<int> v = {k/1000, k/100 % 10, k%100 / 10, k% 10};
    int k_max = 0, k_min = 0, i;
    sort(v.begin(), v.end());
    for (i=0; i<4; i++){
        k_min = k_min*10 + v[i];
        k_max = k_max*10 + v[3-i];
    }
    return k_max - k_min;
}

int main()
{
```

```
    set<int> s;
    int i;
    for (i = 1000; i <= 9999; ++i)
    s.insert(Kaprekar(i));
    cout << s.size();

    return 0;
}
```

Вариант программы на Python

```
s = set()
for i in range(1000, 10000):
    l = list(str(i))
    l.sort()
    x1 = l.pop()
    x2 = l.pop()
    x3 = l.pop()
    x4 = l.pop()
    x_max = x1*1000 + x2*100 + x3*10 + x4
    x_min = x4*1000 + x3*100 + x2*10 + x1
    s.add(x_max - x_min)
print(len(s))
```

Критерии проверки. 20 баллов — верное решение, рабочая программа;
18–19 баллов — решено верно, есть некоторые синтаксические ошибки/опечатки *или* дополнительно выводится лишняя информация;
13–17 баллов — решено в целом верно, есть одно–два неправильных действия или выводится не количество различных значений преобразования, а сами преобразования;
10–12 баллов — программа некорректная синтаксически и выводится не количество различных значений преобразования, а сами преобразования;
8–10 баллов — решение как псевдокод верное;
4–7 баллов — нет описания алгоритма, приведены общие соображения;
2–3 балла — есть лишь примеры вычисления преобразования Капрекара для отдельных чисел.

Задача 5. Некоторый спутник обращается вокруг Земли с эксцентриситетом орбиты $e = 0,6$ и большой полуосью $a = 4R_З$, где $R_З$ — радиус Земли. Для безошибочной передачи информации на Землю высота спутника над поверхностью планеты должна быть не больше, чем $3R_З$. Выясните, какую часть периода обращения спутник будет корректно передавать информацию на Землю.

Решение. Орбита является эллипсом с фокальным расстоянием $2c$, где $c = ae = 0,6a$ и малой полуосью $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0,8a$. По свойству эллипса сумма расстояний от спутника до фокусов постоянна и равна $2a$. В точке орбиты, когда спутник удаляется на высоту $h = 3R_3$ от поверхности Земли, расстояние от него до центра Земли (одного из фокусов эллипса, обозначим его O) равно $h + R_3 = 4R_3 = a$. Тогда и расстояние до второго фокуса равно a, т. е. данные точки (их две, обозначим их X и Y) лежат на малой полуоси эллипса. По закону Кеплера, время T_0 прохождения спутником той дуги XY, которая ближе к Земле, относится к периоду обращения спутника T так же, как относится площадь сектора OXY, заметаемого радиус–вектором спутника с началом в т. O (центре Земли), к площади всего эллипса. Заметим, что сектор OXY есть половина эллипса с вырезанным треугольником OXY. Площадь эллипса равна $\pi ab = 0.8\pi a^2$, а площадь треугольника OXY равна $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot c = 0.48a^2$. Тогда

$$\frac{T_0}{T} = \frac{0.4\pi a^2 - 0.48a^2}{0.8\pi a^2} = 0.5 - \frac{0.6}{\pi} \approx 0.31,$$

т. е. искомая часть времени составляет 0.31 от периода обращения.

Ответ. 0.31

Критерии проверки. 20 — верное решение;
10 — есть закон Кеплера и есть неверные попытки найти площадь нужной части эллипса при верной модели задачи;
8 — есть неверные попытки найти площадь нужной части эллипса при в целом верной модели задачи, отсутствует закон Кеплера;
4 — найдены какие-то характеристики эллипса (оси, фокус), других продвижений нет, либо неверная модель задачи.

Задача 6. Земляне отправили экспедицию к Сириусу. Космический аппарат вблизи Земли набрал скорость, равную половине скорости света. Как изменится вид звездного неба в иллюминаторах (предположим, что с корабля можно смотреть в любую точку небесной сферы, а корабль не вращается)? Подтвердите свои соображения расчетами.

Решение. Будут наблюдаться несколько эффектов: аберрация, доплеровское смещение света, видимое изменение яркости звезд.

Аберрация. Направим ось Ox неподвижной системы координат K вдоль вектора скорости корабля, а оси Oy и Oz произвольно, так чтобы получился орторепер. Теперь рассмотрим подвижную систему K' (связанную с кораблем) и выбранную так, чтобы в начальный момент времени $O' = O$ (по условию, скорость движения K' относительно K равна $V = c/2$). Тогда координаты связаны преобразованием Лоренца

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

Таким же преобразованием будут связаны приращения координат dx, dy, dz и времени dt. Рассмотрим в системе K луч света некоторой звезды, который движется со скоростью

$v = (v_x, v_y, v_z)$, $\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = c$. Поскольку $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, то можем выразить

$$v_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V\,dt}{dt - (V/c^2)dx} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

— известная формула релятивистского сложения скоростей. Аналогично,

$$v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-V^2/c^2}}{dt - (V/c^2)dx} = \frac{v_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}},$$
$$v_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1-V^2/c^2}}{dt - (V/c^2)dx} = \frac{v_z\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}.$$

Из основного постулата релятивистской механики следует, что $|v'| = c$ (это впрочем можно проверить непосредственно). Видим, что $\frac{v_{x'}}{v_{y'}} = \frac{v_x}{v_y}$, т. е. в плоскости, перпендикулярной движению корабля, направление «на звезду» не меняется. Однако угол вектора v с осью Ox отличен от угла вектора v' с той же осью. Действительно, $\cos\alpha = \frac{v_x}{|v|} = \frac{v_x}{c}$, а

$$\cos\alpha' = \frac{v_{x'}}{|v'|} = \frac{v_{x'}}{c} = \frac{v_x/c - V/c}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} = \frac{\cos\alpha - V/c}{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha} < \cos\alpha$$

(если $\alpha = 0$ или π, то неравенство обращается в равенство). Видим, что в движущейся системе K' угол вектора скорости луча света, идущего от звезды, с осью Ox увеличивается. Соответственно, направление «на звезду» (вектор $-v$) наоборот сближается с осью Ox (направление полета). Значит, с точки зрения космонавта, находящегося на борту корабля, звезды, находящиеся сбоку по отношению к направлению полета корабля, сдвинутся в направлении «передней сферы». На этой сфере плотность звезд будет больше, а на «задней сфере», соответственно, звезд станет меньше. Не сдвинутся только звезды, находящиеся строго по курсу полета (например, Сириус) и строго против курса (например, Солнце).

Доплеровский эффект. Рассмотрим упрощенно испускание звездой электромагнитных волн как испускание фотонов с равными промежутками времени. Пусть промежуток между двумя выпущенными фотонами равен Δt в системе K. Тогда в системе K' этот промежуток равен

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t\frac{1 - \frac{V v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \cdot \frac{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Тогда длина волны λ в системе K и длина λ' в системе K' связаны соотношением

$$\lambda' = c\Delta t' = \lambda \cdot \frac{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для звезд по ходу движения аппарата имеем $\cos\alpha = 1$ и $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}} = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} < \lambda$ — видимый свет сдвигается в сторону синего. Для звезд за аппаратом имеем $\cos\alpha = -1$ и $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} = \lambda\sqrt{3} > \lambda$ — видимый свет сдвигается в сторону красного. Для звезд по бокам аппарата $\cos\alpha = 0$ и $\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{2\lambda}{\sqrt{3}} > \lambda$ — сдвиг в сторону красного. Итак, звезды поменяют свой цвет — по ходу движения сдвиг в сторону синего, сзади и по бокам — сдвиг в сторону красного. Синие звезды по ходу движения и красные звезды сзади станут не видны невооруженным глазом.

Изменение яркости звезд. Рассмотрим одинокую звезду, находящуюся по ходу движения аппарата. Количество фотонов, испускаемых этой звездой в единицу времени dt в заданный телесный угол $d\Omega$ равна $dN = J_0 d\Omega\, dt$ (все переменные взяты в системе K, J_0 — интенсивность потока фотонов, равная константе в силу изотропности пространства). Для наблюдателя в системе K' видимая интенсивность потока будет равна

$$J' = \frac{dN}{d\Omega'\, dt'} = J_0 \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega'} \cdot \frac{dt}{dt'}.$$

Мы уже видели, что для звезд по ходу движения $dt/dt' > 1$. Кроме того, мы знаем, что с точки зрения наблюдателя на борту телесный угол $d\Omega'$ является искаженным (сжатым) телесным углом $d\Omega$, т.е. $d\Omega > d\Omega'$, а значит $J' > J$. Вывод: яркость звезд по ходу движения аппарата увеличивается. Аналогично, яркость звезд за кормой аппарата уменьшается.

Что не будет наблюдаться. Не будет наблюдаться видимое глазом движение звезд по небу, превращения звезд в линии и т.п.

Критерии проверки. по 10 баллов за верное описание и обоснование первого и второго эффекта, 5 баллов — для третьего эффекта.
Снижение на 2–3 балла при отсутствии математического обоснования эффекта (для каждого из трех) или при неполном обосновании (например появляется формула для угла смещения звезд, но нет ее вывода из преобразований Лоренца).
Снижение на 2–3 балла при описании нерелятивистского эффекта Доплера, при ошибке в направлении смещения цвета.