

Программа экзамена по теории вероятностей, ФКИ, 2019-2020

Напоминаем, что во время подготовки билета можно в течении 5 минут пользоваться лекциями, рукописными или печатными. Также можно пользоваться табличкой основных распределений и их параметров: средних, дисперсий, характеристических функций.

Дискретная теория вероятностей

1. Вероятностное пространство в конечном случае.
2. Классическое пространство. Примеры для вытягивания с возвращением и без возвращения шаров из урны.
3. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. Независимость попарная и в совокупности. Лемма об эквивалентном определении независимости событий. Последовательность независимых испытаний.
5. Дискретные случайные величины. Распределение и функция масс. Дискретные случайные векторы.
6. Основные дискретные распределения. Вывод биномиального, геометрического, отрицательного биномиального, гипергеометрического и полиномиального распределений исходя из их физического описания.
7. Независимые алгебры. Критерий независимости алгебр, порожденных разбиениями. Измеримость. Независимость дискретных случайных величин: три эквивалентных определения. Независимость функций от независимых дискретных величин.
8. Независимость случайных векторов: три эквивалентных определения. Независимость функций от независимых дискретных векторов.
9. Определение математического ожидания дискретной случайной величины. Математическое ожидание функции от нескольких дискретных случайных величин.
10. Свойства математического ожидания, включая неравенства Иенсена, Ляпунова, Гельдера.
11. Дисперсия, ковариация и их свойства в дискретном случае.
12. Производящая функция случайной величины. Определение, существование, примеры. Свойства производящей функции как вещественнозначной функции.
13. Вероятностные свойства производящей функции случайной величины. Теорема непрерывности для производящих функций без доказательства.
14. Теорема Пуассона. Неравенство о погрешности в теореме Пуассона (без доказательства).
15. Производящие функции векторов и их свойства.
16. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Локальная теорема Гнеденко (без доказательства).
17. Интегральная теорема предельная теорема для решетчатых случайных величин. Центральная предельная теорема. Неравенство Берри-Эссеена (без доказательства).
18. Цепи Маркова. Определение. Эквивалентные определения. Матрица вероятностей перехода. Уравнения Колмогорова-Чепмена.
19. Классификация состояний цепи. Лемма о солидарности.
20. Лемма о положительности некоторой степени матрицы вероятностей перехода неразложимой и непериодичной цепи Маркова.
21. Оценки в эргодической теореме: лемма об оценках вероятности того, что две независимые цепи Маркова не встретятся в течении более чем k ходов, лемма о марковости последовательности, склеенной из двух таких цепей в момент встречи.
22. Стационарное распределение. Эргодическая теорема (формулировка). Единственность стационарного распределения эргодической цепи Маркова. Представление для эргодического распределения в терминах времен возвращения в состояния (без доказательства).

Общая теория вероятностей

23. Общее вероятностное пространство. Сигма-алгебра. Вероятностная мера.
24. Мера Лебега на отрезке $[0,1]$. Борелевская сигма-алгебра подмножеств прямой.
25. Общее определение случайной величины и случайного элемента. Измеримость борелевской функции от случайной величины. Измеримость предела последовательности случайных величин.
26. Распределение случайной величины. Функция распределения. Задание распределения функцией распределения.
27. Плотность. Основные абсолютно-непрерывные распределения.
28. Общая конструкция математического ожидания (с обоснованием корректности).
29. Основные свойства математического ожидания: линейность, сохранение неравенств. Математическое ожидание произведения независимых величин.
30. Предельные свойства математического ожидания: теоремы о монотонной и мажорируемой сходимости.
31. Случайные векторы. Функция распределения вектора. Плотность распределения вектора. Плотность распределения подвектора случайного вектора.
32. Независимость случайных величин (векторов) в терминах функций распределения и в терминах плотностей. Многомерный нормальный вектор. Независимость компонент нормального вектора в терминах ковариационной матрицы.
33. Преобразование плотности при гладких заменах координат. Математическое ожидание функции от абсолютно-непрерывного вектора.
34. Условное математическое ожидание. Общее определение. Существование. Единственность.
35. Условное математическое ожидание в дискретном и абсолютно-непрерывном случаях.
36. Свойства условного математического ожидания.
37. Условное математическое ожидание как проекция в L^2 . Условное математическое ожидание компоненты двумерного нормального вектора при условии другой компоненты.
38. Характеристическая функция случайной величины и ее свойства.
39. Формулы обращения. Характеристические функции основных распределений.
40. Характеристическая функция вектора и ее свойства. Характеристическая функция нормального вектора.
41. Сходимость почти наверное. Эквивалентные определения. Критерий Коши.
42. Сходимость по вероятности. Критерий Коши. Единственность предела.
43. Сходимость в среднем. Неравенства Маркова и Чебышева. Связь с другими сходимостями.
44. Сходимость по распределению. Связь со сходимостью по вероятности. Теорема об эквивалентных определениях сходимости по распределению (формулировка).
45. Действие непрерывных функций на сходящиеся величины. Лемма Слуцкого (формулировка).
46. Закон больших чисел. Законы больших чисел Чебышева и Хинчина.
47. Центральная предельная теорема. Формулировка центральной предельной теоремы в форме Ляпунова.