МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет космических исследований
Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга

ЗАДАЧИ
олимпиады «Ломоносов» по профилю
КОСМОНАВТИКА
2017–2022 гг.
(с подробными решениями)

Под общей редакцией *И. В. Садовничей*

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2023

УДК 629.7(075.3)
ББК 39.6я729
З15

https://elibrary.ru/rkxxyv

Коллектив авторов:

В. В. Абрамова, М.Р. Ахмедов, А. И. Богомазов, С. В. Панферов, А. М. Савчук, И. В. Садовничая, С. В. Соловьев, С. С. Чесноков, М. В. Шеблаев, И. А. Шейпак, М. В. Юмашев

З15 **Задачи олимпиады «Ломоносов» по профилю «Космонавтика» 2017–2022 гг. (с подробными решениями)** / под ред. И. В. Садовничей. – Москва: МАКС Пресс, 2023. – 256 с.

ISBN 978-5-317-06979-7

С 2017/18 учебного года оргкомитет олимпиады школьников «Ломоносов» впервые проводит олимпиаду по профилю «Космонавтика».

Олимпиада организована открытым в 2017 году факультетом космических исследований совместно с Государственным астрономическим институтом имени П. К. Штернберга. Олимпиада соответствует направлению специальности высшего образования «Астрономия».

Главная цель олимпиады – популяризация космической науки в молодёжной среде. Главными задачами олимпиады организаторы считают развитие интереса школьников к специальностям аэрокосмического профиля, к истории достижений отечественной и зарубежной космонавтики, к задачам по астрономии и космическим исследованиям, проблемам освоения космоса, разработке технологий и эксплуатации космической техники.

Поскольку задания олимпиады носят ярко выраженный междисциплинарный характер, то для их решения участники должны проявить глубокие знания по астрономии, информатике, математике и физике.

В настоящем пособии собраны задания разминочного, заочного и очного туров олимпиады школьников «Ломоносов» по космонавтике.

Все задания снабжены ответами и подробными решениями.

Пособие позволит будущим участникам олимпиады познакомиться с форматом олимпиады и постановками задач прошлых лет.

УДК 629.7(075.3)
ББК 39.6я729

ISBN 978-5-317-06979-7

Содержание

Олимпиада 2017/2018 года

Олимпиада 2018/2019 года

Олимпиада 2019/2020 года

Олимпиада 2020/2021 года

Олимпиада 2021/2022 года

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

2017/2018 год

2018/2019 год

2019/2020 год

2020/2021 год

2021/2022 год

Олимпиада 2017/2018 года

Разминка (все классы)

Заочный тур 1

1) Какой физический эффект позволил обнаружить гравитационные волны?

   а) колебания земной поверхности;
   б) изменение ускорения свободного падения;
   в) интерференция луча света;
   г) изменение скорости распространения звука в воздухе.

2) Сколько землян в данный момент[1] находится в космосе?

   а) двое;
   б) трое;
   в) четверо;
   г) шестеро.

3) Какую минимальную скорость должен развить космический аппарат, чтобы выйти на околоземную орбиту?

   а) скорость звука;
   б) скорость света;
   в) первую космическую скорость;
   г) вторую космическую скорость.

4) В каком году на поверхность Луны был доставлен первый космический аппарат?

   а) в 1959-м;
   б) в 1961-м;
   в) в 1966-м;
   г) в 1969-м.

5) В каком году получена первая фотография обратной стороны Луны?

   а) в 1959-м;
   б) в 1961-м;

[1] Тур проходил с 6 по 11 ноября 2017 года.

в) в 1966-м;
г) в 1969-м.

6) В каком году началось строительство международной космической станции, которая в данный момент находится на орбите?

а) в 1989-м;
б) в 1998-м;
в) в 2003-м;
г) в 2011-м.

7) На какой высоте летает международная космическая станция?

а) 100 км;
б) 400 км;
в) 1400 км;
г) 6400 км.

8) На какой высоте находится граница между земным пространством и космосом, принятая международной федерацией астронавтики и почему?

а) 800 км. Потому, что это верхняя граница термосферы;
б) 100 км. Потому, что выше этой границы скорость летящего самолета должна превышать первую космическую скорость;
в) 50 км. Потому, что это верхняя граница стратосферы;
г) 38 км. Потому, что это максимальная высота полета самолета, достигнутая на данный момент.

9) Какую форму имеет капля воды в невесомости?

а) шар;
б) куб;
в) тор;
г) в невесомости вообще нет воды.

10) Работает ли магнитный компас на космическом корабле, находящемся на околоземной (до 500 км) орбите?

а) да, стрелка по-прежнему направлена к магнитному полюсу Земли;
б) работает, но стрелка направлена на Солнце;
в) не работает (стрелка движется хаотично);
г) работает, но стрелка направлена в центр Земли.

Заочный тур 2

1) Сколько високосных лет может быть в течение одного десятилетия?

   а) 1;
   б) 3;
   в) 5;
   г) 7.

2) Что служит основной причиной смены сезонов на Земле, т. е. почему бывают зима и лето?

   а) наклон оси вращения Земли к плоскости ее орбиты;
   б) изменение расстояния от Солнца при движении по эллиптической орбите;
   в) изменение прозрачности земной атмосферы, вызванное активностью Солнца;
   г) изменение наклона оси вращения Земли к плоскости ее орбиты;

3) Сколько раз в году Солнце на экваторе бывает в зените?

   а) ни разу;
   б) 1 раз;
   в) 2 раза;
   г) ежедневно.

4) Почему в течение месяца происходит смена фаз Луны, т. е. наблюдается новолуние, затем первая четверть, полнолуние, последняя четверть и вновь новолуние?

   а) по причине прохождения земной тени по лунному диску;
   б) по причине изменения взаимного положения Земли, Луны и Солнца;
   в) по причине регулярного поворота к Земле обратной (темной) стороны Луны;
   г) по причине прохождения по земной поверхности лунной тени.

5) При какой фазе Луны вся ночь бывает лунная?

   а) в новолуние;
   б) в первую четверть;
   в) в полнолуние;
   г) в последнюю четверть.

6) Если бы орбита Луны лежала строго в плоскости эклиптики, то солнечные и лунные затмения происходили бы реже или чаще, чем сейчас?

а) вообще не происходили бы;
б) происходили бы реже;
в) происходили бы чаще;
г) происходили бы еженедельно.

7) Почему Сатурн в телескоп выглядит сплюснутым?

а) потому что он действительно сплюснут из-за быстрого вращения;
б) эту иллюзию создает наличие кольца вдоль экватора планеты;
в) по причине сферической аберрации объектива телескопа;
г) из-за эффекта дифференциальной рефракции в атмосфере Земли.

8) Где сегодня[2] по продолжительности день приблизительно равен ночи?

а) на Международной линии перемены дат;
б) везде;
в) нигде.

9) В какой конфигурации наступает наилучшая вечерняя видимость Меркурия?

а) в период наибольшей восточной элонгации;
б) в период наибольшей западной элонгации;
в) в период верхнего соединения;
г) в период нижнего соединения.

10) Почему во время экспедиций на Луну по программе «Аполлон» (1969–1972 гг.) посадки астронавтов производились только на видимом полушарии Луны?

а) это полушарие представляет наибольший интерес для науки;
б) мощности ракеты не хватало для полета на обратную сторону Луны;
в) чтобы поддерживать радиосвязь с Землей;
г) чтобы с помощью телескопов с Земли могли контролировать работу астронавтов.

[2] Тур проходил с 3 по 9 декабря 2017 года.

Варианты для 10 – 11 классов

Заочный тур 1

Задача 1

Астроном измерил красное смещение линий в спектре далекой галактики: оно оказалось равным z.
Приняв постоянную Хаббла $H_0 = 70$ (км/с)/Мпк, определите, сколько лет шел свет от этой галактики до астронома. Приведите подробное решение.

Варьируемый параметр z *выбирается от 0,04 до 0,06 с шагом 0,005.*

Задача 2

Спутник вращается вокруг своей планеты по круговой орбите радиуса $R = 9400$ км. Определите период обращения спутника T, если известно, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 3{,}86$ м/с^2. Ответ приведите в часах и минутах, округлив до целых (например, 7 ч 02 мин). Считайте планету однородным шаром радиуса $r = 3400$ км.

Задача 3

Карта поверхности Ганимеда состоит из прямоугольного поля $N \times M$ клеток. Рельеф местности таков, что планетоход может из каждой клетки выйти в одном из четырех направлений «вправо», «вверх», «влево» или «вниз».
В начальный момент времени позиция планетохода находится в одной из ячеек карты. Однако возможно, что планетоход будет бесконечно ходить по полю и никогда не сможет исследовать поверхность Ганимеда.
Напишите программу, которая определит, сможет ли планетоход пройти по от начала до конца маршрута и завершить исследования, не зациклившись.

Входные данные:
Во входном файле заданы сначала размеры поля – число строк N и число столбцов M ($1 \le N \le 1000,\ 1 \le M \le 1000$). Далее идет

N строк по M чисел в каждой, задающих направления стрелочек в клетках. Число 1 обозначает стрелочку вправо, 2 – вверх, 3 – влево, 4 – вниз. Числа в строке разделяются пробелами.
Предпоследняя строка содержит два числа – координаты клетки, в которой планетоход находится в начальный момент времени. Последняя строка содержит два числа – координаты клетки, в которой планетоход должен прийти в конечный момент времени.

Выходные данные:
В выходной файл выведите YES, если путь без зацикливания существует. Если такого пути нет, выведите NO.

Пример:
Входные данные
6 5
3 1 1 4 2
1 2 4 3 1
4 2 1 1 4
1 2 3 3 3
3 1 4 4 4
2 2 3 4 2
1 2
5 3

Выходные данные
YES

Задача 4

Спутник движется по круговой орбите, радиус которой составляет $n = 2$ радиуса планеты. Какова плотность вещества планеты ρ, если период обращения спутника равен T часов?
Планету считайте однородным шаром. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$.
Ответ дайте в $\text{кг}/\text{м}^3$, поделив его на 10^3 и округлив до одного знака после запятой (например, 8,5).

Варьируемый параметр T выбирается от 1,5 до 4 с шагом 0,5.

Задача 5

> Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.
>
> Станислав Лем,
> Звездные дневники Ийона Тихого.
> Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел двух дублей самого себя из завтрашнего и послезавтрашнего дней. «Вторничный» Ийон Тихий хочет починить рули ракеты и для этого перекладывает гаечные ключи из ящика в карманы скафандра. Вначале в ящике лежат $N = 32$ ключа. Каждый ключ «вторничный» Тихий сначала в течение $t_1 = 15$ секунд ищет в ящике, а затем в течение $t_2 = 20$ секунд укладывает в карман скафандра. «Средовый» и «четверговый» Ийоны Тихие мешают ему. Дождавшись момента, когда «вторничный» Ийон начинает искать в ящике очередной ключ, один из дублей (но не оба) может вытащить из скафандра один ключ (на это ему требуется ровно $t_3 = 15$ секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный ключ, у «средового» уходит $t_4 = 105$ секунд, после чего он готов украсть из скафандра следующий ключ, а «четверговый» прячет ключ за $t_5 = 225$ секунд. Какое наименьшее число ключей может оказаться в кармане скафандра в тот момент, когда «вторничный» Ийон положит туда последний ключ?

Задача 6

Две одинаковых звезды движутся вокруг общего центра масс по окружности радиуса $R = 10^{10}$ м, располагаясь на противоположных концах диаметра окружности, причем период обращения звезд равен T земных суток. Пренебрегая влиянием других небесных тел и приняв гравитационную постоянную равной $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$, определите массу M каждой из звезд.

Ответ приведите в килограммах, поделив его на 10^{30} и округлив до одного знака после запятой.

Варьируемый параметр T выбирается
от 10 до 15 с шагом 1.

Задача 7

> Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми. Передвигаться по ней было почти невозможно. Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев, а один, кажется, даже из будущего года... Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь, уменьшивший наше количество наполовину.
>
> Станислав Лем,
> Звездные дневники Ийона Тихого.
> Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 7 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше восьми, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147.
Сколько вихрей могла пройти ракета всего, если в конце в ней остался один-единственный Ийон Тихий?

Задача 8

В звездном скоплении 1500 одинаковых звезд. Каждая звезда имеет блеск 15^m? Каков полный блеск этого скопления? Приведите подробное решение.

Задача 9

> Четверговый аккуратно разбивал ножом яйца и выливал их содержимое в шипящий жир.
> – О, прошу прощения, – запротестовал я, – свой рацион за среду ты уже съел, ты не имеешь права второй раз за среду ужинать!
>
> Станислав Лем,
> Звездные дневники Ийона Тихого.
> Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, видит в среду своего двойника из четверга. «Средовый» Ийон Тихий хочет разделить с «четверговым» кусок сыра, имеющий форму пирамиды $TABCD$ с площадью основания $S_{ABCD} = 12$ см^2. Ийон из среды отрезает «четверговому» одним плоским разрезом пирамиду $TA'B'C'D'$ (точка A' лежит на ребре TA, точка B'– на ребре TB и т.д.), а для того, чтобы дележ был «честным», проводит разрез через середину высоты TH, где H – точка пересечения отрезков AC и BD. Какой наибольший объем может иметь многогранник $ABCDA'B'C'D'$, если $AH = a$ см, $BH = b$ см, $CH = c$ см, $DH = d$ см, $TH = 12$ см? Ответ дайте в см^3, округлив до сотых (например, 41,22).

Варьируемые параметры a и b выбираются различными числами от 2 до 4 с шагом 1.

Варьируемые параметры c и d выбираются различными числами от 5 до 7 с шагом 1.

Задача 10

Воганы собрались в экспедицию на край Вселенной. У них есть корабль в форме таблицы, состоящий из $N \times M$ ячеек, связанных между собой. У каждой ячейки известна грузоподъемность, а у каждого вогана – масса. В каждой ячейке может быть не более одного вогана, если воган занял ячейку, грузоподъемность ячейки не может быть меньше массы вогана.

Руководитель экспедиции продумывает рассадку. Помогите ему определить, какому максимальному количеству воганов удастся отправиться в путь.

Входные данные:

В первой строке даны числа N и M $(1 \leq N,\ M \leq 40)$. В каждой из последующих N строк содержится по M чисел, обозначающих грузоподъемность соответствующей ячейки. В предпоследней строке находится число K $(1 \leq K \leq 2000)$ – количество воганов. В последней строке содержатся K чисел, i-ое из которых – масса i-ого вогана. Все массы воганов и грузоподъемности ячеек – натуральные числа, не превышающие 100.

Выходные данные:

Требуется вывести одно число – максимально возможное количество участников экспедиции.

Пример:

Входные данные

3 2

5 10

7 5
5 5
6
9 5 3 5 12 10

Выходные данные
4

Заочный тур 2

Задача 1

В 1054 г. астрономы заметили вспышку звезды в созвездии Телец: это был взрыв сверхновой. Сейчас на этом месте виден остаток взрыва звезды – газовая Крабовидная туманность радиусом около 3 угловых минут. С какой средней скоростью расширялся этот газ за прошедшее тысячелетие? Расстояние до Крабовидной туманности примите равным 2000 пк. Скорость вычислите в километрах в секунду. Приведите подробное решение.

Задача 2

Спутник вращается вокруг своей планеты по круговой орбите радиуса $R = 83500$ км. Сколько полных оборотов сделает спутник вокруг своей планеты за N земных суток, если известно, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 10{,}4$ м/с^2? Считайте планету однородным шаром радиуса $r = 6300$ км.

Варьируемый параметр N выбирается в диапазоне от 101 до 109 с шагом 1.

Задача 3

Космонавты Артем и Василий высадились на Марсе и установили контакт с марсианами.

Оказалось, все марсиане имеют по две ноги, но иногда любят стоять на одной ноге. Когда марсианин стоит на одной ноге, другую ногу не видно.

Во встречающей делегации марсиан некоторые стояли на одной ноге, а некоторые на двух. Артем пересчитал видимые ноги и получил число A.

При прощании Василий пересчитал видимые ноги заново (некоторые марсиане могли поменять позу) и получил число B.
Вернувшись на корабль, космонавты заинтересовались, сколько же марсиан их встречало. Вскоре они поняли, что однозначно определить это число можно не всегда. Теперь они хотят понять, какое минимальное и какое максимальное количество марсиан могло их встречать.
Требуется написать программу, которая по заданным числам A и B выведет минимальное и максимальное количество марсиан, встреченных космонавтами.

Входные данные:
Два целых числа A и B, разделенных ровно одним пробелом ($1 \leq A \leq 100,\ 1 \leq B \leq 100$).

Выходные данные:
Выведите два целых числа, разделенных пробелом — минимальное и максимальное число марсиан. Гарантируется, что хотя бы одно количество марсиан соответствует условию задачи.

Пример:
Входные данные
3 4

Выходные данные

2 3
В приведенном примере возможны следующие варианты:

* Всего было два марсианина. Когда Артем считал ноги, один стоял на двух ногах, а другой — на одной. Артем насчитал три ноги. Когда Василий считал ноги, оба марсианина стояли на двух ногах, Василий насчитал четыре ноги.

** Всего было три марсианина. Когда Артем считал ноги, все стояли на одной ноге, Артем насчитал три ноги. Когда Василий считал ноги, один марсианин стоял на двух ногах, а еще два — на одной. Василий насчитал четыре ноги.

Задача 4

Вес тела на экваторе составляет $\eta\%$ от веса этого же тела на полюсе. Найдите период вращения планеты вокруг своей оси T, если плотность вещества планеты $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$кг/м^3. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$. Планету считайте однородным шаром.

Варьируемый параметр η выбирается от 94 до 98 с шагом 1.

Задача 5

> Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять, и произойдет так называемое удвоение настоящего.
>
> Станислав Лем,
> Звездные дневники Ийона Тихого.
> Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел своего двойника из среды. Каждый из Ийонов хочет починить рули ракеты, но для этого нужно выйти в открытый космос, а скафандр только один. Тогда они решают разыграть скафандр в следующей игре. «Вторничный» Ийон ставит на шахматную доску короля. Далее «средовый» может сдвинуть короля либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Затем по тем же правилам ход делает «вторничный», затем снова «средовый» и т.д. (пропускать ходы нельзя). Выигрывает тот, кто поставит короля на поле h8. На какое поле надо поставить короля «вторничному» Ийону, чтобы гарантировано выиграть? Выберите правильные ответы.

Варианты ответов: a1, a2, a3, b2, b3, b4, c2, d2.

Задача 6

Искусственный спутник Земли, имеющий форму шара диаметра D м, движется по круговой орбите со скоростью $v = 7{,}9$ км/с. Давление воздуха на высоте орбиты спутника $p = 0{,}9$ Па, температура $T = 270$ К. Полагая, что скорость теплового движения молекул воздуха пренебрежимо мала по сравнению со скоростью спутника, найдите среднее число $\bar{z}$ столкновений молекул со спутником в единицу времени. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$Дж/К.

Варьируемый параметр D выбирается от 0,8 до 1,2 с шагом 0,1.

Задача 7

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми. Передвигаться по ней было почти невозможно. Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев, а один, кажется, даже из будущего года... Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь, уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 7 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше восьми, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько Ийонов может оказаться в ракете, если в начале путешествия Ийон был один? Отметьте верные ответы.

Варианты ответов: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 45, 57, 103, 147.

Задача 8

В звездном скоплении 251 звезда, причем каждая из них имеет блеск 16^m. Каков полный блеск этого скопления? Приведите подробное решение.

Задача 9

Четверговый аккуратно разбивал ножом яйца и выливал их содержимое в шипящий жир.
– О, прошу прощения, – запротестовал я, – свой рацион за среду ты уже съел, ты не имеешь права второй раз за среду ужинать!

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, видит в среду своего двойника из четверга. «Средовый»

Ийон Тихий хочет разделить с «четверговым» кусок сыра, имеющий форму правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$. Ийон из среды отрезает «четверговому» одним плоским разрезом пирамиду $TAB'C'D'$ (точка B' лежит на ребре TB, точка C'–на ребре TC, точка D'– на ребре TD). Поскольку «четверговый» внимательно следит за процессом разрезания, то «средовый» Ийон выбирает ки B' и D' так, что $TB: B'B = TD: D'D = x$. Найдите отношение объемов $V_{TAB'C'D'}: V_{TABCD}$.

Варьируемый параметр x выбирается от 1,5 до 2,5 с шагом 0,1.

Задача 10

Луноход пытается связаться с Землей. Из-за особенностей рельефа и трудностей связи, зона уверенной связи на поверхности планеты имеет форму многоугольника, причем связь возможна только из точек, имеющих целочисленные координаты. Из точек на границе многоугольника связь неустойчива, за пределами многоугольника связь невозможна.

Координаты вершин многоугольника – целые числа, всего N вершин.

Требуется найти количество точек, из которых можно установить уверенную связь с Землей. Стороны многоугольника друг с другом не соприкасаются (за исключением соседних – в вершинах) и не пересекаются.

Ограничения: $3 \leq N \leq 100\ 000$, координаты вершин целые и по модулю не превосходят 1000 000.

Входные данные:

В первой строке содержится число N, в следующих N строках – пары чисел – координаты точек. Если соединить точки в данном порядке, а также соединить первую и последнюю точки, получится заданный многоугольник.

Выходные данные:

Вывести одно число – количество точек, лежащих внутри многоугольника и не лежащих при этом на его границе.

Пример:

Входные данные

3

1 0

0 0

0 1

Выходные данные

0

Очный тур

Задача 1

Во время своего очередного путешествия Ийон Тихий стартовал с Земли и, двигаясь с постоянной скоростью, прибыл на планету Панту в полдень 1 апреля. В пути он подсчитал, что, если бы его скорость была на 20% больше, он прилетел бы ровно на 4 дня раньше. Какого числа Ийон Тихий покинул Землю?

Задача 2

Планета двигалась по круговой орбите радиуса $R = 26$ астрономических единиц, но внезапно остановилась и начала падать на Солнце. Через какое время t (суток) она достигнет поверхности Солнца? (Считайте, что R много больше радиуса Солнца.)

Задача 3

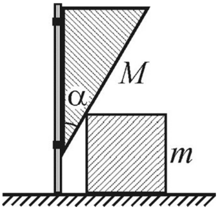
Вес выводимого на орбиту спутника не превышает 1 тонны. Одна ракета-носитель может вывести на орбиту не более 4 тонн полезной нагрузки.

Докажите, что группировку спутников общей массой 36 тонн можно вывести на орбиту не более чем за 11 пусков.

Напишите алгоритм, распределяющий спутники по запускам в условиях этой задачи, на вашем любимом языке программирования.

Задача 4

Клин массой $M = 1$ кг с углом $\alpha = 30°$ при вершине может двигаться поступательно по вертикальным направляющим. Боковой стороной



он касается кубика массой $m = 0{,}9$ кг, лежащего на горизонтальной поверхности стола. Найдите ускорение a, с которым будет двигаться клин, если его отпустить. Трением между всеми поверхностями можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до одного знака после запятой.

Задача 5

Бортовой компьютер вышел из строя и вместо любого числа выводит на экран только его последнюю цифру. Компьютеру была дана задача: вычислить $22^{88} + 88^{22}$. Какую цифру он выведет на экран?

Задача 6

Космонавты, находящиеся на борту международной космической станции (МКС), проводят открытый урок по физике для учащихся седьмых – одиннадцатых классов. Предложите эксперимент, который они бы могли продемонстрировать. Опишите (в свободной форме, в объеме двух – трех страниц) сам эксперимент, его физическую подоплеку, укажите, почему его интересно провести именно на борту МКС (ссылки на соответствующие законы физики приветствуются).

Варианты для 7 – 9 классов

Заочный тур 1

Задача 1

Из какой точки на поверхности Луны должен выехать луноход, чтобы, пройдя 35 км на север, затем 20 км на восток, а затем 35 км на юг, он оказался в исходной точке? Приведите подробное решение.

Задача 2

Луноход умеет передвигаться, исполняя заранее заданную программу. Программа может состоять из команд: сделать шаг на Юг, на Север, на Восток или на Запад. Луноход исполняет программу строго последовательно и, дойдя до конца программы, останавливается. Сколькими различными способами, выполняя программу, состоящую из K инструкций, луноход может добраться в точку с координатами (X, Y) из начала координат?
Оси координат располагаются параллельно сторонам света, и единица измерения, соответствует одному шагу робота. Напишите программу, которая дает ответ на этот вопрос.

Входные данные:
Программа считывает три числа K, X и Y $(0 \leq K \leq 16, |X|, |Y| \leq 16)$, разделенные пробелами.

Выходные данные:
Одно число – количество программ для робота.

Пример:
Входные данные
4 0 0

Выходные данные
36

Задача 3

Освоенный участок лунной поверхности имеет форму треугольника ABC. В вершине B находится космический корабль, в точке C – лунная станция, в точке A – излучатель. От станции к кораблю проложена прямая дорога. На этой дороге выбрана точка H – ближайшая к излучателю, а на полпути от точки H до излучателя, в точке M, установлена антенна. В данный момент луноход находится на станции. Он начинает движение по отрезку CA, в какой-то момент, не дойдя до A, делает поворот и продолжает движение по прямой линии, проходящей через M, до пересечения с отрезком AB. Здесь луноход снова поворачивает, движется по прямой AB до корабля, а затем возвращается на станцию по дороге BC. Какова наибольшая площадь участка, который может объехать луноход при этих условиях, если $AH = 12$ км, а отрезки BH и CH равны y км и z км соответственно? Участок поверхности считаем плоским. Дайте численный ответ в км^2 с точностью до двух знаков после запятой (например, 10,29).

Варьируемые параметры y и z выбираются от 2 до 6 с шагом 1 так, чтобы $y \neq z$.

Задача 4

Для наблюдателя на Земле Солнце имеет видимую звездную величину $-26{,}7^m$, а полная Луна $-12{,}7^m$. Определите, во сколько раз сильнее Солнце освещает поверхность Плутона, чем полная Луна – поверхность Земли. Расстояние от Солнца до Плутона примите равным 40 а.е. Приведите подробное решение.

Задача 5

Высота Солнца над горизонтом составляет угол α градусов. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало для того, чтобы осветить солнечными лучами дно глубокого вертикального колодца? Дайте ответ в градусах (например, 46).

Варьируемый параметр α выбирается от 26 до 42 с шагом 2.

Задача 6

> Когда в понедельник, второго апреля, я пролетал вблизи Бетельгейзе – метеорит, размером не больше фасолины, пробил обшивку, вывел из строя регулятор мощности и повредил рули – ракета потеряла управление.
>
> Станислав Лем,
> Звездные дневники Ийона Тихого.
> Путешествие седьмое: 147 вихрей

Чтобы не допустить перегрева пробитого метеоритом реактора, Ийон Тихий поставил на него ведро с холодной водой. Для нагревания этой воды от температуры $t_1 = 20°C$ до температуры $t_2 = 100°C$ понадобилось время τ мин. При этом к воде ежесекундно подводилось одинаковое количество теплоты. За какое время τ_1 вся эта вода выкипит, если скорость подвода теплоты не изменится? Теплообменом воды с окружающими телами можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ Дж/г·К. Удельную теплоту парообразования воды примите равной $r = 2{,}3$ МДж/кг. Ответ дайте в минутах с точностью до десятых долей минуты (например, 95,2).

Варьируемый параметр τ выбирается от 6 до 15 с шагом 1.

Задача 7

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел двух дублей самого себя, из завтрашнего и послезавтрашнего дней. Вторничный Ийон Тихий хочет починить рули ракеты и для этого перекладывает гаечные ключи из ящика в карманы скафандра. Вначале в ящике лежат $N = 31$ ключей. Каждый ключ «вторничный» Тихий сначала в течение $t_1 = 12$ секунд ищет в ящике, а затем в течение $t_2 = 20$ секунд укладывает в карман скафандра. «Средовый» и «четверговый» Ийоны Тихие мешают ему. Дождавшись момента, когда «вторничный» Ийон начинает искать в ящике очередной ключ, один из дублей (но не оба) может вытащить из скафандра один ключ (на это ему требуется ровно $t_3 = 12$ секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный ключ, у «средового» уходит $t_4 = 78$ секунд, после чего он готов украсть из скафандра следующий ключ, а «четверговый» прячет ключ за $t_5 = 138$ секунд. Какое наименьшее число ключей может оказаться в кармане скафандра в тот момент, когда «вторничный» Ийон положит туда последний ключ?

Задача 8

…ключ вырвался у меня из-под ногии умчался в космическое пространство… Став спутником ракеты, он напоминал мне о поражении и не приближался к ней настолько, чтобы я мог его схватить. …выброшенная за борт говядина, вместо того чтобы улететь в пространство, не хотела расставаться с ракетой и кружила около нее, как второй искусственный спутник.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Два спутника движутся по кольцевой орбите длины L в противоположных направлениях. В момент начала наблюдения они находятся в одной точке и движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 соответственно. Требуется определить, на каком расстоянии друг от друга они окажутся в момент времени T. Напишите программу на Вашем любимом языке программирования.

Входные данные:
На вход подаются 4 натуральных числа L, v_1,v_2, T, разделенных пробелом. Все числа не превосходят 100.

Выходные данные:
Выведите расстояние между спутниками в момент времени T – длину кратчайшей из двух дуг дороги между спутниками.

Примеры:
Входные данные
10 1 2 1

Выходные данные
3

Входные данные
10 2 3 2

Выходные данные
0

Задача 9

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми. Передвигаться по ней было почти невозможно. Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев, а один, кажется, даже из будущего года... Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь, уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 3 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше четырех, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько вихрей могла пройти ракета всего, если в начале и в конце путешествия Ийон был один? Отметьте верные ответы.

Варианты ответа: 2, 4, 5, 25, 45, 147.

Задача 10

Потом говорили, что эту историю я выдумал, а злопыхатели позволяли себе распространять гнусные сплетни, будто я питаю слабость к алкоголю и, тщательно скрывая это на Земле, предаюсь своему пороку в течение долгих лет космических путешествий.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В память о путешествии Ийон Тихий заказал изготовить золотой гаечный ключ. Однако мастер, питая к Ийону зависть, вместо чистого золота использовал сплав золота и меди. Ключ имеет массу m кг и плотность $\rho = 16{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Считая, что объем сплава равен суммарному объему исходных компонент, определите массу m_1 золота в этом изделии. Плотность золота $\rho_1 = 19{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность меди $\rho_2 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ответ дайте в кг с точностью до двух знаков после запятой (например, 0,76).

Варьируемый параметр m выбирается из диапазона от 1,1 *до* 1,8 *с шагом* 0,1.

Заочный тур 2

Задача 1

Из какой точки на поверхности Луны должен выехать луноход, чтобы, пройдя 300 км на север, затем 300 км на восток, затем 300 км на юг и 300 км на запад, он оказался в исходной точке? Приведите подробное решение.

Задача 2

Луноход пытается связаться с Землей. Из-за особенностей рельефа и трудностей связи, зона уверенной связи на поверхности планеты имеет форму многоугольника, причем связь возможна только из точек, имеющих целочисленные координаты. Из точек на границе многоугольника связь невозможна.

Координаты вершин многоугольника – целые числа, всего N вершин. Требуется найти количество точек, из которых можно установить уверенную связь с Землей. Стороны многоугольника друг с другом не соприкасаются (за исключением соседних – в вершинах) и не пересекаются.

Ограничения: $3 \leq N \leq 100\,000$, координаты вершин целые и по модулю не превосходят 1 000 000.

Входные данные:

В первой строке содержится число N, в следующих N строках – пары чисел – координаты точек. Если соединить точки в данном порядке, а также соединить первую и последнюю точки, получится заданный многоугольник.

Выходные данные:

Вывести одно число – количество точек, лежащих внутри многоугольника и не лежащих при этом на его границе.

Пример:

Входные данные

4

1 1

1 3

3 3

3 1

Выходные данные

1

Задача 3

Освоенный участок лунной поверхности имеет форму квадрата $ABCD$ со стороной y км. От середины отрезка AB (точка K) до середины отрезка CD (точка N) проложена дорога по прямой – отрезок KN. Луноход выезжает из точки A, выбирает на этом отрезке две точки L и M и движется по маршруту $ALCM$ так, что площади четырехугольников $ABCL$, $ALCM$ и $AMCD$ равны. Найдите расстояние LM. Дайте численный ответ в км, округлив до двух знаков после запятой (например, 2,29).

Варьируемый параметр y выбирается от 2 до 6 с шагом 1.

Задача 4

Для наблюдателя на Земле видимая звездная величина Луны в полнолуние равна $-12{,}7^m$. А какой бы она была, если бы система Земля-Луна располагалась в поясе Койпера, например, у орбиты Плутона? Расстояние от Солнца до Плутона примите равным 40 а. е. Приведите подробное решение.

Задача 5

Когда в понедельник, второго апреля, я пролетал вблизи Бетельгейзе – метеорит, размером не больше фасолины, пробил обшивку, вывел из строя регулятор мощности и повредил рули – ракета потеряла управление.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Чтобы не допустить перегрева пробитого метеоритом реактора, Ийон Тихий поставил на него ведро с холодной водой. Для нагревания этой воды от температуры $t_1 = 10°\mathrm{C}$ до температуры $t_2 = 100°\mathrm{C}$ понадобилось время τ мин. При этом к воде ежесекундно подводилось одинаковое количество теплоты. Затем за время τ_1 вся эта вода выкипела. Чему равно τ, если скорость подвода теплоты не меняется?

Теплообменом воды с окружающими телами можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ Дж/г. Удельную теплоту парообразования воды примите равной $r = 2{,}3$ МДж/кг. Ответ дайте в минутах с точностью до десятых долей минуты (например, 95,2).

Варьируемый параметр τ_1 выбирается от 6 до 15 с шагом 1.

Задача 6

...ракета между тем неслась вслепую, то и дело попадая в гравитационные вихри.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Чтобы не пострадать от летающих по ракете предметов, перед прохождением очередного вихря Ийон Тихий привязал себя к стулу и закрепил все тяжелые предметы.

Первоначально недеформированная пружина, которая удерживала ящик с инструментами, при прохождении вихря медленно растянулась на некоторую величину x, совершив работу $A_1 = 1$ Дж. Затем растяжение пружины дополнительно увеличилось еще на величину nx. Какая работа A_2 была совершена при дополнительном растяжении пружины?

Варьируемый параметр n выбирается от 1,6 до 2,4 с шагом 0,1.

Задача 7

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел двух дублей самого себя, из завтрашнего и послезавтрашнего дней. Вторничный Ийон Тихий съел $x\%$ дневного запаса питания, «средовый» съел $y\%$ остатка, а «четверговый» доел оставшиеся 2,5кг. Сколько кг питания было всего? Приведите полное решение.

Варьируемые параметры x и y выбираются от 20 до 40 с шагом 5.

Задача 8

На поверхности планеты заданы две точки своими широтой и долготой. Найдите минимальную длину пути по поверхности этой планеты из одной точки в другую. Напишите программу на своем любимом языке программирования.

Входные данные:
В первой строке находится число R – радиус планеты в километрах, во второй строке заданы широта и долгота первой точки, в третьей строке – широта и долгота второй точки. Широта в градусах от -90 до 90, долгота в градусах от -180 до 180, $100 \leq R \leq 10\,000$, все числа вещественные.

Выходные данные:
Длина пути в километрах с двумя знаками после запятой.

Пример:
Входные данные
3437.5
$-45\ \ -45$
$45\ \ -45$

Выходные данные
5399.61

Задача 9

> Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми. Передвигаться по ней было почти невозможно. Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев, а один, кажется, даже из будущего года... Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь, уменьшивший наше количество наполовину.
>
> Станислав Лем,
> Звездные дневники Ийона Тихого.
> Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 3 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше четырех, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько Ийонов может оказаться в ракете, если в начале путешествия Ийон был один?

Варианты ответа: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 25, 45, 147.

Задача 10

Потом говорили, что эту историю я выдумал, а злопыхатели позволяли себе распространять гнусные сплетни, будто я питаю слабость к алкоголю и, тщательно скрывая это на Земле, предаюсь своему пороку в течение долгих лет космических путешествий.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В память о путешествии Ийон Тихий заказал изготовить золотой гаечный ключ. Однако мастер, питая к Ийону зависть, вместо чистого золота использовал сплав золота и меди. Ключ имеет массу $m = 1{,}6$ кг и объем V дм^3. Считая, что объем сплава равен суммарному объему исходных компонент, определите массу m_1 золота в этом изделии. Плотность золота $\rho_1 = 19,3 \cdot 10^3$кг/м^3, плотность меди $\rho_2 = 8{,}9 \cdot 10^3$кг/м^3. Ответ дайте в кг с точностью до двух знаков после запятой (например, 0,76).

Варьируемый параметр V выбирается от $0{,}1$ *до* $0{,}15$ *с шагом* $0{,}01$.

Очный тур

Задача 1

На планете Бинара принята двоичная система счисления. Каждое число записывается последовательностью нулей и единиц; последовательность $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, где каждая из цифр a_k – это 0 или 1, переводится в десятичную систему по правилу: $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_n \cdot 2^n$. Например, число 1011100 в двоичной системе равняется

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 =$$
$$= 4 + 8 + 16 + 64 = 92$$

в десятичной системе счисления. Малышка Би учится в первом классе и еще не очень хорошо умеет считать. Учитель задал ей вычислить: $100110 + 11011$=? Помогите Би, запишите правильный ответ в двоичной и десятичной системах счисления.

Задача 2

Сферический астероид имеет среднюю плотность 5,5 г/см^3 и радиус $R = 0{,}6$ километров. С какой минимальной скоростью V нужно подпрыгнуть космонавту, находящемуся на поверхности астероида, чтобы навсегда покинуть его и улететь в космос? Значение скорости укажите в метрах в секунду, ответ округлите до одного знака после запятой. Значение гравитационной постоянной примите равным $6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$; значение постоянной $\pi = 3{,}14$.

Задача 3

К концу длинного путешествия бортовой вычислитель на корабле Ийона Тихого стал разговаривать сам с собой. Одна из тем для обсуждения – натуральные числа. Взяв вначале для рассмотрения число 2, вычислитель размышлял над такой последовательностью:

2
12
1112
3112
132112
...

а) Напишите восьмой член последовательности.
б) Может ли какая-либо строка иметь вид “222”? Ответ обоснуйте.
в) Напишите алгоритм вычисления n –го члена последовательности на одном из Ваших любимых языков программирования или на естественном языке.

Задача 4

Металлический шарик, нагретый до температуры $t = 70$°C, положили в стакан с водой, имеющей температуру $t_0 = 20$°C. После достижения теплового равновесия температура воды в стакане стала равной $t_1 = 30$°C. Затем шарик переложили в другой стакан с таким же количеством воды, имеющей температуру t_0. Какая температура t_2 установится в этом стакане? Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

Задача 5

Пусть x и y – натуральные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

а) y делится на $x+1$;

б) $y=2x+8$;

в) $x+y$ делится на 3;

г) $7x+y+6$ – простое число

три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары (x,y) таких чисел.

Задача 6

Космонавты, находящиеся на борту международной космической станции (МКС), проводят открытый урок по физике для учащихся седьмых – девятых классов. Предложите эксперимент, который они бы могли продемонстрировать. Опишите (в свободной форме, в объеме $1-2$ страницы) сам эксперимент, его физическую подоплеку, укажите, почему его интересно провести именно на борту МКС (ссылки на соответствующие законы физики приветствуются).

Олимпиада 2018/2019 года

Разминка (все классы)

Заочный тур 1

1) Какой физический принцип помогает человеку достичь космоса?

   а) Принцип относительности (Эйнштейна).
   б) Принцип независимости движения.
   в) Принцип реактивного движения, основанный на законе сохранения импульса.
   г) Принцип Карно.

2) Какой самый крупный рукотворный объект существует или существовал в космосе?

   а) Автоматическая межпланетная станция «Джуно».
   б) Международная космическая станция.
   в) Космический корабль «Аполлон» для полетов на Луну.
   г) Космическая станция «Мир».

3) Зачем космические корабли перед поворотом наклоняются на одно из крыльев?

   а) Для того, чтобы увеличить скорость движения за счёт использования гравитационных сил.
   б) Это сокращает время маневра.
   в) Это заблуждение. В космосе нет атмосферы, и вращательное движение никак не связано с поступательным движением космического корабля.
   г) Чтобы солнце равномерно освещало и нагревало космический корабль.

4) Кто из людей первым ступил на другое небесное тело и когда?

   а) Харрисон Шмидт 14 декабря 1972.

б) Жан Лу Кретьен 24 июня 1982.
в) Нил Армстронг 20 июля 1969.
г) Алексей Леонов 18 марта 1965.

5) Может ли спутник, двигаясь вокруг Земли, быть наблюдаем постоянно с одного места на Земле?

а) Да, если движется по геостационарной орбите на высоте 36 000 км.
б) Нет, это невозможно.
в) Любой спутник всегда виден с любого места на Земле.
г) Да, если наблюдатель постоянно находится либо на Северном, либо на Южном полюсе.

6) Почему на звездных картах не изображают планеты?

а) Это историческая традиция – на звездных картах изображают только звезды, а планеты изображают на планетных картах.
б) Это неверно. На звездных картах почти всегда изображают не только звезды, но и планеты.
в) Потому, что планеты перемещаются из созвездия в созвездие.
г) Потому, что планеты, в отличие от звезд, не видны невооруженным глазом.

7) Какие метеорные потоки смогут наблюдать жители космической базы на Луне (когда она будет построена) долгими лунными ночами?

а) Примерно те же, что и на Земле.
б) Никаких метеоров они наблюдать не смогут.
в) В основном, метеоры из потока Леониды.
г) В основном, метеоры из потока Персеиды.

8) Где на Земле лучше строить космодромы в целях уменьшения затрат на выведение на орбиту 1 кг полезной нагрузки (затраты на содержание космодрома не учитываем)?

а) В горах на экваторе.
б) Во льдах на полюсе.
в) В лесах в Сибири.
г) В степях в Казахстане.

9) Для чего нужна астролябия?

а) Для определения высоты звезды над горизонтом.
б) Для измерения параллакса звезды.
в) Для определения звездной величины.
г) Для измерения расстояния от звезды до Земли.

10) На данный момент открыты тысячи экзопланет. Каковы результаты наблюдений – что больше (по величине радиуса), звезды или планеты?

а) Конечно, звезды!
б) Планеты – современные технические средства позволяют обнаруживать только гигантские планеты.
в) Бывает по-разному.
г) Науке это пока неизвестно. Радиусы экзопланет с достоверной точностью еще не замерены.

Заочный тур 2

1) Спутник при выведении на ракете всегда находится под головным обтекателем и не виден. Почему?

а) Внешний вид спутников – строго охраняемый секрет, так их прячут.
б) На спутнике есть радиопередающее оборудование, и головной обтекатель – это экран, чтобы не было помех для оборудования на космодроме.
в) Для нанесения рекламы спонсоров на головной обтекатель.
г) Для защиты спутника при полете ракеты через атмосферу.

2) У спутников много выступающих элементов: солнечных батарей, антенн и т.д. Почему они не ломаются, ведь скорость у спутника очень большая?

а) Они изготавливаются из очень прочных материалов на основе специальных технологий.
б) Они ориентированы относительно конструкции спутника таким образом, чтобы не испытывать воздействия.
в) В космосе нет атмосферы, соответственно нет воздействия на выступающие элементы (или оно ничтожно мало).
г) Они ломаются, но их регулярно ремонтируют космонавты.

3) Почему на поверхности Луны много кратеров, а на поверхности Земли их нет или очень немного?

а) На Луне нет атмосферы, которая могла бы защитить ее от падения метеоритов.
б) На самом деле, на поверхности Луна нет кратеров, потому что люди там были и даже ездили по лунной поверхности на роверах (машинах).
в) Потому что у Луны нет магнитного поля, а у Земли есть.
г) Луна находится на такой орбите, где много метеоритов, а Земля движется по другой орбите.

4) Где горы выше: на Марсе или на Земле?

а) На Марсе нет гор, а есть только кратеры.
б) На Земле, гора Джомолунгма.
в) Это неизвестно, человек еще не был на Марсе.
г) На Марсе, потухший вулкан Олимп.

5) У Венеры есть атмосфера. А почему тогда в основном говорят про полеты человека на Марс?

а) На Марсе есть полезные ископаемые, из которых можно получить топливо для обратного полета на Землю.
б) Атмосфера Венеры не пропускает радиоволны, и нет возможности поддерживать связь с Землей.

в) Полеты человека на Венеру тоже планируются.
г) Ввиду высокой плотности атмосферы и температуры.

6) Почему движение планет в солнечной системе происходит не в точном соответствии с законами Кеплера?

а) Законы Кеплера уже устарели, в настоящее время в них внесены поправки.
б) Потому, что на движение планет влияют другие объекты солнечной системы.
в) Потому, что воздействие солнечного ветра вносит коррективы.
г) Законы Кеплера описывают движение шаров идеальной формы, а планеты имеют неровности.

7) С помощью каких инструментов астрономы производят наблюдения в радиодиапазоне?

а) С помощью коротковолновых раций.
б) С помощью универсальных радиопередатчиков.
в) С помощью астролябий.
г) С помощью радиотелескопов.

8) Где на Земле сумерки самые короткие?

а) На экваторе.
б) За полярным кругом.
в) В Австралии.
г) В средней полосе.

9) Почему полярный день, длящийся с марта по сентябрь за полярным кругом в России всегда длиннее полярной ночи, длящейся с сентября по март?

а) Согласно указу президента России.
б) Потому, что орбита Земли не является идеальной окружностью.

в) Потому, что полярный день наступает раньше, чем солнце полностью поднимается над горизонтом, вследствие явления рефракции.
г) Потому, что полярный день наступает летом, а летом дни длиннее, чем ночи.

10) Если бы Луна повернулась к Земле обратной стороной, она была бы ярче или тусклее в полнолуние?

а) Ярче.
б) Тусклее.
в) Точно такой же.
г) Мы бы ее вообще не увидели, поскольку обратная сторона Луны – темная.

Варианты для 10 – 11 классов

Заочный тур 1

Задача 1

– Это чья лаборатория? – спросил Коля.
– Школьная. А чья же еще?
– А дельфины тоже школьные?
– Тоже школьные. И обезьяны, и питон Архимед.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

В рамках лабораторной работы школьник наблюдает за звездами. Звезда взошла в 00 час 01 мин по местному времени.
Сколько еще раз она пересечет горизонт в данном пункте в течение этих же солнечных (наших обычных) суток? Дайте развернутый ответ.

Задача 2

– Ну и как тебе это нравится? – спросил бородач у Коли.
– Вообще-то нравится, – сказал Коля, – хотя, простите, архитектура не очень подходящая.
– Почему же так?
– Я привык, что у домов должны быть углы и прямые стены,– сказал Коля. – Ну как в старинных зданиях.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

Дом имеет форму пирамиды $SABCD$ с вершиной S и основанием – трапецией $ABCD$. Углы между прямыми SA, SB, SC, SD и плоскостью основания равны 45°. Один из углов трапеции равен 60°, а диагональ, выходящая из вершины этого угла равна $x\sqrt{3}$.
Найдите высоту дома.

Варьируемый параметр x выбирается от 3 до 8 с шагом 1.

Задача 3

> Он вернулся к автобусу и прочитал надпись над дверью: «Вход. До Арбатской площади».
> … Тогда Коля подошел к соседнему автобусу. Над его задней дверью была надпись: «Вход. До Новодевичьего монастыря».
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Коля пытается добраться до Большого московского планетария. На информационном табло он нашел его географические координаты в градусах и их долях:
Широта: 55,76148861381986 N.
Долгота: 37,58380457382202 E.
Какой линейной точности на поверхности Земли соответствуют эти цифры? Сколько последних цифр в указанных выше числах нужно убрать, чтобы угловая точность координат соответствовала линейной точности на местности в 30 м (примерный радиус московского планетария)?

Задача 4

> – Вам куда надо?
> – На Уран, – ответил Коля, хотя на Уран раньше не собирался.
> – С какой целью туда направляетесь? – спросила справочная.
> «Хорошо еще, что автомат, а не живой человек, – подумал Коля. – Сейчас присмотрелись бы ко мне…»
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

В терминал встроена функция защиты от детей. Чтобы проверить возраст пассажира, Коле предложена задача. Найти наименьшее значение a, при каждом из которых уравнение

$$\log_2^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-p\cdot\log_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-3=a$$

имеет решение.

Варьируемый параметр p выбирается от 2 до 8 с шагом 2.

Задача 5

– Разве не видишь? – удивился мальчик. – Работаем.
– Понятно, что работаете. А над чем?
– Над спутником. Разве не похоже?
– Похоже, – сказал Коля. – Модель?
– Что мы, маленькие, что ли? Обыкновенный спутник связи, по школьной программе. Разве у вас в школе не делают?

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

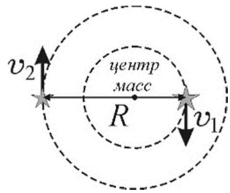
Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 500$ км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на Δh км. Найдите отношение η новой кинетической энергии спутника к ее первоначальному значению. Радиус Земли $R = 6400$ км. Ответ приведите в процентах, округлив до сотых.

Варьируемый параметр Δh *выбирается с шагом 1 от 100 до 200.*

Задача 6

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил.Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Крокрыс.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)



Планета Крокрыс вращается вокруг двойной звезды. Эта двойная звезда представляет собой систему из двух звезд разных масс, движущихся по круговым орбитам вокруг неподвижного центра масс с постоянными по модулю скоростями $v_1 = 10^5$ м/с и $v_2 = 5 \cdot 10^5$ м/с и одним и тем же периодом T с. Найдите расстояние R между звездами. Ответ приведите в метрах, разделив на 10^{10} и округлив до десятых.

Варьируемый параметр T *выбирается от* $4 \cdot 10^5$ *до* $5 \cdot 10^5$ *с шагом* $0{,}5 \cdot 10^5$.

Задача 7

> Пираты сидели в сквере, намаявшись от ходьбы. Весельчак У сказал: – Денег мало.
> – Я тебе сколько хочешь сделаю, – сказал Крыс. – Будут как настоящие.
> – Твои деньги опасные: на пять шагов отойдешь – они растают.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Утром в день прибытия в Москву у пиратов есть K рублей, но жадный Весельчак У в этот же день тратит N рублей. Каждый следующий день утром Крыс делает M рублей, а Весельчак У немедленно после этого тратит N рублей. Процесс повторяется, пока деньги у пиратов не кончатся. Если в какой-то день (возможно даже в первый день – день прибытия пиратов в Москву) к Весельчаку У попадает меньше либо равно N рублей, то он тратит их все без остатка, а без образца Крыс сделать деньги не может. Вечером какого дня деньги у пиратов закончатся (день прибытия нумеруется числом 1)? Напишите программу, которая отвечает на этот вопрос.

Входные данные: три целых числа K, M, N от 2 (включительно) до 10^9 (включительно), вводятся одной строкой через пробел.

Выходные данные: натуральное число – номер дня; если деньги у пиратов не закончатся никогда, то выходные данные: строка “NO”.

Пример 1: Входные данные "3 100 4". Выходные данные "1". Действительно, вечером, в день прибытия в Москву, у пиратов $3 - 3 = 0$ рублей (Весельчак У хотел бы потратить 4 рубля, но смог потратить только 3).

Пример 2: Входные данные "5 2 3". Выходные данные "3". Действительно, вечером, в день прибытия в Москву, у пиратов $5 - 3 = 2$ рубля. На следующий день вечером $2 + 2 - 3 = 1$ рубль, а на третий день вечером $1 + 2 - 3 = 0$ рублей.

Пример 3:
Входные данные "10 6 6".
Выходные данные “NO”.

Задача 8

> Миелофон … Ничего нового в технике не представляет. Просто электронный усилитель с приемником. Главное в нем – кристалл. А пока что эти кристаллы нашли только на астероиде Власта; совсем маленький, этот астероид примчался откуда-то из другой галактики миллион лет назад, попал в орбиту Солнца, вот и крутится с тех пор.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Космический зонд движется по круговой орбите радиусом R км вокруг астероида. Определите ускорение свободного падения g у поверхности этого астероида, если период обращения зонда $T = 100$ с. Астероид считайте однородным шаром радиусом $r = 50$ км. Ответ приведите в м/с^2, округлив до тысячных.

Варьируемый параметр R выбирается от 70 до 80 с шагом 1.

Задача 9

> Перед Колей стояло еще два автобуса. И на ближайшем была надпись: № 8 «КОСМОЗО – ПРОСПЕКТ МИРА». Коля, не колеблясь ни секунды, прыгнул в этот автобус, пробежал через салон, пронесся стрелой сквозь экран и оказался на остановке «Проспект Мира». Там он увидел автобус:№ 3 «ПРОСПЕКТ МИРА – ГОГОЛЕВСКИЙ БУЛЬВАР». Как назло, туда входило сразу несколько человек. Пришлось стоять в очереди.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

В очереди на вход в автобус изначально стоят N человек. За один такт времени человек, стоящий в очереди первым, может сесть в автобус (но может и не сесть). Кроме того, за один такт времени к очереди может присоединиться один новый человек (а может и не присоединиться). Любой обыкновенный пассажир, присоединяясь к очереди, встает в нее последним. Коля, пираты, Алиса и, возможно, другие торопливые пассажиры влезают в середину очереди. Если очередь состояла из четного числа человек (скажем, $2n$), то он встает на место $n + 1$, смещая половину очереди; если очередь состояла из нечетного числа человек (скажем $2n + 1$), то он влезает на место $n + 2$. Напишите программу, которая управляет такой очередью.

Команды пользователя:
В ответ на команду « $+\ N$ » программа помещает пассажира с данным номером N в конец очереди.
В ответ на команду « $*\ N$ » программа помещает пассажира с данным номером N в середину очереди (см. условие выше).
В ответ на команду « $-$ » программа удаляет первого пассажира из очереди (сажает его в автобус).

Входные данные:
В первой строке входных данных записано число N $(1 \le N \le 10^5)$ – количество запросов к программе. Следующие N строк содержат описание запросов в формате:
« $+\ i$ » – пассажир с номером i $(1 \le i \le N)$ встает в конец очереди.
« $*\ i$ » – торопливый пассажир с номером i $(1 \le i \le N)$ встает в середину очереди.
« $-$ » – первый пассажир из очереди уходит в автобус. Гарантируется, что на момент такого запроса очередь не пуста. Предполагается, что в начале работы программы очередь пуста.

Выходные данные:
Для каждого запроса типа « $-$ » программа должна вывести номер пассажира, который должен зайти в автобус.

Пример:
Входные данные
7
+ 1
+ 2
−
+ 3
* 4
−
−
Выходные данные
1
2
4

Задача 10

> Коля Садовский бился у доски, исписав половину свободного пространства, и никак не мог выпутаться из уравнения.
> ….
> И тогда Алиса с места, не вставая – никак не могла научиться, – сказала:
> – Икс равен единице.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Для проверки математических способностей Алисы учитель математики задала ей следующую задачу. Для некоторых восьми натуральных чисел, больших 1 и не превосходящих 250, вычислили произведение каждых семи из них. Нам известны семь произведений 240240, 258720, 280280, 305760, 480480, 672672 и 1681680. Известно, что восьмое произведение равно одному из этих семи. Найдите эти числа. В ответе укажите их сумму.

Варьируемый параметр – набор произведений.
Он может быть либо 240240, 258720, 280280, 305760, 480480, 672672 и 1681680,
либо 120120, 141960, 223080, 312312, 390390, 520520, 780780.

Заочный тур 2

Задача 1

> – А тебе что, никогда на Марс не хотелось? – спросил Коля.
> – Мне? Я тогда полечу на Марс, когда смогу принести там пользу, – сказал курчавый. – Для этого и учусь.
> – Не верь ты ему, – сказал другой парень, постарше.
> – Он не только хотел на Марс попасть, но даже забрался в грузовой корабль. Хорошо еще, вовремя вытащили, а то бы замерз в космосе.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Может ли космонавт, находящийся на Деймосе (спутник Марса), наблюдать солнечные затмения? Дайте развернутый ответ.

Задача 2

> – Ну и как тебе это нравится? – спросил бородач у Коли.
> – Вообще-то нравится, – сказал Коля, – хотя, простите, архитектура не очень подходящая.
> – Почему же так?
> – Я привык, что у домов должны быть углы и прямые стены, – сказал Коля. – Ну как в старинных зданиях.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»)

Дом имеет форму пирамиды $SABCD$ с вершиной S и основанием – ромбом $ABCD$. Высота пирамиды падает в точку пересечения диагоналей ромба. Угол между прямой BS и плоскостью ASC равен 30°, а площадь основания пирамиды равна $x\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника ASC.

Варьируемый параметр x выбирается от 20 до 30 с шагом 2.

Задача 3

> И только тут Коля разобрал, что мужчина одет в темно-синий облегающий комбинезон, на груди у него вышит золотом Сатурн с кольцом, а на рукаве – четыре звезды.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»)

Может ли космонавт, находящийся на борту международной космической станции, наблюдать на поверхности Земли одновременно космодромы Плесецк и Восточный? Расстояние между космодромами по поверхности Земли примите равным 4957 км. Высота орбиты МКС колеблется от 340 до 430 км. Дайте развернутый ответ.

Задача 4

> – Вам куда надо?
> – На Уран, – ответил Коля, хотя на Уран раньше не собирался.
> – С какой целью туда направляетесь? – спросила справочная.
> «Хорошо еще, что автомат, а не живой человек, – подумал Коля. – Сейчас присмотрелись бы ко мне…»
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»)

В терминал встроена функция защиты от детей. Чтобы проверить возраст пассажира, Коле предложена задача.

Найти наибольшее значение a, при каждом из которых уравнение

$$a \cdot 3^{\sqrt[3]{1-x}} + 3^{\sqrt[3]{x-1}} - q = 4$$

имеет решение.

Варьируемый параметр q выбирается от 2 до 8 с шагом 2.

Задача 5

– Разве не видишь? – удивился мальчик. – Работаем.
– Понятно, что работаете. А над чем?
– Над спутником. Разве не похоже?
– Похоже, – сказал Коля. – Модель?
– Что мы, маленькие, что ли? Обыкновенный спутник связи, по школьной программе. Разве у вас в школе не делают?

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

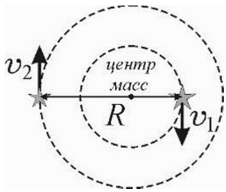
Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 500$ км над поверхностью Земли и движется по ней с постоянной скоростью V_1. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на Δh км. Найдите отношение η новой кинетической энергии спутника к ее первоначальному значению. Радиус Земли $R = 6400$ км. Ответ приведите в процентах, округлив до сотых.

Варьируемый параметр Δh выбирается с шагом 1 от 100 до 200.

Задача 6

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил. Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Крокрыс.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)



Планета Крокрыс вращается вокруг двойной звезды. Эта двойная звезда общей массой $M = x \cdot 10^{30}$ кг представляет собой систему из двух звезд, движущихся по круговым орбитам вокруг неподвижного центра масс с постоянными по модулю скоростями $v_1 = 10^5$ м/с и $v_2 = 5 \cdot 10^5$ м/с и одним и тем же периодом T. Найдите массу первой и второй звезды. Ответ приведите в килограммах, разделив на 10^{30} и округлив до десятых.

Варьируемый параметр x выбирается от 3 *до 12 с шагом* 3.

Задача 7

Коля подошел к одному из входов в здание. Над ним была надпись: «МОСКОВСКИЙ КОСМОДРОМ-1» «ПЛАНЕТАРНЫЕ СООБЩЕНИЯ»

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

В период времени $t \in [1; T]$ с космодрома выводятся на орбиту N спутников. Время выхода на орбиту спутника обозначим l. Пробыв некоторое время на орбите, каждый спутник в какой-то момент $r \in [1; T]$ покидает ее. Напишите программу, которая умеет определять число спутников на орбите в заданные M моментов времени.

Входные данные: Во входном файле даны сначала $T,\ N,\ M\ (1 \le T \le 10000, 1 \le N \le 10000, 1 \le M \le 10000)$.
Далее идут N пар чисел $l \le r$ от 1 до T каждое – момент выхода на орбиту данного спутника и момент схода с нее.
Затем идут M чисел от 1 до T $-$ интересующие нас моменты времени, в которые надо замерить число спутников на орбите.
Все числа целые. Разделены пробелом.

Выходные данные: M чисел – число спутников на орбите в каждый из моментов времени.

Пример:
Входные данные: $100\ 5\ 3\ 1\ 20\ 5\ 40\ 10\ 100\ 50\ 60\ 2\ 80\ 5\ 50\ 100$.
Первые три числа показывают, что работа идет на отрезке времени $[1; 100]$, запускают $N = 5$ спутников, надо $M = 3$ раза замерить число спутников. Далее идут 5 пар чисел, которые говорят, что первый спутник находился на орбите в отрезок времени $[1; 20]$, второй – в отрезок $[5; 40]$ и так далее. Последние 3 числа означают, что надо дать ответ на 3 вопроса: сколько спутников находилось на орбите в моменты времени 5, 50 и 100.

Выходные данные 3 3 1

Действительно, в момент времени $t = 5$ на орбите находились первый, второй и пятый спутники; в момент времени $t = 50$ – третий и четвертый спутники; в момент времени $t = 100$ – только третий спутник.

Задача 8

> Миелофон … Ничего нового в технике не представляет. Просто электронный усилитель с приемником. Главное в нем – кристалл. А пока что эти кристаллы нашли только на астероиде Власта; совсем маленький, этот астероид примчался откуда-то из другой галактики миллион лет назад, попал в орбиту Солнца, вот и крутится с тех пор.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Космический зонд движется по круговой орбите радиусом R км вокруг астероида. Считая астероид однородным шаром радиусом $r = 20$ км, найдите его плотность, если период обращения зонда $T = 24\,000$ с. Астероид считайте однородным шаром радиусом, гравитационную постоянную примите равной $6{,}67 \cdot 10^{-11}$кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2} \cdot$ м^3. Ответ приведите в кг/м^3, округлив до тысячных.

Варьируемый параметр R выбирается от 70 до 80 с шагом 1.

Задача 9

> Когда почти всех пиратов переловили, эти два бандита объединили усилия, хотя прежде враждовали. С тех пор вот уже пять лет они вместе шастают по Галактике. Им приходится таиться. Еще недавно у них был свой корабль и несколько подручных, но, когда экспедиция на «Пегасе» с помощью трех капитанов победила их, пираты совсем оскудели.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Космические пираты Крыс и Весельчак У откопали клад, содержащий N слитков криптонита. Масса каждого слитка – целое число кг. Клад надо разделить, но пилить слитки сложно – пила изношена и сможет распилить только один слиток. Требуется распилить не более одного из них на две части (не обязательно равные, но с целой массой), после чего разделить слитки на две кучи равной массы.

Входные данные:
В первой строке вводится одно натуральное число N, не превосходящее 100.
Во второй строке через пробел вводятся N натуральных чисел, не превосходящих 100 – массы имеющихся слитков.

Выходные данные:
Выведите массы слитков, которые вошли в первую кучку (включая массу части распиленного слитка).
Если решений несколько, выведите любое из них.
Если решений нет, выведите фразу NO SOLUTION (заглавными буквами).
Выводить массы можно в произвольном порядке, но масса части распиленного слитка (если таковой имеется) должна быть последней.

Пример 1:
Входные данные: 2 3 6
Найдены два слитка массой 3 и 6 кг.
Выходные данные: NO SOLUTION

Пример 2:
Входные данные: 3 9 3 6
Найдены три слитка массой 9, 3 и 6 кг.
Выходные данные: 9
Первый пират забрал себе первый слиток. Остальные забрал второй пират.
Возможно и другое решение: "3 6". Первый пират взял себе второй слиток, а также отпилил 6 кг от первого. Второй пират взял третий слиток и 3 кг от первого.

Пример 3:
Входные данные: 4 6 2 5 5
Найдены четыре слитка массой 6, 2, 5 и 5 кг.
Выходные данные: 2 5 2

Первый пират забрал себе второй и третий слиток, а также отпилил 2 кг от первого слитка. Второму пирату достался четвертый слиток, а также 4 кг от первого слитка.

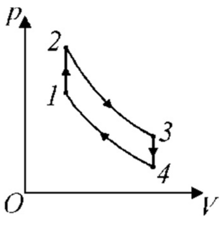
Задача 10

> Коля Садовский бился у доски, исписав половину свободного пространства, и никак не мог выпутаться из уравнения.
>
> ….
>
> И тогда Алиса с места, не вставая – никак не могла научиться, – сказала:
>
> – Икс равен единице.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

На уроке математики класс тренируется вычислять процент от числа. Сначала Алиса написала на доске некоторое натуральное число. Остальные ребята разделились на 4 группы. Каждый ученик из первой группы подходит к доске, увеличивает написанное число на 35%, после чего стирает исходное число и заменяет результатом своих вычислений. Каждый ученик из второй группы действует аналогично, но увеличивает написанное число на 25%. Каждый ученик из третьей группы увеличивает написанное число на треть, а каждый ученик из четвертой группы – уменьшает на треть. После того, как каждый из учеников класса (не считая Алисы) побывал у доски ровно один раз, исходное число увеличилось на 8%. Сколько ребят было в каждой группе, если всего в классе (не считая Алисы) ровно 20 учеников? Запишите в ответе четыре числа через пробел.

Очный тур

Задача 1



Мальчик решил установить на свой беспилотник бензиновый двигатель внутреннего сгорания. В качестве аппроксимации рабочего процесса в двигателе внутреннего сгорания он использует так называемый термодинамический цикл Отто, названный в честь немецкого инженера Николауса Отто. На рисунке изображена pV-диаграмма цикла Отто, проводимого над идеальным газом. Этот цикл состоит из двух изохор *1 – 2*, *3 – 4* и двух адиабат *2 – 3*, *4 – 1*. Известно, что работа, совершаемая газом за цикл, в 1,5 раза больше, чем количество теплоты, отдаваемое газом за цикл холодильнику. Найдите коэффициент полезного действия цикла.

Задача 2

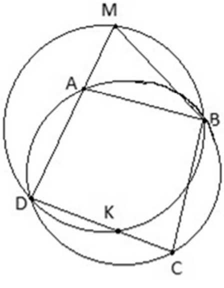
Бензиновый двигатель оказался слишком тяжелым для беспилотника, и мальчик решил попробовать электрический винтовой двигатель на современных аккумуляторах. Для того, чтобы протестировать двигатель, мальчик установил его на тележку, которую спускает вниз по доске (двигатель тянет тележку вниз), лежащей на покрытой льдом поверхности горки. При этом винт двигателя создает такое ускорение, что доска остается неподвижной (трение между льдом и доской считайте пренебрежимо малым). Масса электрического двигателя (с аккумуляторами, винтом и т.д.) $m_0 = 1$ кг, масса тележки $m_1 = 2$ кг, масса доски $M = 4$ кг, поверхность горки образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Найдите силу тяги винта (в ньютонах с точностью до десятых).

Задача 3

Продолжив свои занятия в кружке, мальчик в команде с другими ребятами запустил на аэростате передатчик телеметрии. При первичном измерении была допущена ошибка – датчик определил свою скорость как $10 + x$ вместо 10. В следующий раз скорость была вычислена на основании предыдущей, так что ошибка стала накапливаться. Зная суммарную относительную ошибку, найдите исходную ошибку x, решив уравнение

$$\frac{10}{(x+10)} + \frac{10 \cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \cdots + \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1}{(x+10)(x+9)\ldots(x+1)} = 11$$

Задача 4



В результате ошибок позиционирования аппарат после спуска на землю был утерян. Для его поиска вначале была определена круговая область и четырехугольник $ABCD$ с точками на окружности. Затем, однако, информация о месте посадки была уточнена, в результате чего была определена другая область для поиска (также имеющая форму круга). При этом точка A была смещена в точку M вдоль прямой AD, точка C – в точку Kвдоль прямой CD, а точки B и D не менялись, так что получился четырехугольник $MBKD$ с точками на новой окружности (см. рисунок). Найдите AM, если $AB = 6$, $BC = 7$, $CK = 2$.

Задача 5

Ребята пытаются провести анализ снимков леса, полученных при последнем запуске. На темно-зеленом фоне леса хорошо видны светло-зеленые прямоугольники – результаты вырубок. Рассмотрим прямоугольный участок леса размера $M \times N$ метров с нижней левой вершиной в начале координат локальной карты и сторонами, параллельными осям координат. Нам известны снимки K прямоугольных вырубок размера 300×300 метров с координатами левой нижней точки (x, y) для каждой вырубки. Найдите площадь сохранившегося леса. Для решения задачи напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая принимает на вход следующие данные:

Первая строка – два натуральных числа M и N – размер лесной области.

Вторая строка – натуральное число K – количество снимков с вырубками.

K последующих строк – пары натуральных чисел x y – координаты левого нижнего угла снимка

Программа должна вывести натуральное число S – площадь сохранившегося лесного участка в квадратных метрах.

Пример:

Входные данные

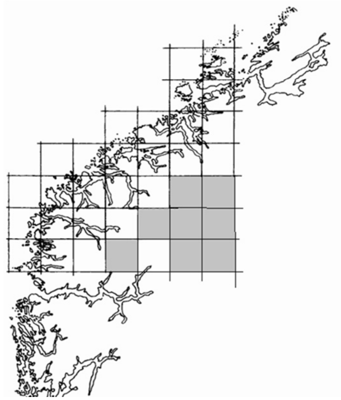
```
500 500
2
0 0
100 100
```

Выходные данные

```
110000
```

Задача 6

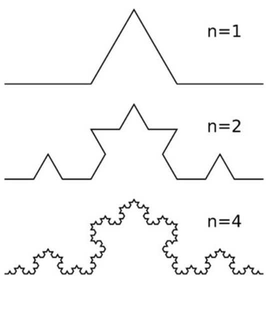
При анализе космических снимков часто приходится делить точки снимка на два класса: нетронутый лес/вырубка, море/суша и так далее. При этом часто необходимо оценить площадь и периметр области (вырубки, острова, ледника) и т.д.



а) Предположим, Вам доступны снимки с произвольным (каким угодно большим) разрешением. Как бы Вы измерили площадь большого объекта по набору его снимков?

б) Как бы Вы стали измерять “величину границы” объекта? В Вашем ответе постарайтесь учесть следующее. Мы знаем, что при гомотетии с коэффициентом k площадь треугольников и четырехугольников меняется в k^2 раз. Также происходит и со сложными фигурами, получаемыми при картографировании. Мы знаем, что при такой гомотетии периметры простых фигур (треугольников, четырехугольников и т.п.) меняются в k раз. Оказывается, что границы фигур, получаемых при картографировании, ведут себя не так. При изменении масштаба снимка в k раз они меняют свою длину в k^D раз, где D (оно называется фрактальной размерностью границы) отлично от 1 (например, при картографировании побережья Норвегии, это число экспериментально определено равным 1,52, а для побережья Великобритании 1,3).

в) Рассмотрим модельную ситуацию – “береговую линию”, построенную по следующему алгоритму. Вначале взяли отрезок на плоскости с концами (0,0) и (1,0). На первом шаге разбили этот отрезок на три равные части, построили на центральной части, как на основании равносторонний треугольник, основание стерли. На втором шаге с каждым из четырех звеньев полученной ломаной поступили так же. И так далее. Найдите фрактальную размерность этой кривой.



Варианты для 7 – 9 классов

Заочный тур 1

Задача 1

Никогда не поздно будет выключить снова, подумал Коля и повернул переключатель. Возникло тихое жужжание, стрелки приборов на панели дрогнули, и некоторые из них передвинулись. Коля хотел было повернуть выключатель обратно, но тут услышал за спиной негромкий щелчок.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

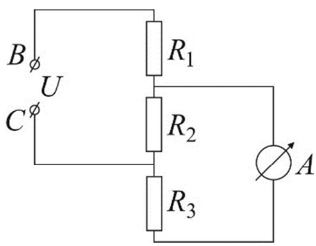
Коля Герасимов случайно выбрал на пульте машины времени такую программу, что отправиться он может и в будущее (целое число $x \geq 1984$) и в прошлое (целое число y из отрезка $[0;\ 1984]$), но только при условии, что $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$. В какой год может отправиться Коля? В ответ запишите через пробел все возможные значения переменной x.

Варьируемый параметр n: *выбирается одно из чисел* $2187, 2268, 2312, 2205$.

Задача 2

Коля повернул переключатель «Пуск», но ничего не произошло. Тогда он понял, что поспешил. Надо сначала повернуть переключатель на «Вкл.». Так он и сделал. Дверь закрылась. Он снова повернул переключатель «Пуск», и снова ничего не произошло. Значит, рассудил Коля, он еще чего-то не сделал.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)



Коля Герасимов пытается разобраться в электрической схеме машины времени (см. рисунок). Он выяснил, что сопротивления резисторов $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Напряжение между точками B и C постоянно и равно U В. Какой ток I показывает амперметр A в цепи? Сопротивление амперметра считайте пренебрежимо малым. Ответ приведите в амперах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр U выбирается от 10 до 30 с шагом 2.

Задача 3

Но старик не обращал внимания на ответы Коли. Ему самому нравилось говорить.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»)

В ходе разговора с Колей дедушка Павел вспоминал свою молодость. «У писателя Михаила Пришвина», – сказал он, – «есть такое наблюдение: «Не знаю, чем это объясняется, но Большую Медведицу начинаешь замечать почему-то с осени». Чем Вы это можете объяснить, мой юный друг?» Дайте развернутый ответ на этот вопрос.

Задача 4

Коле неудобно было заглядывать сбоку, он только услышал, как мелодичный женский голос произнес: «... Фестиваль на Луне обещает быть самым интересным зрелищем этого года...

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»)

Фестиваль на Луне проходит в соответствии с расписанием: 12 апреля раз в три года. Кроме того, 12 апреля каждого високосного года проходит дополнительный фестиваль. Если плановый фестиваль совпадает по времени с дополнительным, то они объединяются в один общий фестиваль. Первый фестиваль состоялся в N году. Про какой по счету фестиваль слышит Коля, если он оказался в будущем, 11 апреля 2084 года? Напишите программу, которая отвечает на этот вопрос.

Входные данные: число N, $1984 \leq N \leq 2084$

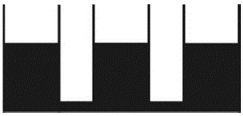
Выходные данные: целое число, равное номеру фестиваля.

Пример: Входные данные 2070. Выходные данные 8. Действительно, фестивали прошли в 2070, 2072 (дополнительный фестиваль), 2073, 2076 (объединенный фестиваль), 2079, 2080 (дополнительный), 2082 и 2084 (дополнительный) годах.

Задача 5

– Очень приятно, – сказал двухметровый аквариум на трех ногах. Внутри аквариума
сидела небольшая синяя лошадь. Перед ее мордой висел в воде микрофон, а снаружи аквариума высовывался небольшой рупор.
– И не смотрите на меня квадратными глазами, молодой человек. Я же не виноват в том, что на Земле никуда не годная атмосфера и приходится ходить в скафандре.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)



Для проживания семьи из трех инопланетян приготовили три сообщающихся сосуда с ртутью. В левый сосуд налили слой воды высотой $h_1 = 180$ мм, а в правый – высотой h_3 мм. На какую величину h_2 сместится уровень ртути в среднем сосуде, если известно, что ртуть из левого и правого сосудов не вытесняется водой полностью? Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. Ответ приведите в миллиметрах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр h_3 выбирается от 200 до 300 с шагом 10.

Задача 6

– Разве не видишь? – удивился мальчик. – Работаем.
– Понятно, что работаете. А над чем?
– Над спутником. Разве не похоже?
– Похоже, – сказал Коля. – Модель?
– Что мы, маленькие, что ли? Обыкновенный спутник связи, по школьной программе. Разве у вас в школе не делают?

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите высотой 400 км. Если центр управления передает спутнику команду A, то спутник увеличивает высоту орбиты на 100 км. Команда B велит спутнику увеличить высоту на 200 км. Пользуясь командами A и B, необходимо изменить орбиту с начальной (400 км) до высоты n км.

Сколькими разными способами можно это сделать? Напишите программу, которая отвечает на этот вопрос.

Входные данные: число n. Предполагается, что вводятся числа от 500 до 100000, кратные 100.

Выходные данные: целое число, равное числу способов.

Пример 1: Входные данные 600.
Выходные данные 2.
Действительно, команды для вывода на эту орбиту: либо AA, либо B.

Пример 2: Входные данные 900.
Выходные данные 8.
Действительно, команды для вывода на эту орбиту: либо $AAAAA$, либо $BAAA$, либо $ABAA$, либо $AABA$, либо $AAAB$, либо BBA, либо BAB, либо ABB. Всего 8 способов.

Задача 7

> Вот! – прошипел Крыс. – Вот сюда мы и отправимся. Может, даже какую-нибудь выгоду найдем. Там нас никто не догадается искать.
> Его тонкий синтетический палец, скрывавший коготь, уперся в кнопку, под которой было написано: «КОСМОЗО».
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Космозо имеет форму трапеции с основаниями AD и BC и прямым углом A. Центральная часть Космозо имеет форму круга, вписанного в эту трапецию. В центре круга (точка O) находится Алиса Селезнева. От углов C и D ограды к Алисе бегут космические пираты. Коля бежит к Алисе от калитки, расположенной в точке касания круга со стороной AB. Какое наименьшее расстояние должен преодолеть Коля, чтобы добежать до Алисы, если $OC = a$, $OD = b$?

Варьируемые параметры $\{a,\ b\}$ *выбираются из*
ства $\{6, 8\}, \{5, 12\}, \{7, 24\}, \{8, 15\}, \{9, 12\}$.

Задача 8

Алиса уже сидела верхом на динозавре, и тот, осторожно ступив в воду, чтобы не забрызгать свою подругу, поплыл по пруду, а утки-перевертыши, розовые гуси, птицы с иголками словно у ежей и другие странные создания расплывались, как лодки перед пассажирским теплоходом, уступая дорогу.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

Пираты решили поплыть по пруду за Алисой на прямоугольном плоту толщиной h см. Когда Крыс залез на плот, то плот погрузился в воду, но его верхняя грань все еще возвышалась над поверхностью воды на $h_1 = 8$ см. Когда на плот залез Весельчак У, то плот утонул. А если бы масса Весельчака У была равна массе Крыса, то плот опустился бы всего лишь на один сантиметр (т.е. высота верхней грани плота над поверхностью воды стала бы равной $h_2 = 7$ см). Найдите отношение n массы плота к массе Крыса. Ответ округлите до одного знака после запятой.

Варьируемый параметр h выбирается
от 10 до 15 с шагом 0,5.

Задача 9

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил.Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Крокрыс.

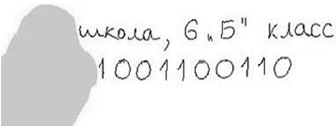
Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

На планете Крокрыс никогда не наступает ночь, потому что эта планета вращается вокруг двойной звезды, и к моменту захода первого солнца уже встает второе. А можно ли на Земле наблюдать нижнюю кульминацию Солнца? Если можно, то где и когда? Если нельзя, то почему? Дайте развернутый ответ.

Задача 10

Коле никто не мешал. Раз мимо прошла какая-то семья, но Коля прикрыл ножик ладонью и сделал вид, что рассматривает кусты. Коля вырезал на спинке большими печатными буквами: КОЛЯ, 6-Й КЛАСС «Б», 26-Я ШКОЛА

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)



Пираты и Алиса Селезнева разыскивают Колю Герасимова. Весельчак У выкрал у Алисы записку, на которой она написала номер школы и номер класса Коли, но по дороге завернул в нее пончик, поэтому часть информации теперь безвозвратно утеряна. Хитроумный Крыс догадался, что Алиса записала информацию обычным числом $x62$, $xy62$ или $xyz62$ (на самом деле – это число 2662, но ведь номера школ бывают и однозначные, и двузначные, и трехзначные; последняя цифра 2 означает букву Б), а затем перевела это число в двоичную систему. Однако двоичное число теперь тоже неизвестно в точности и даже неясно, сколько в нем цифр. Какие школы будут посещать пираты в поисках Коли? В ответе перечислите все возможные номера школ через пробел. Не забудьте, что в 1984 году номера школ содержали не более трех цифр.

Заочный тур 2

Задача 1

Никогда не поздно будет выключить снова, подумал Коля и повернул переключатель. Возникло тихое жужжание, стрелки приборов на панели дрогнули, и некоторые из них передвинулись. Коля хотел было повернуть выключатель обратно, но тут услышал за спиной негромкий щелчок.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

Коля Герасимов случайно выбрал на пульте машины времени такую программу, что отправиться он может и в будущее (целое число

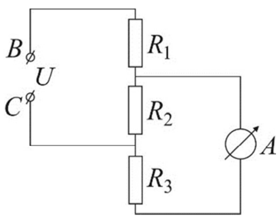
$x \geq 1984$) и в прошлое (целое число y из отрезка [0; 1984]), но только при условии, что $x^{2/3} + y^{2/3} = n^{2/3}$. В какой год может отправиться Коля? В ответ запишите через пробел все возможные значения переменной x.

Варьируемый параметр n: *выбирается одно из чисел* $4394, 4625,\ 9826, 7000$.

Задача 2

Коля повернул переключатель «Пуск», но ничего не произошло. Тогда он понял, что поспешил. Надо сначала повернуть переключатель на «Вкл.». Так он и сделал. Дверь закрылась. Он снова повернул переключатель «Пуск», и снова ничего не произошло. Значит, рассудил Коля, он еще чего-то не сделал.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)



Коля Герасимов пытается разобраться в электрической схеме машины времени (см. рисунок). Он выяснил, что сопротивления резисторов $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом. Напряжение между точками B и C постоянно и равно U В. Для того, чтобы машина заработала, необходимо, чтобы сила тока, проходящего через амперметр A, была равна $I = 10$ ампер. Резистор с каким сопротивлением R_3 надо взять? Сопротивление амперметра считайте пренебрежимо малым. Ответ приведите в омах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр U выбирается от 13 до 40 с шагом 3.

Задача 3

Но старик не обращал внимания на ответы Коли. Ему самому нравилось говорить.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

В ходе разговора с Колей дедушка Павел сказал:

– Знаете ли Вы, мой юный друг, что великий Гомер в своей «Одиссее» называл Большую Медведицу созвездием, которое «себя никогда не купает в водах океана»? Вы давно были в Греции? Я был на

прошлой неделе. И, представьте себе, видел, как Большая Медведица погружается в волны Эгейского моря. Что Вы на это скажете?
– Гомер, наверное, ошибся, – сказал Коля.
А что думаете Вы? Дайте подробный ответ.

Задача 4

> Перед говоруном стояли толпой зрители и разговаривали с ним.
> – Нет, он сегодня не в настроении, – сказала бабуся. – Пойдем, Ванечка, покатаемся на склиссе.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Склисс меняет цвет каждый день. В понедельник склисс красный, во вторник – оранжевый, в среду – желтый, в четверг – зеленый, в пятницу – голубой, в субботу – синий, а в воскресенье – фиолетовый. Какого цвета склисс будет в день N, если 12 апреля 2083 года он был оранжевым?

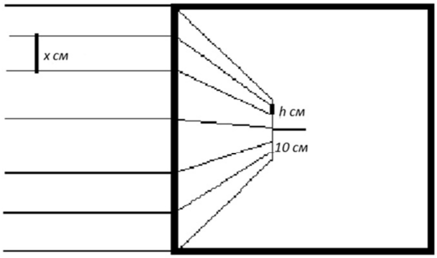
Входные данные: В первой строке вводится три натуральных числа – день, месяц и год. Например, 23 1 2090.

Выходные данные: Выведите число, соответствующее цвету склисса: 1 – красный, 2 – оранжевый, 3 – желтый, 4 – зеленый, 5 – голубой, 6 – синий, 7 – фиолетовый.

Пример: Входные данные 12 4 2084. Выходные данные 4. В самом деле, 2084 год – високосный, между датами прошло 366 дней, т.е. 52 полных недели и 2 дня.

Задача 5

> – Очень приятно, – сказал двухметровый аквариум на трех ногах. Внутри аквариума сидела небольшая синяя лошадь. Перед ее мордой висел в воде микрофон, а снаружи аквариума высовывался небольшой рупор.
> – И не смотрите на меня квадратными глазами, молодой человек. Я же не виноват в том, что на Земле никуда не годная атмосфера и приходится ходить в скафандре.
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)



Аквариум имеет форму куба со стороной 1 м. Передняя стенка аквариума сделана в форме линзы, фокусирующей параллельный поток лучей в центре аквариума. На расстоянии 10 см перед фокусом установлен экран. Какова будет высота h изображения на экране, если предмет имеет высоту x см? Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр x выбирается от 20 до 30 с шагом 1.

Задача 6

Когда почти всех пиратов переловили, эти два бандита объединили усилия, хотя прежде враждовали. С тех пор вот уже пять лет они вместе шастают по Галактике. Им приходится таиться. Еще недавно у них был свой корабль и несколько подручных, но, когда экспедиция на «Пегасе» с помощью трех капитанов победила их, пираты совсем оскудели.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

Космические пираты Крыс и Весельчак У откопали клад, содержащий N слитков криптонита. Масса каждого слитка – целое число кг. Клад надо разделить, но пилить слитки сложно – пила изношена и сможет распилить только один слиток. Требуется распилить не более одного из них на две части (не обязательно равные, но с целой массой), после чего разделить слитки на две кучи равной массы. Напишите программу.

Входные данные:
В первой строке вводится одно натуральное число N, не превосходящее 100. Во второй строке через пробел вводятся N натуральных чисел, не превосходящих 100 – массы имеющихся слитков.

Выходные данные:
Выведите массы слитков, которые вошли в первую кучку (включая массу части распиленного слитка).

Если решений несколько, выведите любое из них.
Если решений нет, выведите фразу NO SOLUTION (заглавными буквами).
Выводить массы можно в произвольном порядке, но масса части распиленного слитка (если таковой имеется) должна быть последней.

Пример 1:
Входные данные 2 3 6.
Найдены два слитка массой 3 и 6 кг.
Выходные данные NO SOLUTION.

Пример 2:
Входные данные 3 9 3 6.
Найдены три слитка массой 9, 3 и 6 кг.
Выходные данные 9.
Первый пират забрал себе первый слиток. Остальные забрал второй пират.
Возможно и другое решение: 3 6. Первый пират взял себе второй слиток, а также отпилил 6 кг от первого. Второй пират взял третий слиток и 3 кг от первого.

Пример 3:
Входные данные 4 6 2 5 5. Найдены четыре слитка массой 6, 2, 5 и 5 кг.
Выходные данные 2 5 2. Первый пират забрал себе второй и третий слиток, а также отпилил 2 кг от первого слитка. Второму пирату достался четвертый слиток, а также 4 кг от первого слитка.

Задача 7

> Вот! – прошипел Крыс. – Вот сюда мы и отправимся. Может, даже какую-нибудь выгоду найдем. Там нас никто не догадается искать.
> Его тонкий синтетический палец, скрывавший коготь, уперся в кнопку, под которой было написано: «КОСМОЗО».
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Территория Космозо имеет форму четырехугольника $ABCD$, у которого стороны AB и BC равны, угол A прямой, а угол D равен 60°. Центральная часть Космозо имеет форму круга, вписанного в этот четырехугольник. В центре круга (точка O) находится Алиса Селезнева. От угла C ограды к Алисе бегут космические пираты. Коля бежит к Алисе от калитки, расположенной в точке B. Какое наименьшее расстояние должен преодолеть Коля, чтобы добежать до Алисы, если $OC = a\sqrt{6}$?

Варьируемый параметр a выбирается от 5 до 9 с шагом 1.

Задача 8

Алиса уже сидела верхом на динозавре, и тот, осторожно ступив в воду, чтобы не забрызгать свою подругу, поплыл по пруду, а утки-перевертыши, розовые гуси, птицы с иголками словно у ежей и другие странные создания расплывались, как лодки перед пассажирским теплоходом, уступая дорогу.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

Пираты решили поплыть по пруду за Алисой на прямоугольном плоту толщиной h см. Когда Крыс залез на плот, то плот погрузился в воду, но его верхняя грань все еще возвышалась над поверхностью воды на $h_1 = 5$ см. Весельчак У был в три раза тяжелее Крыса и когда он залез на плот вместе с Крысом, то плот утонул. Крыс вернулся на берег и тогда плот с Весельчаком снова поднялся над водой на высоту 1 сантиметр (т.е. высота верхней грани плота над поверхностью воды стала бы равной $h_2 = 1$ см). Найдите отношение n массы плота к массе Крыса. Ответ округлите до одного знака после запятой.

Варьируемый параметр h выбирается от 10 до 15 с шагом 0,5.

Задача 9

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил.Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Крокрыс.

Кир Булычев. Сто лет тому назад
(кинофильм «Гостья из будущего»)

На планете Крокрыс никогда не наступает ночь, потому что эта планета вращается вокруг двойной звезды, и к моменту захода первого солнца уже встает второе. А можно ли на Земле хоть один день в году наблюдать восход Солнца строго на северо-востоке (азимут 45 градусов)? Если можно, то где? Если нельзя, то почему? Дайте развернутый ответ.

Задача 10

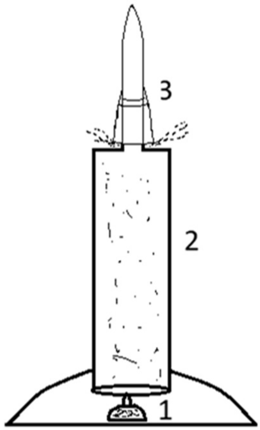
> Коле никто не мешал. Раз мимо прошла какая-то семья, но Коля прикрыл ножик ладонью и сделал вид, что рассматривает кусты. Коля вырезал на спинке большими печатными буквами: КОЛЯ, 6-Й КЛАСС «Б», 26-Я ШКОЛА
>
> Кир Булычев. Сто лет тому назад
> (кинофильм «Гостья из будущего»)

Пираты и Алиса Селезнева разыскивают Колю Герасимова. Весельчак У выкрал у Алисы записку, на которой она зашифровала номер школы и номер класса Коли. В записке написано число 221212. Хитроумный Крыс догадался, что Алиса сначала запомнила информацию как обычные число: номер школы, номер класса, буква класса, переведенная в цифру по правилу: $\text{А} - 1, \text{Б} - 2, \text{В} - 3, \text{Г} - 4,\ \text{Д} - 5, \text{Е} - 6, \text{Ж} - 7, \text{И} - 8, \text{К} - 9$, другие буквы в обозначениях классов не используются (например, школа 17, 7 «В» класс дадут число 1773). Затем Алиса перевела полученное число из десятичной системы счисления в систему по какому-то другому основанию. Пираты знают, что Коля учится либо в шестом, либо в седьмом классе. Какие школы они будут посещать в поисках Коли? В ответе перечислите все возможные номера школ через пробел. Не забудьте, что в 1984 году номера школ содержали не более трех цифр.

Очный тур

Задача 1

Мальчик спроектировал установку по запуску ракеты. По замыслу мальчика спиртовка (1) нагревает воздух в цилиндре (2), вследствие чего создается давление и в какой-то момент нагретый воздух выталкивает ракету (3) вверх. На практике выяснилось, однако, что ракету чрезвычайно сложно установить на цилиндр так, чтобы нагретый воздух не выходил из цилиндра. На рисунке показана одна из неудавшихся попыток запуска. Из-за негерметичной установки ракеты, давление в цилиндре не изменилось. При этом воздух в цилиндре в процессе нагревания изменил свою температуру с 15℃ до 35℃. Считая, что коэффициент полезного действия горелки равен 8% (остальная энергия уходит на нагревание атмосферы и т.п.), вычислите массу сожженного спирта. Объем цилиндра равен 15000 см^3, плотность воздуха равна 1,2 кг/м^3, его удельная теплоёмкость 1,01 кДж/(кг·°С), удельная теплота сгорания спирта 27 МДж/кг. Ответ приведите в граммах, округлив до одной сотой.



Задача 2

На свои опыты с ракетой мальчик истратил 15% спирта из бутыли, стоявшей в кладовой. Кроме того, он забыл закрыть бутыль, а когда вспомнил, то выяснилось, что еще 16% оставшегося спирта испарилось. Чтобы отец не заметил убыли, мальчик долил бутыль водой, так что в результате объем жидкости в бутыли даже увеличился на 5% по сравнению с исходным. Какова теперь концентрация спирта в бутыли? Ответ приведите в процентах, округлив до сотых долей.

Задача 3

После неудачи с запуском «воздушной» ракеты, мальчик стал посещать кружок по моделированию, где изготовил пороховую ракету. Пороховой двигатель этой ракеты работает ровно 4 секунды и обеспечивает ей все это время постоянное ускорение, равное $1{,}3g$ (при отсутствии внешних сил). Какой максимальной высоты достигнет ракета при вертикальном пуске? Сопротивление воздуха не учитывайте и считайте, что $g = 9{,}8$ м/с^2. Ответ приведите в метрах, округлив до целого.

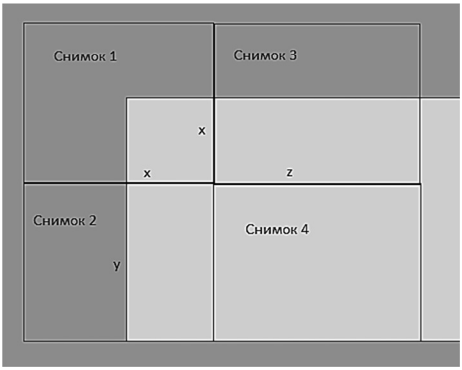
Задача 4

Продолжив свои занятия в кружке, мальчик в команде с другими ребятами запустил на аэростате передатчик телеметрии. Передача идет по открытому радиоканалу и для того, чтобы данные не были похищены конкурирующей командой, ребята придумали систему авторизации приемника. Процедура авторизации такова: передатчик отправляет случайно выбранное число N в диапазоне от 5 до 99 и ждет правильного ответа – номера первой (считая справа налево) цифры числа $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N$, отличной от нуля и делящейся на 3 без остатка. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, вычисляющую эту цифру. Программа принимает на вход целое число N и выводит номер искомой цифры. Если такой цифры в записи числа нет, программа выводит 0.

Примеры:
Входные данные 9.
Выходные 5.
Действительно, $9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 = 362880$. Первая, считая справа, цифра этого числа, отличная от нуля и делящаяся на 3, – это цифра 6, стоящая в пятом разряде.

Входные данные 5.
Выходные данные 0.

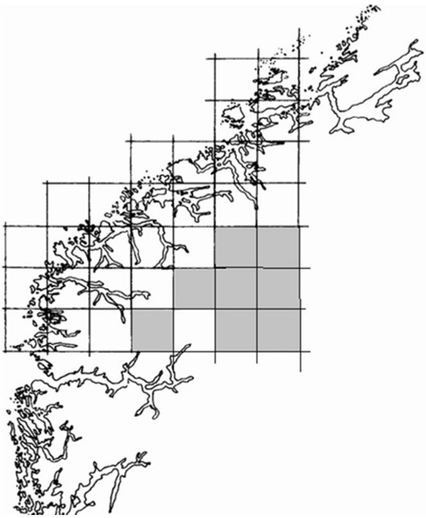
Задача 5



Ребята пытаются провести анализ снимков леса, полученных при последнем запуске. На темном фоне леса хорошо видны светлые прямоугольники – результаты вырубок. Программа автоматически вычисляет для каждого снимка площадь вырубки, ее периметр и отношение $\rho = \frac{\text{Периметр}}{\sqrt{\text{Площадь}}}$. Одна из таких вырубок оказалась разделенной на четыре снимка, причем на первый снимок попал квадрат со стороной x, на второй – прямоугольник со сторонами x и $y > x$, а на третий – прямоугольник со сторонами x и $z > x$. Можно ли найти коэффициент ρ для первого снимка? Найдите коэффициент для четвертого снимка, зная, что для второго и третьего этот коэффициент равен 4,45 и 5 соответственно.

Задача 6

При анализе космических снимков часто приходится делить точки снимка на два класса: нетронутый лес/вырубка, море/суша и так далее. При этом часто необходимо оценить площадь и периметр области (вырубки, острова, ледника) и т.д.



а) Предположим, Вам доступны снимки с произвольным (каким угодно большим) разрешением. Как бы Вы измерили площадь большого объекта по набору его снимков?

б) Как бы Вы стали измерять "величину границы" объекта? В вашем ответе постарайтесь учесть следующее. Мы знаем, что при гомотетии с коэффициентом k площадь треугольников и четырехугольников меняется в k^2 раз. Также происходит и со сложными фигурами, получаемыми при картографировании. Мы знаем, что при такой гомотетии периметры простых фигур (треугольников, четырехугольников и т.п.) меняются в k раз. Оказывается, что границы фигур, получаемых при картографировании, ведут себя не так. При изменении масштаба снимка в k раз они меняют свою длину в k^D раз, где D (оно называется фрактальной размерностью границы) отлично от 1 (например, при картографировании побережья Норвегии, это число экспериментально определено равным 1,52, а для побережья Великобритании 1,3).

Олимпиада 2019/2020 года

Разминка

7 – 9 классы

1) Как нагревают воду космонавты на Международной космической станции?
   А) С помощью обычного чайника.
   Б) В герметичном котле с помощью газовой горелки.
   В) В специальной печи при помощи электромагнитных волн.
   Г) Вливая тонкой струйкой концентрированную серную кислоту в сосуд с водой и используя тепло, выделяемое при этой реакции.
   Д) Космонавты берут с собой в полет запас горячей воды с Земли в термосах.

2) Почему скафандры космонавтов для работы в открытом космосе имеют пепельно-белый цвет?
   А) Такие скафандры лучше отводят падающее солнечное излучение (меньше нагреваются).
   Б) Такие скафандры лучше защищают космонавтов от гамма-лучей.
   В) Чтобы создать атмосферу праздника на Международной космической станции.
   Г) Это неверно, такие скафандры бывают и других цветов (оранжевый, красный).
   Д) Чтобы цвета скафандров не создавали ассоциаций с цветами флагов государств.

3) Выполняются ли закон Паскаля и закон Архимеда на борту Международной космической станции?
   А) Науке это пока неизвестно! У космонавтов нет времени на проверку всех законов!
   Б) Оба закона справедливы.
   В) Закон Паскаля справедлив, а закон Архимеда нет.
   Г) Закон Архимеда справедлив, а закон Паскаля нет.
   Д) Оба закона не выполняются.

4) Как современные космонавты возвращаются на Землю с борта Международной космической станции?
   А) С помощью многоразового транспортного космического корабля (космического челнока).
   Б) Делают затяжной прыжок на парашютах.
   В) Используют ракету-носитель вертикальной посадки.
   Г) Используют космический лифт.
   Д) На борту одноразового спускаемого аппарата.

5) Что такое «гравитационный маневр»?
   А) Это маневр, который приходится проделывать космонавтам на Международной космической станции, чтобы попасть из одного модуля в другой.
   Б) Это термин, используемый в фантастических фильмах.
   В) Это маневр космического корабля для возвращения на Землю.
   Г) Это изменение скорости движения космического аппарата за счет гравитационного поля планеты.
   Д) Это перелет космического аппарата между планетами Солнечной системы.

6) Какая планета Солнечной системы имеет самый массивный спутник по сравнению со своей собственной массой (т.е. отношение массы спутника к массе планеты максимально)?
   А) Земля.
   Б) Марс.
   В) Юпитер.
   Г) Сатурн.
   Д) Нептун.

7) 60 лет тому назад (в 1959 году) произошло знаменательное событие для всего человечества. Что это за событие?
   А) Был открыт принцип реактивного движения, что позволило перемещаться в космическом пространстве и запустить человека в космос.
   Б) Был запущен первый биологический объект в космос. До этого считалось, что ничто живое в космосе и невесомости жить не может.

В) Была получена первая фотография обратной стороны Луны. До этого люди видели Луну только с одной стороны.
Г) На Землю упал большой метеорит, что привело к изменению скорости вращения Земли, после чего на Земле началось потепление.
Д) Была построена первая многоступенчатая ракета, что позволило достичь второй космической скорости.

8) Космонавт на Земле имеет массу тела 75 кг. А какая масса тела у него на борту Международной космической станции, на высоте 400 км над поверхностью Земли?
А) 0 кг.
Б) 150 кг.
В) 75 кг.
Г) 84,67 кг.
Д) 66,44 кг.

9) Космонавты перед запуском часто вешают в кабине космического аппарата небольшую игрушку. Зачем?
А) Это неправда. Ничего вешать нельзя!
Б) Это талисман – его обязательно выбирает себе каждый экипаж.
В) Это простейший индикатор наступления невесомости.
Г) Космонавты очень суеверны. Так было у Гагарина, и все повторяют.
Д) Это простейший «датчик Земли». С помощью него космонавты определяют направление к Земле.

10) Какой космический аппарат улетел дальше всего от Земли?
А) Первый искусственный спутник Земли, запушенный в 1957 году.
Б) Аппарат «Вояджер-1», запущенный в 1977 г.
В) Первый искусственный спутник Солнца, запущенный в 1959 году.
Г) Первая космическая станция «Салют», запущенная в 1971 г.
Д) Аппарат «Пионер-10», запущенный в 1973 году.

10 – 11 классы

1) Астроном на Земле в течение нескольких дней наблюдает комету на небесной сфере. Какой может оказаться траектория движения этой кометы относительно Солнца?
   А) Комета будет двигаться строго по прямой.
   Б) Траектория движения будет довольно сложной кривой, полученной наложением двух движений: кометы и Земли.
   В) Траектория движения всегда представляет собой часть эллипса.
   Г) Траектория движения представляет собой либо часть эллипса, либо часть параболы.
   Д) Траектория движения представляет собой либо часть эллипса, либо часть параболы, либо часть гиперболы.

2) Как нагревают воду космонавты на Международной космической станции?
   А) С помощью обычного чайника.
   Б) В герметичном котле с помощью газовой горелки.
   В) В специальной печи при помощи электромагнитных волн.
   Г) Вливая тонкой струйкой концентрированную серную кислоту в сосуд с водой и используя тепло, выделяемое при этой реакции.
   Д) Космонавты берут с собой в полет запас горячей воды с Земли в термосах.

3) Почему скафандры космонавтов для работы в открытом космосе имеют серебристый цвет?
   А) Такие скафандры лучше отводят падающее солнечное излучение (меньше нагреваются).
   Б) Такие скафандры лучше защищают космонавтов от гамма-лучей.
   В) Чтобы создать атмосферу праздника на Международной космической станции.
   Г) Это неверно, такие скафандры бывают и других цветов (оранжевый, красный).
   Д) Чтобы цвета скафандров не создавали ассоциаций с цветами флагов государств.

4) Выполняются ли закон Паскаля и закон Архимеда на борту Международной космической станции?
   А) Науке это пока неизвестно! У космонавтов нет времени на проверку всех законов!
   Б) Оба закона справедливы.
   В) Закон Паскаля справедлив, а закон Архимеда нет.
   Г) Закон Архимеда справедлив, а закон Паскаля нет.
   Д) Оба закона не выполняются.

5) Все планеты в Солнечной системе движутся по эллипсам. Почему же тогда на звездных картах изображают только путь движения Солнца относительно Земли – эклиптику, и не изображают пути движения других планет?
   А) Положение эклиптики относительно звезд меняется очень медленно, а путь планет, наоборот, перемещается по всей звездной карте. Поэтому изображать его бесполезно.
   Б) На некоторых картах эти пути изображают, а на некоторых – нет, чтобы не загромождать карты.
   В) Потому, что эти пути для всех планет (кроме Плутона) близки к эклиптике.
   Г) Потому, что эти пути для всех планет (кроме Плутона) с точки зрения земного наблюдателя совпадают с небесным экватором.
   Д) Потому, что планеты не меняют своего положения на небесной сфере.

6) Как отводится тепло с борта Международной космической станции?
   А) Нагретый воздух периодически сбрасывается в космическое пространство через специальный клапан.
   Б) Охлаждающая система постоянно проводит эндотермические химические реакции.
   В) Никакой специальной системы не нужно – станция охлаждается сама, поскольку за бортом станции очень холодно.
   Г) С помощью тепловой панели, установленной на стене станции и излучающей тепло в космическое пространство.
   Д) С помощью обычной форточки.

7) В каких точках на поверхности Земли можно наблюдать на небесной сфере южный полюс мира?
   А) Во всех точках, находящихся южнее северного полярного круга (и только в них).
   Б) Во всех точках, находящихся южнее северного тропика (и только в них).
   В) Во всех точках, находящихся южнее экватора (и только в них).
   Г) Во всех точках, находящихся южнее южного тропика (и только в них).
   Д) Во всех точках самого южного материка – в Антарктиде (и только в них).

8) Астроном наблюдает восход Солнца на южном полюсе. В какой момент Земля пройдет точку равноденствия?
   А) В тот момент, когда он увидит верхний край Солнца.
   Б) В тот момент, когда он увидит центр Солнца.
   В) В тот момент, когда он увидит все Солнце целиком.
   Г) Немного ранее того момента, когда он увидит центр Солнца (вследствие атмосферной рефракции света).
   Д) Немного позднее того момента, когда он увидит центр Солнца (вследствие атмосферной рефракции света).

9) Можно ли в космическом пространстве вдали от планет увидеть человеческим глазом радугу?
   А) Нет, это невозможно, потому что нет среды, где свет может преломиться или отразиться.
   Б) Да, это настолько же частое явление, как и на Земле
   В) Можно, если использовать два пересекающихся направленных пучка лучей.
   Г) Можно, если смотреть в направление от Солнца.
   Д) Можно, но только вблизи двойных, примерно одинаковых по массе и размерам, звезд.

10) Может ли спутник, двигаясь по орбите в системе двух тел Земля-Луна, стать неподвижным относительно центра Земли (точнее, относительно барицентра системы Земля-Луна)?
   А) Да, если спутник находится в точке либрации.
   Б) Нет, это невозможно.
   В) Таких примеров много: все спутники связи на геостационарной орбите неподвижны относительно Земли.
   Г) Да, все навигационные спутники неподвижны относительно Земли.
   Д) Да, но только на короткий период времени 5–10 минут.

Варианты для 10 – 11 классов

Заочный тур

Задача 1

> Я понял только, что Комову позарез нужны данные относительно игрек-фактора для двунормального гуманоида с четырехэтажным индексом, состоящим в общей сложности из девяти цифр и четырнадцати греческих букв.
>
> Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Переданные из Центрального информатория данные (восемь натуральных, не обязательно различных чисел) были зашифрованы в виде уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_8.$$

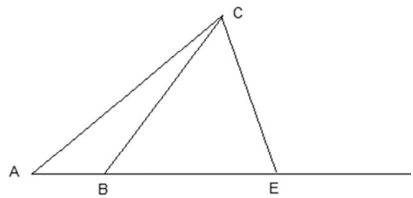
Восстановите код, если известно, что $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_8$.

В ответ запишите все числа подряд без пробелов и запятых от первого до восьмого. Если ответов несколько, разделите эти ответы между собой пробелами.

Задача 2

Том опять остановился. Я раздражено ткнул пальцем в клавишу контрольного вызова. Сигнал задержки сейчас же погас и вспыхнул рубиновый огонек: «У нас все в порядке, выполняем задание. Нет ли новых указаний?»

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

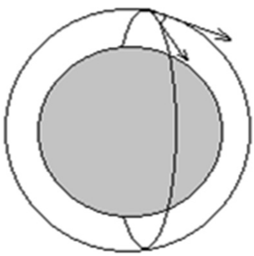


Строительный робот Том движется по маршруту $A \to B \to C$. Из-за сбоя программы в точке B он не повернул к точке C, а продолжил ехать прямо, проехав от точки B расстояние в два раза большее AB и остановился в точке E. Получив команду на исправление маршрута, Том тут же повернул к точке C. На какой угол повернул Том в точке E, если угол $BAC = 45^{\circ}$, а угол $BCA = 15^{\circ}$. В ответ запишите число градусов.

Задача 3

Мы принялись обшаривать околопланетное пространство. И вот два часа назад пришло сообщение, что он, наконец, обнаружен. Спутник-автомат, что-то вроде вооруженного часового. удя по некоторым деталям конструкции, его установили здесь Странники.

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»



Искусственный спутник массой m кг движется вокруг планеты по круговой орбите радиусом $R = 6700$ км. В результате маневра, осуществленного с помощью кратковременной работы бортового навигационного двигателя, плоскость орбиты спутника повернулась на угол α = 40º, а радиус орбиты не изменился. Каков модуль вектора $\overrightarrow{\Delta p}$ изменения импульса спутника, произошедшего при этом маневре? Массу планеты примите равной $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, а гравитационную постоянную $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг². Ответ приведите в кг·м/с, округлив до целых.

Варьируемый параметр m выбирается от 100 до 200 кг с шагом 10 кг.

Задача 4

Планета невидимок. Да, наверное, любопытные вещи можно было бы здесь увидеть, если бы Комов разрешил запустить сторожа-разведчика.

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Какой максимальной массой m_{max} может обладать космический зонд сферической формы радиусом r м, чтобы он мог плавать в атмосфере исследуемой планеты? Примите, что атмосфера состоит из газа со средней молярной массой $M = 44$ г/моль, причем давление у поверхности $p_0 = 9$ МПа, а температура t = 527° С. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в килограммах, округлив до двух знаков после запятой.

Варьируемый параметр r. Диапазон изменения от 0,1 до 0,2 м с шагом 0,01 м.

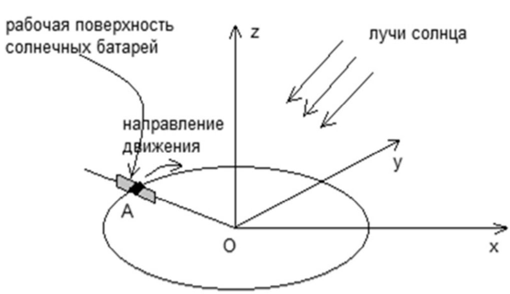
Задача 5

– Лева спит, – говорю я.

– У нас тут сейчас ночь, вернее, ночное время бортовых суток.

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Летательный аппарат вращается вокруг планеты по круговой орбите. Примем планету за материальную точку, расположенную в точке $O(0,0,0)$, радиус орбиты $R = 1$, а плоскость орбиты – совпадающей с плоскостью Oxy.



Известно, что аппарат ориентирован так, что его солнечные батареи (два прямоугольника)
в каждый момент времени расположены в плоскости, содержащей луч AO (A – точка, в который находится центр масс аппарата) и перпендикулярной плоскости орбиты. При этом стороны прямоугольников параллельны лучам AO и Oz. Будем считать, что солнце находится настолько далеко от планеты, что вектор, направленный на солнце, одинаков во всех точках орбиты. Известно, что он имеет координаты $\vec{s} = (1, y, 1)$. В какой точке орбиты энергия E, вырабатываемая солнечными батареями, максимальна? Примите, что $E = k \sin \alpha$, где α – угол падения солнечных лучей на батарею, а k – константа. Солнечные батареи считайте односторонними, а направление вращения аппарата: $(0,1,0) \to (1,0,0) \to (0,-1,0) \to (-1,0,0) \to \cdots$. В ответе укажите тангенс угла между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $(1,0,0)$, округлив его до 2 знаков после запятой.

Варьируемый параметр y выбирается от 1 до 5 с шагом 1.

Задача 6

А сейчас ответь мне: что вверху?
Ты вчера сказал: звезды. Что такое звезды?

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Двойная звезда, разрешаемая только с помощью телескопа, состоит из двух компонент. Одна ярче другой в 2,5 раза. Самая яркая компонента имеет визуальную звездную величину равную 0. Какова визуальная звездная величина этой системы при наблюдении невооруженным глазом? Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Задача 7

Уже с порога рубки я увидел, что имеет место ЧП. Все три рабочих экрана на моем пульте показывали полный останов. Киберов кто-то увел…

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Стась задал строительному роботу программу для выполнения работ. В частности, программа содержала подпрограмму, задающую движение робота. Эта программа движений представляла собой строку, состоящую из чисел 1 и (-1). Движения робота проходили вдоль прямой, число 1 означало команду «сделать один шаг вправо», а число (-1) – «сделать один шаг влево». Дойдя до конца строки, робот переходил к ее началу и циклически повторял движения. Например, строка команд $11(-1)1(-1)(-1)$ означало «два шага вправо, шаг влево, шаг вправо, два шага влево, два шага вправо, шаг влево, шаг вправо, два шага влево, два шага вправо и т.д.».

Однако в программе произошел сбой. По неизвестным причинам (Стась подозревает, что робота перепрограммировал Малыш) в какой-то момент (этот момент не известен) робот начал удваивать число шагов с каждым тактом времени. Причем робот прочел всю строку команд; затем, как и положено, перешел к началу строки, продолжил выполнение (по-прежнему, удваивая число шагов), дошел до того такта, на котором произошел сбой, и здесь остановился.

Например, если строка команд имеет вид $11(-1)1(-1)(-1)$, а сбой произошел на третьем такте, то, начиная с этого такта робот двигался так: «один шаг влево, 2 шага вправо, 4 шага влево, 8 шагов влево, 16 шагов вправо, 32 шага вправо, остановка».

Пусть в момент сбоя робот находился в точке A, а в момент остановки оказался в точке B. Например, в приведенном выше примере точка B оказалась в $-1+2-4-8+16+32=37$ шагах правее точки A. На деле, робот оказался так далеко от строительной площадки, что Стась его не видит. Помогите Стасю найти робота! Определите, какое максимальное значение может принять длина отрезка AB. Напишите программу на Вашем любимом языке программирования.
Входные данные: Вначале программа должна считать с клавиатуры натуральное число N в диапазоне от 10 до 40 – длина строки. Затем надо ввести с клавиатуры N чисел 1 или (-1).

Выходные данные: Программа должна вывести одно натуральное число – максимально возможную длину отрезка AB.

Пример (вид экрана после работы программы):

Введите число N

6

Введите данные

1

1

-1

1

-1

-1

Ответ: 41.

Действительно, если сбой произошел в первый такт времени, то $AB = |1 + 2 - 4 + 8 - 16 - 32| = 41$. Если сбой произошел на втором такте, то $AB = |1 - 2 + 4 - 8 - 16 + 32| = 11$. Для третьего такта $AB = |-1 + 2 - 4 - 8 + 16 + 32| = 37$ (мы это уже считали). Для четвертого: $AB = |1 - 2 - 4 + 8 + 16 - 32| = 13$, для пятого $AB = |-1 - 2 + 4 + 8 - 16 + 32| = 25$, а для шестого $AB = |-1 + 2 + 4 - 8 + 16 - 32| = 19$. Максимальная длина равна 41.

Задача 8

> Они все притворяются, будто мы уже овладели космосом, будто мы в космосе как дома. Неверно это. И никогда это не будет верно. Космос всегда будет космосом, а человек всегда остается всего лишь человеком.
>
> Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Размер наблюдаемой части космоса составляет 4 Гпк. Оцените среднюю плотность вещества в пространстве в кг/м^3, если считать, что этого вещества достаточно, чтобы наблюдаемая Вселенная оставалась гравитационно связной. Дайте развернутый ответ.

Очный тур

Задача 1

Известно, что $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=10$. Найдите $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$.

Задача 2

Ракета среднего класса семейства Р-7 имеет стартовую массу 307,65 тонн. Во время вертикального взлета через некоторое время после пуска двигателей скорость истечения газов из сопла ракеты составила 500 м/с. Сколько килограммов топлива должна израсходовать ракета за 0,1 секунды, чтобы уравновесить действующую на нее силу тяжести? Изменением массы ракеты и скорости истечения газов в течение 0,1 секунды пренебрегаем. Полную массу ракеты к этому моменту времени считайте равной 300 тонн. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

Задача 3

Два летательных аппарата движутся по окружностям, пересекающимся в точках A и B. Пункты наблюдений находятся в точках C и M, расположенных на разных окружностях. Каждая из прямых AC и AM пересекает одну из окружностей и является касательной к другой. Расстояния от точки B до пунктов наблюдения равны 6 и 24. Найдите расстояние между точками пересечения траекторий движения летательных аппаратов.

Задача 4

Элементом инженерной конструкции аппарата является вертикальная цилиндрическая труба с площадью сечения $S = 1$ см^2, заполненная одним молем газа и закрытая подвижным тяжелым поршнем массой $m = 0{,}5$ кг. Какой газ – одноатомный или двухатомный – надо разместить в трубе, чтобы минимизировать подачу теплоты к трубе для обеспечения равномерного движения поршня со скоростью $v = 1{,}5$ см/с? Найдите это значение количества теплоты Q в секунду. Атмосферное давление равно $p_0 = 10^5$ Па. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

Задача 5

Космический пират Весельчак_У принимал и записывал сообщение от своего напарника Крыса, состоящее из двух натуральных чисел A и B, но второпях допустил ошибку: одну или несколько цифр числа A записал неверно. Он знает, что число A должно делиться на Bбез остатка. Весельчак_У хочет исправить минимально возможное количество цифр в числе A (не меняя самого количества цифр) так, чтобы исправленное число делилось на B. Помогите Весельчаку сделать нужные исправления! Напишите программу на вашем любимом языке программирования, решающую эту задачу.

Входные данные: два натуральных числа, меньших 1000.

Выходные данные: исправленная пара – два натуральных числа, первое из которых делится нацело на второе. Если решения нет, выведите -1.

Примеры:
Входные данные 123 10
Выходные данные 120 10

Входные данные 123 141
Выходные данные 423 141

Входные данные 10 100
Выходные дпнные -1

Задача 6

Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» (см. рисунок 1) с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

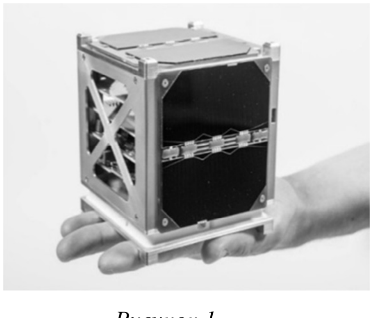


Рисунок 1

Орбиту МКС считайте круговой с высотой $h = 384{,}7$ км. Землю считайте идеальным шаром радиуса $R_З = 6371{,}3$ км. Гравитационный параметр считайте равным $\mu = G \cdot M_З = 3{,}984 \cdot 10^{14} м^3/с^2$, где G – гравитационная постоянная, а $M_З$ – масса Земли.

а) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции), сообщая спутнику скорость $v = 3$ м/с относительно станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

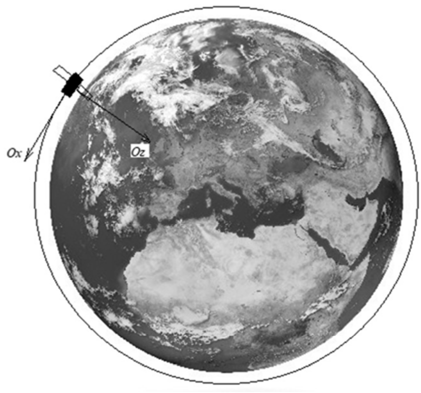


Рисунок 2

б) Предположим, что космонавт бросает спутник по направлению на Землю (для определенности: строго в направлении центра Земли, ось Oz на рисунке 2). Какой будет траектория спутника относительно центра Земли? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

в) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его строго перпендикулярно плоскости орбиты станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

Варианты для 7 – 9 классов

Заочный тур

Задача 1

> Писать повесть («Малыш») мы начали гораздо позже, в июне 1970, причем вначале основательно перелопатили сюжет.
>
> Борис Стругацкий. «Комментарии к пройденному»

03 июля 1970 года было новолуние, а Земля находилась в афелии своей орбиты. На каком расстоянии от Солнца находилась в этот момент Луна? Ответ округлите до сотен тысяч километров.

Задача 2

> Я подготовил для тебя информацию, начал уже ее кодировать, но тут все так запуталось, что я просто вынужден просить тебя потерпеть еще некоторое время.
>
> Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

С борта летательного аппарата в Центр управления полетами поступает телеметрическая информация. Датчик напряжения передает информацию 50 раз в секунду. Информация об исправности этого датчика ("1" - исправен, "0" – неисправен) поступает реже (примерно 1 раз в секунду). Предположим, что получен ряд следующего вида: информационный бит (0 или 1), несколько пропущенных тактов времени (каждый пропущенный такт обозначается символом " $*$ "), информационный бит и т.д.
Для сокращения объема файлов, этот ряд кодируется. Схема кодирования такова: число "1" информационного бита кодируется как "11", число "0" кодируется как "10", а последовательность (одного или нескольких) символов " $*$ ", идущих подряд, кодируется "0". Напишите программу, которая закодированный ряд переводит в ряд, состоящий только из информационных битов.

Пример:
Исходные данные
1 *** 1 **** 0 *** 0 ***** 1

Данные после кодирования – входные данные для Вашей программы
11011010010011

Выходные данные
11001

Программа должна ввести с клавиатуры число N в диапазоне от 10 до 100 – количество битов в строке исходных данных, затем ввести с клавиатуры N чисел 0 или 1 – исходный ряд данных. Программа должна вывести на экран строку выходных данных, состоящую из информационных битов. Проверку корректности введенных исходных данных проводить не надо, т.е. если пользователь вместо чисел "0" и "1" станет вводить нечто другое или введет строку из 0 и 1, которая не допускает раскодирование, то программа имеет право не работать.

Пример (вид экрана после работы программы):
Введите число N:
6

Введите данные:
1
0
0
0
1
0

Ответ: 00

Задача 3

ЭР-два базе, – скороговоркой прочитал он. – Экстренная. В квадрате сто два обнаружен потерпевший крушение земной корабль типа «Пеликан»…

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Участок S предполагаемой посадки спускаемого аппарата представляет собой квадрат $ABCD$ со стороной a км. Поисковую группу необходимо расположить в точке X на стороне AB. Обозначим $f(X)$ расстояние, которое ей придется преодолеть от точки X до места посадки при самом неблагоприятном случае (когда аппарат приземлится в наиболее удаленную от X точку участка S). Найдите такую точку (или точки) X, для которой число $f(X)$ окажется наименьшим. В ответ запишите длину отрезка AX.

Варьируемый параметр a выбирается от 4 до 12 с шагом 1.

Задача 4

Ганса я разбудил, и спросонок он только мычал и мямлил какую-то несусветицу про дождь и низкое давление.

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

На поверхности планеты измерили атмосферное давление с помощью ртутного барометра. Оказалось, что давление равно h мм ртутного столба. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 6{,}7$ м/с^2, а плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, выразите измеренное давление p в паскалях. Ответ округлите до целых.

Варьируемый параметр h выбирается в диапазоне от 580 до 620 мм с шагом 2 мм.

Задача 5

Некоторое время я стоял, засунув руки глубоко в карманы дохи, и смотрел, как трудятся мои ребятишки. За ночь они поработали на славу.

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Стась получил задание с помощью команды роботов проложить дорогу между девятью пунктами. В качестве тестового алгоритма Стась присвоил пунктам номера от 1 до 9 и дал команду прокладывать дорогу от пункта a к пункту b тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из цифр aи $b,$ делится на 3. Можно ли при таких условиях добраться по дорогам от пункта 1 до пункта 9 (возможно, проходя через пункты с другими номерами)? Дайте подробное объяснение.

Задача 6

Я прищурился и стал смотреть на айсберг. Он торчал над горизонтом гигантской глыбой сахара, слепяще-белый иззубренный клык, очень холодный, очень неподвижный, очень цельный...

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Космонавты, оказавшись на полюсе планеты, ощутили n % потерю в весе (по сравнению с весом на Земле).Сила тяжести тела массой m

на планете массой M и радиуса R вычисляется по формуле $F = G\frac{Mm}{R^2}$, где G – гравитационная постоянная. Определите среднюю плотность вещества, из которого состоит планета, если ее радиус в 2 раза меньше радиуса Земли. Планету и Землю считайте шарами. Среднюю плотность Земли считайте равной $\rho_3 = 5{,}52\ \text{г/см}^3$. Ответ дайте в г/см^3, округлите до двух знаков после запятой.

Варьируемый параметр n выбирается от 6 до 12 с шагом 1.

Задача 7

Покажите ему вычислитель, Стась, расскажите, как он действует, попробуйте считать с ним наперегонки. Думаю, здесь ожидает вас некоторый сюрприз…

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Взяли число a_1, возвели в квадрат, сложили все цифры у полученного числа и прибавили 1 – получили число a_2. С этим числом проделали то же самое – получили число a_3 и т.д. Например, если $a_1 = 7$, то $(a_1)^2 = 49$, т.е. $a_2 = 4 + 9 + 1 = 14$. Тогда $(a_2)^2 = 196$, т.е. $a_3 = 1 + 9 + 6 + 1 = 17$ и т.д. Чему равно a_{1970}?

Варьируемый параметр a_1 выбирается от 12 до 32 с шагом 10 (всего три варианта).

Задача 8

Скалы эти тянулись вдоль всего побережья, насколько хватал глаз, а над скалами в безоблачном, но тоже безрадостном ледяном серолиловом небе всходило крошечное негреющее лиловатое солнце.

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Высота полуденного Солнца в день летнего солнцестояния в некотором пункте на Земле составила h градусов, причем Солнце находилось «на юге». Какова широта места наблюдений? Ответ округлите с точностью до целых градусов.

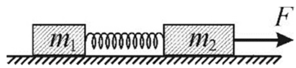
Варьируемый параметр h выбирается от 25,6 до 75,6 с шагом 10.

Очный тур

Задача 1

Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые две минуты. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 10 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?

Задача 2



Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками $\mu = 0{,}1$. Какую минимальную работу A нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

Задача 3

Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:

«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу N находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны N. Программа должна ввести с клавиатуры число N и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»

Пример работы программы:

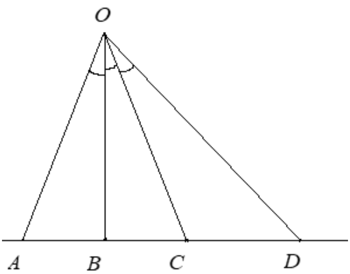
Введите N
10

Ответ
3 7

Задача 4

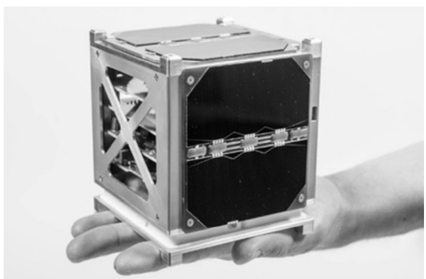
На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 3 раза, а другого в 8 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное $P = 7{,}5$ Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

Задача 5



Расположенный в точке O радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол α для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках $A, B, C, D,$ расположенных в указанном порядке. Известно, что точка B находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара, $OB = 2,\ OC = \sqrt{5}$. Найдите расстояние AD.

Задача 6



Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?

б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.

Олимпиада 2020/2021 года

Разминка

5 – 6 классы

1) В романе какого писателя жители Земли запускают космический аппарат с экипажем при помощи энергии пороха?

а) Николай Носов.
б) Жюль Верн.
в) Герберт Уэллс.
г) Станислав Лем.
д) Аркадий и Борис Стругацкие.

2) Как в среднем изменяется расстояние между центрами Земли и Луны за длительный промежуток времени (порядка тысячи лет)?

а) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны со временем не изменяется.
б) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны постепенно увеличивается.
в) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны со временем уменьшается из-за торможения Луны при её движении по орбите.
г) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны меняется периодически – то уменьшается, то увеличивается с периодом около 850 лет.
д) Замерить это расстояние с достаточной для ответа точностью пока не удалось.

3) Как называется граница между освещенной Солнцем частью планеты и неосвещенной ее частью?

а) Никак не называется.
б) Альбедо.
в) Терминатор.
г) Лутеприкс.
д) Тропик.

4) Какой по общемировому счету был первый искусственный спутник, запущенный США?

а) Первый.
б) Второй.
в) Третий.
г) Четвертый.
д) Седьмой.

5) Спутник движется по геостационарной орбите Земли, высотой 36 000 км и наклонением 0 градусов. Когда он попадет в тень Земли?

а) Никогда.
б) Один раз в сутки спутник будет входить в тень Земли, а через несколько часов выходить из тени.
в) Один раз весной и один раз осенью, каждый раз на несколько часов.
г) Один раз зимой и один раз летом, каждый раз на несколько часов.
д) Ровно один раз в год на несколько часов.

6) Находясь на поверхности какой планеты: Меркурия, Венеры или Марса человек никогда не сможет наблюдать звезды невооруженным глазом?

а) С Венеры – слишком плотная атмосфера.
б) С Меркурия – близко расположенное Солнце засвечивает небосклон.
в) С Марса – углекислый газ, составляющий атмосферу планеты, блокирует электромагнитные волны оптического диапазона.
г) С Венеры и Меркурия.
д) С Меркурия, Венеры и Марса.

7) На поверхности каких небесных тел побывали космические аппараты, созданные на Земле?

а) На Луне, Венере и Марсе (а более нигде).
б) На всех планетах солнечной системы.
в) На Луне, Венере, Марсе, Титане, Эросе, Итокаве и на комете Чурумова– Герасименко (а более нигде).
г) На Луне, Венере, Марсе, Титане, Энцеладе, Юпитере, Эросе, Итокаве и на комете Чурумова–Герасименко (а более нигде).

д) Число небесных тел, на поверхности которых побывали земные космические аппараты, два года назад превысило сотню.

8) Можно ли увидеть МКС (международную космическую станцию) из Санкт-Петербурга невооруженным глазом?

а) Нет, МКС вообще нельзя увидеть в оптическом диапазоне, поскольку станция не имеет собственного свечения.
б) Нет, МКС нельзя увидеть с Земли без бинокля – размеры станции слишком малы.
в) Нет. Теоретически увидеть МКС с Земли невооруженным глазом можно, но Санкт-Петербург находится на 60 градусе северной широты, а орбита МКС проходит значительно южнее.
г) Нет. Наблюдать за небесными телами можно только ночью, а для того, чтобы МКС стала видна, она должна отразить свет Солнца, т.е. тогда в месте наблюдения будет день.
д) Да, это вполне возможно.

9) Какой передатчик был установлен на первом искусственном спутнике Земли?

а) Никакого.
б) Ламповый передатчик.
в) Транзисторный передатчик.
г) Было установлено два передатчика (для страховки), оба транзисторные.
д) Квантовый передатчик.

10) Что такое GPS-навигатор?

а) Прибор, вычисляющий высоту орбиты космического спутника.
б) Программа, которая находит в сети Интернет ваши координаты.
в) Услуга, позволяющая определить координаты местонахождения прибора при помощи спутниковой информации.
г) Космический спутник.
д) Прибор, который позволяет определить координаты места наблюдения по звездам.

7 – 9 классы

1) Спутник движется по круговой орбите вокруг Земли в сильно разреженной атмосфере. Как повлияет на движение спутника атмосфера?

а) Скорость спутника будет уменьшаться из-за торможения в атмосфере, а орбита спутника практически не изменится.
б) Скорость спутника уменьшится, а орбита спутника станет круговой с меньшим радиусом.
в) Скорость спутника уменьшится, в результате чего спутник перейдет на вытянутую эллиптическую орбиту.
г) Орбита спутника останется очень близкой к круговой, но с меньшим радиусом, а скорость спутника практически не изменится.
д) Ответ зависит от направления ветра, который будет дуть на спутник.

2) Как в среднем изменяется расстояние между центрами Земли и Луны за длительный промежуток времени (порядка тысячи лет)?

а) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны со временем не изменяется.
б) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны постепенно увеличивается.
в) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны со временем уменьшается из-за торможения Луны при её движении по орбите.
г) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны меняется периодически – то уменьшается, то увеличивается с периодом около 850 лет.
д) Замерить это расстояние с достаточной для ответа точностью пока не удалось.

3) Как меняется геометрическое альбедо Луны для земного наблюдателя (в оптическом диапазоне)?

а) Никак не меняется.
б) Меняется периодически в зависимости от фазы Луны.
в) Меняется периодически в зависимости от расстояния от Земли до Луны.
г) Меняется по довольно сложному закону в зависимости от фазы Луны и от расстояния от Земли до Луны.

д) Меняется по довольно сложному закону в зависимости от фазы Луны, от расстояния от Земли до Луны и от расстояния от системы Земля-Луна до Солнца.

4) Какой по общемировому счету был первый искусственный спутник, запущенный США?

а) Первый.
б) Второй.
в) Третий.
г) Четвертый.
д) Седьмой.

5) Спутник движется по геостационарной орбите Земли, высотой 36 000 км и наклонением 0 градусов. Когда он попадет в тень Земли?

а) Никогда.
б) Один раз в сутки спутник будет входить в тень Земли, а через несколько часов выходить из тени.
в) Один раз весной и один раз осенью, каждый раз на непродолжительное время.
г) Один раз зимой и один раз летом, каждый раз на непродолжительное время.
д) Ровно один раз в год на несколько часов.

6) Находясь на поверхности какой планеты: Меркурия, Венеры или Марса человек никогда не сможет наблюдать звезды невооруженным глазом?

а) С Венеры – слишком плотная атмосфера.
б) С Меркурия – близко расположенное Солнце засвечивает небосклон.
в) С Марса – углекислый газ, составляющий атмосферу планеты, блокирует электромагнитные волны оптического диапазона.
г) С Венеры и Меркурия.
д) С Меркурия, Венеры и Марса.

7) На поверхности каких небесных тел побывали космические аппараты, созданные на Земле?

а) На Луне, Венере и Марсе (а более нигде).
б) На всех планетах солнечной системы.

в) На Луне, Венере, Марсе, Титане, Эросе, Итокаве и на комете Чурумова–Герасименко (а более нигде).
г) На Луне, Венере, Марсе, Титане, Энцеладе, Юпитере, Эросе, Итокаве и на комете Чурумова–Герасименко (а более нигде).
д) Число небесных тел, на поверхности которых побывали земные космические аппараты, два года назад превысило сотню.

8) В романе какого писателя жители Земли запускают космический аппарат с экипажем при помощи энергии пороха?

а) Николай Носов.
б) Жюль Верн.
в) Герберт Уэллс.
г) Станислав Лем.
д) Аркадий и Борис Стругацкие.

9) Какой передатчик был установлен на первом искусственном спутнике Земли?

а) Никакого.
б) Ламповый передатчик.
в) Транзисторный передатчик.
г) Было установлено два передатчика (для страховки), оба транзисторные.
д) Квантовый передатчик.

10) Как изменится скорость спутника при совершении «гравитационного» маневра перед планетой (по ходу ее движения по орбите) и позади нее?

а) Никак не изменится.
б) При маневре перед планетой скорость спутника увеличится, а позади планеты – уменьшится.
в) При маневре перед планетой скорость спутника уменьшится, а позади планеты – увеличится.
г) Термин «гравитационный маневр» выдуман голливудскими киношниками.
д) Это зависит от соотношения масс планеты и спутника.

10 – 11 классы

1) Спутник движется по круговой орбите вокруг Земли в сильно разреженной атмосфере. Как повлияет на движение спутника атмосфера?

а) Скорость спутника будет уменьшаться из-за торможения в атмосфере, а орбита спутника практически не изменится.
б) Скорость спутника уменьшится, а орбита спутника станет круговой с меньшим радиусом.
в) Скорость спутника уменьшится, в результате чего спутник перейдет на вытянутую эллиптическую орбиту.
г) Орбита спутника останется очень близкой к круговой, но с меньшим радиусом, а скорость спутника практически не изменится.
д) Ответ зависит от направления ветра, который будет дуть на спутник.

2) Как в среднем изменяется расстояние между центрами Земли и Луны за длительный промежуток времени (порядка тысячи лет)?

а) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны со временем не изменяется.
б) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны постепенно увеличивается.
в) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны со временем уменьшается из-за торможения Луны при её движении по орбите.
г) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны меняется периодически – то уменьшается, то увеличивается с периодом около 850 лет.
д) Замерить это расстояние с достаточной для ответа точностью пока не удалось.

3) Как меняется геометрическое альбедо Луны для земного наблюдателя (в оптическом диапазоне)?

а) Никак не меняется.
б) Меняется периодически в зависимости от фазы Луны.
в) Меняется периодически в зависимости от расстояния от Земли до Луны.

г) Меняется по довольно сложному закону в зависимости от фазы Луны и от расстояния от Земли до Луны.
д) Меняется по довольно сложному закону в зависимости от фазы Луны, от расстояния от Земли до Луны и от расстояния от системы Земля-Луна до Солнца.

4) Какой по общемировому счету был первый искусственный спутник, запущенный США?

а) Первый.
б) Второй.
в) Третий.
г) Четвертый.
д) Седьмой.

5) Спутник движется по геостационарной орбите Земли, высотой 36 000 км и наклонением 0 градусов. Когда он попадет в тень Земли?

а) Никогда.
б) Один раз в сутки спутник будет входить в тень Земли, а через несколько часов выходить из тени.
в) Один раз весной и один раз осенью, каждый раз на непродолжительное время.
г) Один раз зимой и один раз летом, каждый раз на непродолжительное время.
д) Ровно один раз в год на несколько часов.

6) Находясь на поверхности какой планеты: Меркурия, Венеры или Марса человек никогда не сможет наблюдать звезды невооруженным глазом?

а) С Венеры – слишком плотная атмосфера.
б) С Меркурия – близко расположенное Солнце засвечивает небосклон.
в) С Марса – углекислый газ, составляющий атмосферу планеты, блокирует электромагнитные волны оптического диапазона.
г) С Венеры и Меркурия.
д) С Меркурия, Венеры и Марса.

7) На поверхности каких небесных тел побывали космические аппараты, созданные на Земле?

а) На Луне, Венере и Марсе (и более нигде).

б) На всех планетах солнечной системы.

в) На Луне, Венере, Марсе, Титане, Эросе, Итокаве и на комете Чурумова–Герасименко (и более нигде).

г) На Луне, Венере, Марсе, Титане, Энцеладе, Юпитере, Эросе, Итокаве и на комете Чурумова–Герасименко (и более нигде).

д) Число небесных тел, на поверхности которых побывали земные космические аппараты, два года назад превысило сотню.

8) В романе какого писателя жители Земли запускают космический аппарат с экипажем при помощи энергии пороха?

а) Николай Носов.

б) Жюль Верн.

в) Герберт Уэллс.

г) Станислав Лем.

д) Аркадий и Борис Стругацкие.

9) Какой передатчик был установлен на первом искусственном спутнике Земли?

а) Никакого.

б) Ламповый передатчик.

в) Транзисторный передатчик.

г) Было установлено два передатчика (для страховки), оба транзисторные.

д) Квантовый передатчик.

10) Как изменится скорость спутника при совершении «гравитационного» маневра перед планетой (по ходу ее движения по орбите) и позади нее?

а) Никак не изменится.

б) При маневре перед планетой скорость спутника увеличится, а позади планеты – уменьшится.

в) При маневре перед планетой скорость спутника уменьшится, а позади планеты – увеличится.

г)Термин «гравитационный маневр» выдуман голливудскими киношниками.

д) Это зависит от соотношения масс планеты и спутника.

Варианты для 10 – 11 классов

Заочный тур

Задача 1

В Биттер-Лаге, на планете Сир, у меня есть ферма, – наконец, взяв себя в руки, начал рассказывать сирянин. – Я засеял зерновыми и другими культурами около восьмисот акров. Но как только поля зазеленеют, проклятые крысы начисто сожрут всходы.

Роберт Шекли «Беличье колесо»

Фермерское поле имеет форму равнобедренного треугольника ABC со стороной $AC = 39k\sqrt{2}$ и углом α при основании AB, причем $tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$. Крысы полностью объели ту часть поля, которая заключена внутри круга диаметра $d = 27k$ с центром в точке O – доме фермера. Круг касается границы поля AC в точке K, границы BC в точке N и пересекает сторону AB в точках L и M. Кошки, завезенные Грегором и Арнольдом, уничтожили всех крыс внутри треугольника KLM. Найдите площадь этого треугольника. Приведите полное решение.

Варьируемый параметр k меняется от 1 *до* 6 *с шагом* 1.

Задача 2

На следующий день спасательная шлюпка была погружена на борт звездолета, и друзья стартовали по направлению к Трайденту.

Роберт Шекли «Мятеж шлюпки»

Звездолет Грегора и Арнольда находится на орбите планеты Трайдент. Планета движется в плоскости по кривой, заданной уравнением $Ax^2 - Cxy + By^2 = 1$. Звездолет движется в той же плоскости, причем все время движения, в тот момент, когда Трайдент находится в точке (x, y), расстояние между ним и звездолетом $r = Ax^2 + By^2$. На каком наибольшем расстоянии от планеты может находится звездолет, если $A = 225$, $B = 100$, $C = \cdots$? В ответе дайте число с точностью до трех знаков после запятой. Приведите полное решение.

Варьируемый параметр C выбирается в диапазоне от 75 *до* 225 *с шагом* 15.

Задача 3

Ричард Грегор раскладывал новый пасьянс, включавший три колоды карт, шесть джокеров, набор игральных костей и логарифмическую линейку.

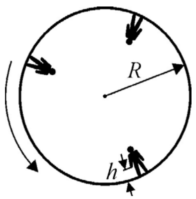
Роберт Шекли «Замок скэгов»

Устав раскладывать пасьянс, от нечего делать Грегор всю ночь наблюдает за спутником, движущимся по геостационарной орбите (то есть по орбите, лежащей в плоскости экватора на высоте h = 35 800 км от поверхности Земли). На какой высоте над горизонтом он может видеть этот спутник? (Считайте Землю шаром радиуса r = 6400 км; координаты офиса, где находится Грегор, примите равными: 45 градусов северной широты; 93,3 градуса западной долготы; высота объекта над горизонтом – угол между направлением на объект и горизонталью; видимость считается идеальной, рельефом местности пренебрегаем). В ответе укажите значение тангенса угла с точностью до трех знаков после запятой. Приведите полное решение.

Задача 4

Корабль отбуксировали на взлетную полосу. Вскоре Грегор был уже в космосе и держал курс на пакгауз, обращающийся на орбите вокруг Веймойна II.

Роберт Шекли «Рейс молочного фургона»



Космический корабль Грегора, имеющий форму кругового цилиндра, совершает межпланетный перелет с постоянной скоростью. Для создания на борту искусственной тяжести он приведен во вращение вокруг продольной оси с постоянной угловой скоростью. При этом «полом» для космонавта является внутренняя поверхность корпуса корабля. Грегор, стоящий на полу, выпускает из руки небольшой предмет. На каком расстоянии l от его ног, измеренном вдоль пола, этот предмет упадет на пол? Радиус корпуса корабля $R = \cdots$ м, высота, с которой падает предмет h = 1 м. Влиянием всех небесных тел и силой притяжения предмета к кораблю можно пренебречь. Сопротивление воздуха не учитывайте. Приведите только ответ в миллиметрах, округлив до целых.

Варьируемый параметр R. Диапазон изменения от 10 *до* 20 *м с шагом* 1 *м.*

Задача 5

> – Боже! – ахнул Арнольд.
> – Все ясно. После посадки я не стал задраивать воздушный шлюз.
> Мы по-прежнему дышим воздухом Призрака-5!
>
> Роберт Шекли «Призрак-5»

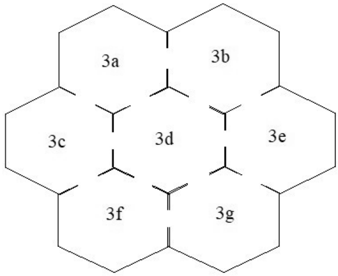
В космический корабль Грегора и Арнольда, совершающий межпланетный перелет, попал метеорит. Он пробил в корпусе маленькое отверстие, через которое наружу стал выходить воздух. Объем корабля $V =$ м^3, начальное давление воздуха в нем $p = 10^5$ Па, температура $t = 27\ °C$. Через какое время τ после попадания метеорита давление воздуха в корабле уменьшится на $\Delta p = 10^3$ Па, если площадь отверстия $S = 1$ см^2? Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). При решении учтите, что $\Delta p << p_0$, температуру воздуха внутри корабля считайте постоянной, а процесс истечения воздуха квазиравновесным. Приведите только ответ в секундах, округлив до целых.

Варьируемый параметр V. Диапазон изменения от 1000 *до* 2000 *м*^{3} *с шагом* 100 *м*^{3}.

Задача 6

> А на пороге незапертой каюты возник серый исполин, чья шкура была испещрена красными крапинками.
> Исполин был наделен неисчислимым множеством рук, ног, щупалец, когтей и клыков, да еще двумя крылышками впридачу.
> Страшилище медленно надвигалось, постанывая и бормоча что-то неодобрительное. Оба признали в нем Ворчучело.
>
> Роберт Шекли «Призрак-5»

Призрак Ворчучело гонится за космонавтом Грегором по космическому кораблю. Жилое пространство корабля состоит из шестиугольных кают, которые расположены на 2020 этажах с номерами от 1 до 2020, по 7 кают на каждом (для примера на рисунке изображен план третьего этажа). Грегор может перемещаться из каждой каюты в соседнюю, находящуюся на том же этаже.



Каждый этаж с номером вида $4n$ (n целое, $1 \leq n \leq 504$) имеет лестницу вверх, находящуюся в каюте c и лестницу вниз, находящуюся в каюте e. 2020-й этаж имеет только лестницу вниз в каюте e. Каждый этаж с номером вида $4n + 1$, $1 \leq n \leq 504$, имеет лестницу вверх, находящуюся в каюте c и лестницу вниз, находящуюся в той же каюте. Первый этаж имеет только лестницу наверх в каюте c. Каждый этаж с номером вида $4n + 2$, $0 \leq n \leq 504$, имеет лестницу вниз, находящуюся в каюте c и лестницу вверх, находящуюся в каюте e. Каждый этаж с номером вида $4n + 3$, $0 \leq n \leq 504$, имеет лестницу вверх, находящуюсяв каюте e и лестницу вниз, находящуюся в той же каюте. За один ход Грегор может сделать не более четырех перемещений. Например, 3e-2e-2d-2c-1c. Ворчучело также может перемещаться из каждой каюты в соседнюю, но кроме того, оно может перемещаться вверх или вниз из любой каюты. За один ход Ворчучело может проделать не более двух перемещений. Например, 3d-2d-1d. В начале погони Грегор находится в каюте 1010e, а Ворчучело в каюте 1010d. Затем они делают ходы по очереди, начиная с Грегора. Опишите способ, позволяющий Ворчучелу гарантированно поймать Грегора. Предполагается, что перед своим ходом каждый из них знает, где находится противник.

Задача 7

> – Не позволяйте этому офису ввести вас в заблуждение, – сказал Арнольд.
> – Мы самые лучшие, и наши расценки самые приемлемые. Для нас не бывает слишком большой планеты или слишком маленького астероида! К любой работе – особый подход! – добавил он немного не в тему.
>
> Роберт Шекли «Замок скэгов»

В рамках очередного задания Арнольду необходимо наблюдать с Земли спутник Юпитера – Ио. Оцените время, в течение которого Арнольд сможет видеть Ио на диске Юпитера. Ответ приведите в секундах. Приведите полное решение.

Задача 8

А теперь проваливайте!
Но если вдруг найдете Лаксианский Ключ, то возвращайтесь и называйте любую цену.

Роберт Шекли «Лаксианский Ключ»

Грегор и Арнольд ищут Лаксианский Ключ на прямоугольном поле размера $N \times N$. Они двигаются от левого верхнего угла поля по спирали, закручивая спираль по часовой стрелке к центру. При этом они заполняют клетки поля числами от 1 до N^2.

1	2	3	4
12	13	14	5
11	16	15	6
10	9	8	7

Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая выводит число, находящееся в ячейке (i, j).
Программа принимает на вход натуральное число N, два натуральных числа i и j, между 1 и N, и выводит число, находящееся в ячейке в i-ой строке, j-ом столбце.

Пример:

Входные данные:

4
2 2

Выходные данные:

13

Пояснение – смотри рисунок.

Очный тур

Задача 1

а) Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения: $|x + y| - |x - y - a| = a, \quad a > 0$.
б) Выпишите координаты центра симметрии и уравнения всех осей симметрии получившейся фигуры.

Задача 2

Точка K является серединой стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезки DK и AC пересекаются в точке L.
а) Докажите, что $DL = 2KL$.
б) Пусть M − середина отрезка LD. Луч CM пересекает сторону AD в точке N, а диагональ BD − в точке Q. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника NQD равна 2.

Задача 3

Найдите радиус rстационарной орбиты планеты, то есть круговой орбиты, для которой период обращения искусственного спутника планеты T равен в точности одному периоду обращения планеты. Радиус планеты примите равным R = 3400 км, длительность периода обращения 24 ч 40 мин, а ускорение свободного падения у поверхности g = 3,71 м/с^2. Ответ приведите в километрах, округлив до целых.

Задача 4

По заданному числу C найдите такое число x, что $x^2 + \sqrt{x} = C$,, с точностью не менее 3 знаков после точки.

Входные данные:
В единственной строке содержится вещественное число $1 \leq C \leq 100$.
Выходные данные:
Выведите одно число – искомый x.

Примеры:
входные данные
2.0
выходные данные
1.000

входные данные
18
выходные данные
4.000

Задача 5

Два искусственных спутника Земли движутся в одной плоскости по круговым орбитам высотой 800 и 460 км. Они находятся в прямой видимости ровно тогда, когда отрезок, соединяющий их, не пересекает земную поверхность. В начальный момент времени спутники находились на общем луче с вершиной в центре Земли. Через некоторый промежуток времени они снова оказались на подобном луче. Какую часть времени от этого промежутка спутники были в прямой видимости? Считайте Землю идеальным шаром радиуса 6400 км.

Задача 6

Спутник дистанционного зондирования осуществляет съемку поверхности Земли с орбиты фотокамерой с ПЗС-матрицей.

а) Пусть спутник снял поле прямоугольной формы (дан список координат пикселей, образующих на снимке это поле). Поскольку съемка проводилась под углом α градусов к вертикали, на снимке поле имеет форму параллелограмма. Опишите алгоритм, позволяющий найти точку привязки – координаты центра поля. Входные данные: неупорядоченный список пар чисел (x и y координат пикселей). Выходные данные: два числа – координаты пикселя центра. Влиянием атмосферы пренебрегаем, считаем, что поле настолько мало, что поверхность можно считать плоской, а угол, под которым видны точки поля, постоянным.

б) Если бы съемка того же поля проводилась под нулевым углом к вертикали, то площадь поля S находилась бы по формуле $S = k \cdot N$, где N – число пикселей, образующих на снимке поле, а k – известный коэффициент (он зависит от разрешения камеры, высоты съемки и т.д.). Считая, что этот коэффициент и угол съемки α известны, предложите способ вычисления площади поля S. Входные данные: неупорядоченный список пар чисел (x и y координат) пикселей. Выходные данные: одно число – площадь поля S.

Варианты для 7 – 9 классов

Заочный тур

Задача 1

> – Коэлла очень маленькая планета, но это – идеальное место! Превосходная атмосфера, лучшая гравитация, которую только можно купить за деньги, артезианская вода!
>
> Роберт Шекли «Замок Скэгов»

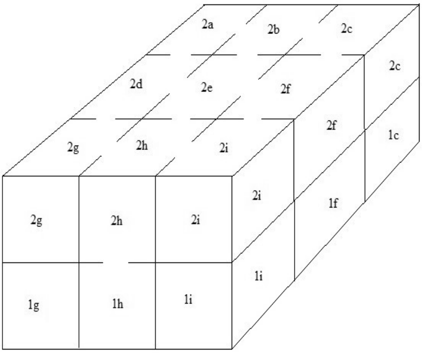
С какой минимальной скоростью v_{min} должен влететь в атмосферу Земли метеорит, состоящий из железа, чтобы полностью расплавиться в воздухе, если на нагрев метеорита расходуется $\alpha = \cdots$ % его начальной кинетической энергии? Начальная температура метеорита t = – 261 ºС. Удельную теплоёмкость железа считайте равной с = 460 Дж/(кг ºС), температуру плавления железа – $t_{пл}$ = 1539 ºС, удельную теплоту плавления железа – λ = 270 кДж/кг. Приведите только ответ, в м/с, округлив до целых.

Варьируемый параметр α. Диапазон изменения от ***60*** *до* 80 % *с шагом* 2 %.

Задача 2

> А на пороге незапертой каюты возник серый исполин, чья шкура была испещрена красными крапинками. Исполин был наделен неисчислимым множеством рук, ног, щупалец, когтей и клыков, да еще двумя крылышками в придачу.
>
> Страшилище медленно надвигалось, постанывая и бормоча что-то неодобрительное. Оба признали в нем Ворчучело.
>
> Роберт Шекли «Призрак-5»

Призрак Ворчучело гонится за космонавтом Грегом по космическому кораблю. Жилое пространство корабля состоит из 18 кубических кают, расположенных на двух этажах, по 9 кают на каждом (см. рисунок). Грег может перемещаться из каждой каюты в соседнюю, а находясь в каютах 1b, 2b и 1h, 2h может менять этаж. За один ход Грег может сделать не более трех перемещений. Например, 1g-1h-2h-2i. При этом он не может пробегать через каюту, занятую Ворчучелом. Ворчучело также может перемещаться из каждой каюты в соседнюю, но кроме того, оно может перемещаться вверх

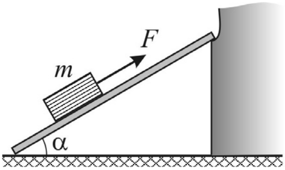


или вниз из любой каюты. За один ход Ворчучело может проделать не более двух перемещений. Например, 1e-2e-2h. Ворчучело поймает Грега, как только они окажутся в одной каюте. В начале погони Грег находится в каюте 1g, а Ворчучело в каюте 1e. Затем они делают ходы по очереди, начиная с Грега. Помогите Грегу – опишите алгоритм его действий, который при любом поведении Ворчучела позволяет Грегу спастись (то есть не быть пойманным сколь угодно долгое время). Предполагается, что перед своим ходом каждый из них знает, где находится противник.

Задача 3

Арнольд, его компаньон, вот-вот должен был вернуться.
Еще утром он отправился заказать все эти 2035 предметов и проследить за их погрузкой на корабль.

Роберт Шекли «Необходимая вещь»



Для погрузки всего оборудования на звездолет космонавты Грегор и Арнольд использовали аппарель (наклонную площадку), расположенную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Они обнаружили, что для того, чтобы затащить вверх по аппарели ящик массой $m = 90$ кг, нужно приложить к нему силу, направленную параллельно аппарели и равную $F = \cdots$ Н. Считая, что движение ящика происходит с постоянной скоростью, найдите коэффициент полезного действия η используемой космонавтами аппарели. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2. Приведите только ответ, в процентах, округлив до целого значения.

Варьируемый параметр F. Диапазон изменения от 500 *до* 1000 Н *с шагом* 50 Н.

Задача 4

Арнольд извлек документы. Там значилось, что Межпланетная очистительная (и транспортная) служба обязуется доставить пять смагов, пять фиргелей и десять квилов в систему звезды Вермойн.

Роберт Шекли «Рейс молочного фургона»

Арнольд и Грегор перевозят новую большую партию инопланетных животных: смагов, фиргелей и квилов. В результате путаницы с табличками на клетках каждый пятый смаг оказался помечен как фиргель, а десятая часть фиргелей обозначена на клетке как смаги. Кроме того, каждый двадцатый фиргель подписан как квил, а каждый двадцать пятый квил вообще не подписан. Все остальные таблички висят верно. В результате на клетках с животными есть 74 таблички «смаг», 134 таблички «фиргель» и 175 табличек «квил». Сколько животных каждого вида было на самом деле? Приведите только ответ – три числа, разделенных пробелами.

Задача 5

На следующий день, загрузив в корабль оборудование, ловушки и прочую аппаратуру для уничтожения грызунов, друзья направились на планету Сир.

Роберт Шекли «Беличье колесо»

Арнольд и Грегор приземлились на планете Сир. Место их посадки они обозначили на карте точкой A = (0, 0). Чтобы перевезти оборудование, им нужно проложить кратчайшую дорогу от места посадки до фермы их клиента, находящейся в точке B = (500, 1500) (все расстояния даны в метрах). Путь от A до B пересечен двумя глубокими оврагами, через которые придется построить два моста (перпендикулярно берегам оврагов). Известно, что ширина первого оврага 100 м, а второго 200 м, причем берега обоих оврагов параллельны оси Ox на карте. Как проложить дорогу, чтобы она имела наименьшую длину? Приведите только ответ – длину дороги без учета длин мостов (сторону одной клетки примите за 100 м).

Задача 6

> А теперь проваливайте!
> Но если вдруг найдете Лаксианский Ключ, то возвращайтесь и называйте любую цену.
>
> Роберт Шекли «Лаксианский Ключ»

В руки Грегора и Арнольда попала инструкция по поиску места, где закопан Лаксианский Ключ. Инструкция состоит из строк вида: «D X», где слово D – одно из «N», «S», «E», «W», – задает направление движения (север, юг, восток, запад), а число X – количество шагов, которое необходимо пройти в этом направлении. Напишите программу, которая по этому описанию пути определяет точные координаты места, где спрятан Ключ, считая, что начало координат находится в начале пути, ось Ox направлена на восток, ось Oy – на север.

Входные данные:

На вход подается натуральное число N – количество строк, а затем последовательность из N строк указанного формата. Гарантируется, что числа не превосходят 1000.

Выходные данные:

Необходимо вывести координаты клада «x y» – два целых числа через пробел. Гарантируется, что эти числа не превосходят 1000.

Пример:

Входные данные

3
S 3
E 19
N 22

Выходные данные

19 19

Задача 7

> Впрочем, по ту сторону неведомого солнца никакое умение приспособиться не поможет. Попробуйте выжить, например, в космическом вакууме.
>
> Роберт Шекли «Беличье колесо»

Оцените отношение энергии, получаемой от Солнца спутником Сатурна Титаном, в перигелии и в апогелии орбиты Сатурна. Приведите полное решение.

Задача 8

> Мелдж была маленькая, всеми забытая планета, на северной окраине галактики, довольно далеко от торговых маршрутов.
>
> Роберт Шекли «Лаксианский Ключ»

Планета Мелдж находится в системе двойной звезды. Эта система состоит из двух звезд, масса одной из которых в λ раз больше массы другой. Опишите движение звезд системы, если известно, что расстояние между звездами не меняется, а $\lambda = \cdots$. Приведите полное решение.

Варьируемый параметр λ меняется от 1,5 *до* 4 *с шагом* 0,5.

Очный тур

Задача 1

Воинская колонна, совершающая марш-бросок, имеет длину L = 500 м. Командир, находящийся во главе колонны, направил конного посыльного в «хвост» колонны к своему заместителю с пакетом (заместитель замыкает колонну). Посыльный поскакал против движения колонны со скоростью u = 36 км/ч, вручил пакет заместителю командира и сразу же вернулся с той же скоростью к началу колонны, затратив на весь путь t = 2 мин 36 с. Найдите, с какой скоростью vдвигалась колонна (скорость и длину колонны все это время считайте постоянными). Ответ приведите в м/с, округлив до целых.

Задача 2

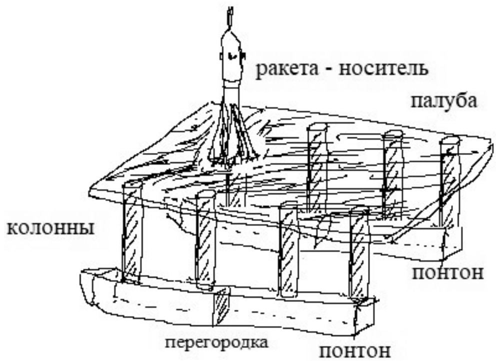
Два одинаковых шарика роняют (не сообщая начальной скорости) с одной и той же высоты над поверхностью. Первый эксперимент проводят на Земле, а второй – на планете, на которой ускорение свободного падения отлично от земного. За то время, за которое второй шарик достиг поверхности планеты, первый находился ровно на половине начальной высоты. Во сколько раз скорость первого шарика в момент падения на землю будет меньше скорости второго (в момент его падения на поверхность планеты)? Силу сопротивления воздуха не учитывайте.

Задача 3

Обозначим $P(n)$ – произведение всех цифр натурального числа n.
а) Найдите сумму $P(1) + P(2) + \cdots + P(200)$;
б) Найдите сумму $P(1) + P(2) + \cdots + P(2021)$.

Задача 4

Платформа для морского старта представляет собой горизонтальную палубу длины 135 м и ширины 67 м, на восьми колоннах, которые опираются на два понтона, заполненные воздухом. Длина каждого понтона 135 м, ширина 10 м, высота 21,5 м. Общая масса платформы 27 000 тонн.



а) Найдите глубину, на которую понтоны погружены в воду. Плотность морской воды считаем 1 т/м^3, весом стенок понтонов пренебрегаем.

б) На палубе платформы вертикально установили ракету-носитель массы 500 т, готовую к старту. Точка старта расположена на середине ширины платформы, на расстоянии 33,75 м от носа платформы. Для того, чтобы платформа осталась строго горизонтальной, а также для того, чтобы понизить центр тяжести платформы, понтоны частично заполняют водой. При этом каждый понтон в середине разделен перегородкой, что позволяет закачать в носовую часть понтона m_1 т воды, а в кормовую часть m_2 т. Найдите m_1 и m_2, если общая масса конструкции стала равна 50 500 тонн.

в) Платформа для морского старта нужна для того, чтобы можно было обеспечить старт ракеты в области экватора Земли. А почему старт из области экватора предпочтительней? Поясните свое мнение.

Задача 5

Чтобы обменяться необходимой информацией с центром управления, необходимо передать N различных пакетов информации $A_1, \ldots, A_N$ с космического аппарата в центр и столько же ответных пакетов $B_1, \ldots, B_N$ обратно. Передача одного пакета информации в одну сторону занимает одну секунду. В процессе передачи канал полностью занят (никакой другой информации в этот момент передаваться по нему не может). В вашем распоряжении имеется p каналов связи, работающих независимо друг от друга (каждый канал может передавать любой из пакетов $A_1, \ldots, A_N, B_1, \ldots, B_N$. Пакеты можно передавать в любом порядке, но ответ B_j передавать можно только после получения пакета A_i, $1 \le j \le N$.

а) За какое минимальное время t можно передать все информационные пакеты?

б) Опишите (любым способом) алгоритм, позволяющий организовать эту передачу.

в) Напишите программу на вашем любимом языке программирования, реализующую данный алгоритм.
Входные данные:
Вводится натуральное число N ($1 \le N \le 10\ 000$) и натуральное число p ($2 \le p \le 5$).

Выходные данные:
Выведите число t. Затем выведите tстрок. В каждой строке укажите номера пакетов, которые следует передавать в эту секунду. Номера разделяйте пробелом.
Пример:
Входные данные
2 2

Выходные данные
2
A1 A2
B1 B2

Варианты для 5 – 6 классов

Заочный тур

Задача 1

> Грегор остался на Призраке-5 одинодинешенек. Проверив, как перенесло спуск оборудование, он дал Арнольду радиограмму о благополучном прибытии.
>
> Роберт Шекли, «Призрак-5»

Грегор получил шифрограмму от Арнольда 127456398, в которой каждое двузначное число, составленное из двух соседних цифр кода: $12, 27, 74, 45, 56, 63, 39, 98$ делится либо на 2, либо на 3. Грегор шифрует ответ. Для шифровки он также использует девятизначный код вида $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$, где каждое из чисел a_k – это цифра от 1 до 9, причем каждая цифра встречается в коде ровно 1 раз. Но теперь известно, что любое двузначное число, составленное из двух соседних чисел кода, делится либо на 7, либо на 13.

Восстановите код Грегора. Приведите только ответ – перечислите девять цифр без пробелов и запятых. Если получается несколько вариантов кода, укажите их в ответе, разделяя пробелом.

Задача 2

> – Ты слышал что-нибудь о планете Мелдж? Грегор кивнул. Мелдж была маленькая, всеми забытая планета на северной окраине Галактики, довольно далеко от торговых маршрутов.
>
> Роберт Шекли, «Лаксианский Ключ»

У жителей планеты Мелдж бывает произвольное число рук. Однажды все они взялись за руки так, что каждая рука держит только одну руку, и свободных рук не осталось. Каково число жителей планеты Мелджс нечетным числом рук, четное или нечетное? Приведите полное решение.

Задача 3

> – Я Хват – Раковая Шейка, – представилось чудище. –Хватаю всякие вещи. – Как интересно! – рука Грегора поползла в сторону бластера.
> – Хватаю вещи, именуемые Ричард Грегор, – весело и бесхитростно продолжало чудище, – и поедаю обычно в шоколадном соусе.
>
> Роберт Шекли, «Призрак-5»

Хват – Раковая Шейка хочет съесть Грегора с шоколадным соусом. Он рассчитывает, сколько баночек соуса ему понадобится. Хват помнит, что, когда Грегору было 8 лет, для придания ему нужного вкуса требовалось ровно две баночки. В то время соус продавался в баночках по 50 г, и Хват покупал их из расчета 1 баночка на 16 кг веса Грегора. С тех пор вес Грегора увеличился на 120%, а соус стали выпускать в баночках по 100 г. Однако теперь его стали разбавлять молоком, добавляя в чистый соус a% молока (процент вычисляется от общей массы содержимого).
Сколько баночек шоколадного соуса надо приобрести Хвату, чтобы вкус Грегора стал в точности таким же (то есть на 1 кг приходилось бы столько же чистого соуса), как в детстве? Сколько граммов неиспользованного соуса у Хвата останется? Приведите только ответ – запишите два числа, разделяя их пробелом: количество баночек и количество оставшегося соуса в граммах.

Варьируемый параметр a *меняется от* 10 *до* 50 *с шагом* 10.

Задача 4

> Арнольд одарил его кривой усмешкой и спрятал пистолет в карман. – Все равно, оставлю на память. Если женюсь да если у меня родится сын, это ему будет первый подарок.
> – Нет уж, своему я припасу кое-что получше, – возразил Грегор и с нежностью похлопал по одеялу. – Вот она – самая надежная защита: одеяло над головой.
>
> Роберт Шекли, «Призрак-5»

Грегор купил для своего сына лоскутное одеяло прямоугольной формы. Оно сшито из четырех лоскутов разного цвета. Известно, что синий, красный и желтый лоскуты имеют форму квадратов, причем все три квадрата – разных размеров, а оранжевый лоскут имеет форму прямоугольника длины $3a$ см и ширины a см, где $a = \cdots$. Найдите периметр одеяла. Приведите только ответ. Если ответов несколько, запишите их через пробел.

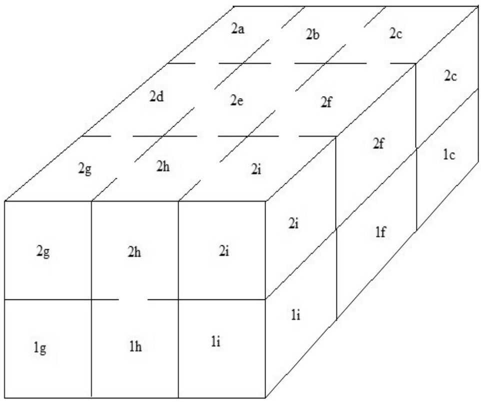
Варьируемый параметр a *меняется в диапазоне от* 11 *до* 16 *с шагом* 1.

Задача 5

А на пороге незапертой каюты возник серый исполин, чья шкура была испещрена красными крапинками. Исполин был наделен неисчислимым множеством рук, ног, щупалец, когтей и клыков да еще двумя крылышками в придачу.
Страшилище медленно надвигалось, постанывая и бормоча что-то н неодобрительное.
Оба признали в нем Ворчучело.

Роберт Шекли, «Призрак 5»

Призрак Ворчучело гонится за космонавтом Грегором по космическому кораблю. Жилое пространство корабля состоит из 18 кубических кают, расположенных на двух этажах, по 9 кают на каждом (см. рисунок). Грегор может перемещаться из каждой каюты в соседнюю, а находясь в каютах 1b, 2b и 1h, 2h может менять этаж. За один ход Грегор может сделать не более трех перемещений. Например, 1g-1h-2h-2i. Ворчучело также может перемещаться из каждой каюты в соседнюю, но кроме того, оно может перемещаться вверх или вниз из любой каюты. За один ход Ворчучело может проделать не более двух перемещений. Например, 1e-2e-2h. В начале погони Грегор находится в каюте 2f, а Ворчучело в каюте 2a.



Затем они делают ходы по очереди, начиная с Грегора.

Помогите Грегору – опишите алгоритм его действий, который при любом поведении Ворчучела позволяет Грегору спастись. Предполагается, что перед своим ходом каждый из них знает, где находится противник.

Задача 6

> С натянутой улыбкой Грегор сунул пистолет за пояс. Против воображаемого чудища водяной пистолет – самое подходящее оружие.
>
> Роберт Шекли, «Призрак 5»

Грегор и Хват – Раковая Шейка сталкиваются на космическом корабле рядом с лентой транспортера, которая движется горизонтально и равномерно со скоростью 2 м/с. Грегор держит в руках водяной пистолет, при виде которого Хват разворачивается и начинает убегать от Грегора вдоль ленты против ее движения со скоростью 6 м/с. Однако в то же самое мгновение Грегор от неожиданности роняет пистолет на ленту транспортера и бежит в противоположном Хвату направлении (то есть вдоль ленты по ходу ее движения) со скоростью 5 м/с.

Через 5 секунд после столкновения Хват оборачивается и, увидев, что противник больше не вооружен, вскакивает на ленту и бежит по ней в сторону Грегора с прежней собственной скоростью 6 м/с. Грегор понимает, что лишился пистолета через 7 секунд после столкновения. Он разворачивается, и бежит вдоль ленты обратно, по направлению к пистолету с прежней собственной скоростью 5 м/с. Успеет ли Грегор добраться до пистолета раньше, чем Хват доберется до Грегора? Приведите полное решение.

Очный тур

Задача 1

Преподаватели математики поставили перед юным исследователем космоса следующую задачу. У некоторой дроби числитель и знаменатель являются различными натуральными числами. Числитель увеличили на 1, а знаменатель – на 100.

а) Могла ли при этом исходная дробь увеличиться?

б) Могла ли она увеличиться вдвое?

в) Могла ли она уменьшиться вдвое?

Приведите полное решение.

Задача 2

Полученный из космоса снимок земной поверхности представляет собой прямоугольник (длины сторон различны), разделенный на одинаковые квадраты. Квадраты пронумерованы числами 1, 2, … n. Сумма периметров квадратов с нечетными номерами на 24 больше суммы периметров квадратов с четными номерами. Периметр прямоугольника в 3 раза больше периметра каждого из квадратов. Найдите площадь прямоугольника.

Задача 3

Обозначим $P(n)$ – произведение всех цифр натурального числа n. Найдите сумму:$P(1) + P(2) + \cdots + P(200)$.

Задача 4

Три инвестора из трех государств строят космодром на нейтральной территории рядом с границей этих государств. Стоимость строительства: N = 897 миллиардов «фунтиков». Расстояния от столиц этих государств до места строительства равны $R_1 = 11$ км, $R_2 = 9$ км, $R_3 = 10$ км соответственно. Распределите стоимость строительства между инвесторами, исходя из условия, что вносимые инвесторами суммы N_1,N_2,N_3 удовлетворяют соотношениям:

$N = N_1 + N_2 + N_3$, $N_1:N_2 = R_2:R_1$, $N_2:N_3 = R_3:R_2$, $N_1:N_3 = R_3:R_1$

(то есть больше вносит тот, чья столица ближе к космодрому).

Задача 5

Расставьте в вершинах куба числа $a_1, a_2, \dots a_8$ (целые, не обязательно попарно различные, не все одновременно равные нулю) так, чтобы число в каждой вершине равнялось сумме чисел, стоящих в трех вершинах, соединенных с данной ребром куба (надо найти хотя бы одну такую расстановку).

Задача 6

Код состоит из различных цифр и образует число, которое делится без остатка на любую из этих цифр.

а) Можно ли составить код из 7 цифр? Если да, приведите пример, если нет, объясните, почему.

б) Можно ли составить код из 8 цифр? Если да, приведите пример, если нет, объясните, почему.

в) Составьте код так, чтобы полученное натуральное число было наибольшим из возможных, удовлетворяющих приведенным условиям. Объясните свой ответ.

Олимпиада 2021/2022 года

Разминка

5 – 7 классы

1) Почему на Земле происходят затмения Луны?

а) Солнце оказывается на отрезке Земля – Луна и закрывает Луну от наблюдателя.
б) Луна поворачивается к наблюдателю темной стороной.
в) Луна прячется в тени Земли.
г) Луна оказывается вблизи отрезка Солнце – Земля и отраженный Луною солнечный свет не доходит до наблюдателя.
д) На отрезке Земля – Луна оказывается МКС, которая и закрывает Луну от наблюдателя.

2) За всю историю наблюдений с Земли видимый угловой размер этой планеты менялся более чем в 7 раз. Про какую планету идет речь?

а) Меркурий.

б) Венера.

в) Марс.

г) Юпитер.

д) Сатурн.

3) Известно, что доставлять космонавтов и грузы на Луну, стреляя из пороховой пушки, нерационально – космонавты погибнут от перегрузок, грузы тоже испортятся. А можно ли выстрелить из пороховой пушки с Луны на Землю?

а) Теоретически возможно, но нерационально по тем же причинам, что и для выстрела Земля – Луна. Поэтому никто этого не делал.
б) С точки зрения расчета траектории – это возможно. Но мешают другие причины, например, отсутствие кислорода, требуемого для сгорания пороха.

в) Теоретически возможно, такой проект был разработан, но никто пока не пробовал.
г) Не только возможно, но такой выстрел был произведен, а снаряд с грузом был успешно получен на Земле.
д) Не только возможно, но такой выстрел был произведен. Снаряд успешно достиг Земли и сгорел в атмосфере.

4) Как появились кратеры на Луне? Какая теория происхождения считается верной на данный момент?

а) Считается, что это следы падения метеоритов
б) Считается, что это следы внутренней активности Луны – извержений вулканов.
в) Считается, что кратеры появились при остывании Луны – переходе из расплавленного агрегатного состояния в твердое.
г) Считается, что это результат деятельности внеземных разумных существ.
д) Считается, что кратеры – это неоднородности, возникшие при сжатии пылевого облака, из которого и образовалась Луна.

5) Как был потерян второй робот на Луне – Луноход-2?

а) Он заехал в глубокий кратер и не смогу выбраться назад, так как грунт на поверхности оказался слишком рыхлым.
б) Преодолевая подъем, он наклонился и задел солнечной батареей за поверхность – пыль попала на батарею, и она перестала вырабатывать достаточную электрическую мощность.
в) Перед началом «лунной зимы» его надо было поставить на горку, чтобы во время зимы солнечная батарея вырабатывала энергию, необходимую для функционирования внутренних систем. Это не было сделано и «батарейки сели».
г) С ним была потеряна связь по неизвестным причинам.
д) На самом деле, никакого лунохода на Луне не было – это часть «лунной аферы».

6) Какое животное совершило первый орбитальный космический полёт?

а) Первый космический орбитальный полёт совершила собака Лайка на советском спутнике в ноябре 1957 г.

б) Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Сэм на космическом корабле в 1959 г.
в) Первый космический орбитальный полёт совершила французская кошка Фелисетта на космическом корабле в 1963 г.
г) Первый космический орбитальный полёт совершили русские собаки Белка и Стрелка на советском спутнике в августе 1960 г.
д) Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Альберт на ракете Фау-2 в 1948 г.

7) В конце 60-х, начале 70-х годов прошлого века на Землю были доставлены образцы лунного грунта. Какие страны участвовали в этом проекте?

а) США и СССР независимо.
б) Страны Европейского союза.
в) Китайская народная республика.
г) Это был общемировой проект.
д) Никакого лунного грунта доставлено не было – это была фальсификация.

8) Какого цвета звезды можно наблюдать с Земли невооруженным глазом?

а) Белые, красные, синие, желтые и оранжевые.
б) Только белые.
в) Только белые и красные.
г) Только белые, синие и красные.
д) Белые, красные, голубые, желтые, коричневые, зеленые и оранжевые.

9) Как часто планета Нептун проходит по диску Солнца для земного наблюдателя?

а) Примерно раз в месяц.
б) Один раз в четыре года.
в) Каждый день в ясную погоду.
г) Один раз в 10000 лет.
д) Никогда.

10) Какой космический объект кажется больше при наблюдении с Юпитера – Солнце или спутник Юпитера Ио?

а) Конечно, Солнце!
б) Они выглядят примерно одинаковыми по размеру.
в) Ио.
г) Ио невозможно наблюдать, находясь на Юпитере.
д) Это неизвестно, поскольку никто из людей никогда не был на Юпитере.

8 – 9 классы

1) За всю историю наблюдений с Земли видимый угловой размер этой планеты менялся более чем в 7 раз. Про какую планету идет речь?

а) Меркурий.
б) Венера.
в) Марс.
г) Юпитер.
д) Сатурн.

2) Известно, что доставлять космонавтов и грузы на Луну, стреляя из пороховой пушки, нерационально – космонавты погибнут от перегрузок, грузы тоже испортятся. А можно ли выстрелить из пороховой пушки с Луны на Землю?

а) Теоретически возможно, но нерационально по тем же причинам, что и для выстрела Земля – Луна. Поэтому никто этого не делал.
б) С точки зрения расчета траектории – это возможно. Но мешают другие причины, например, отсутствие кислорода, требуемого для сгорания пороха.
в) Теоретически возможно, такой проект был разработан, но никто пока не пробовал.
г) Не только возможно, но такой выстрел был произведен, а снаряд с грузом был успешно получен на Земле.

д) Не только возможно, но такой выстрел был произведен. Снаряд успешно достиг Земли и сгорел в атмосфере.

3) Как появились кратеры на Луне? Какая теория происхождения считается верной на данный момент?

а) Считается, что это следы падения метеоритов
б) Считается, что это следы внутренней активности Луны – извержений вулканов
в) Считается, что кратеры появились при остывании Луны – переходе из расплавленного агрегатного состояния в твердое.
г) Считается, что это результат деятельности внеземных разумных существ.
д) Считается, что кратеры – это неоднородности, возникшие при сжатии пылевого облака, из которого и образовалась Луна.

4) Как был потерян второй робот на Луне – Луноход-2?

а) Он заехал в глубокий кратер и не смогу выбраться назад, так как грунт на поверхности оказался слишком рыхлым.
б) Преодолевая подъем, он наклонился и задел солнечной батареей за поверхность – пыль попала на батарею, и она перестала вырабатывать достаточную электрическую мощность.
в) Перед началом «лунной зимы» его надо было поставить на горку, чтобы во время зимы солнечная батарея вырабатывала энергию, необходимую для функционирования внутренних систем. Это не было сделано и «батарейки сели».
г) С ним была потеряна связь по неизвестным причинам.
д) На самом деле, никакого лунохода на Луне не было – это часть «лунной аферы».

5) К орбитальной станции, находящейся на круговой земной орбите, пристыковывается космический корабль. В момент стыковки двигатели станции и корабля выключены, векторы скоростей коллинеарны, но модуль скорости корабля чуть больше модуля скорости станции. После стыковки корабль и станция движутся как единое тело, влияние атмосферы пренебрежимо мало. Как изменится период обращения станции после стыковки по сравнению с ее периодом до стыковки?

а) Не изменится.
б) Увеличится.
в) Уменьшится.
г) Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от отношения масс.
д) Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от высоты орбиты.

6) Какое животное совершило первый орбитальный космический полёт?

а) Первый космический орбитальный полёт совершила собака Лайка на советском спутнике в ноябре 1957 г.
б) Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Сэм на космическом корабле в 1959 г.
в) Первый космический орбитальный полёт совершила французская кошка Фелисетта на космическом корабле в 1963 г.
г) Первый космический орбитальный полёт совершили русские собаки Белка и Стрелка на советском спутнике в августе 1960 г.
д) Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Альберт на ракете Фау-2 в 1948 г.

7) Какое минимально возможное время получения ответа космонавта с Марса при обращении к нему с Земли (от момента обращения до получения на Земле ответа)?

а) 44 минуты 35 секунд.
б) 25 мин 21 секунда.
в) 22 мин 58 секунд.
г) 1 час 14 минут.
д) 6 минут 12 секунд

8) Какого цвета звезды можно наблюдать с Земли?

а) Белые, красные, синие, желтые и оранжевые.
б) Только белые.
в) Только белые и синие.
г) Только белые, синие и красные.
д) Белые, красные, голубые, желтые, коричневые, зеленые и оранжевые.

9) Как часто планета Нептун проходит по диску Солнца для земного наблюдателя?

а) Примерно раз в месяц.
б) Один раз в четыре года.
в) Каждый день в ясную погоду.
г) Один раз в 10000 лет.
д) Никогда.

10) Какой космический объект кажется больше при наблюдении с Юпитера – Солнце или спутник Юпитера Ио?

а) Конечно, Солнце!
б) Они выглядят примерно одинаковыми по размеру.
в) Ио.
г) Ио невозможно наблюдать, находясь на Юпитере, из-за очень плотной атмосферы.
д) Это неизвестно, поскольку никто из людей никогда не был на Юпитере.

10 – 11 классы

1) За всю историю наблюдений с Земли видимый угловой размер этой планеты менялся более чем в 7 раз. Про какую планету идет речь?

а) Меркурий.
б) Венера.
в) Марс.
г) Юпитер.
д) Сатурн.

2) Известно, что доставлять космонавтов и грузы на Луну, стреляя из пороховой пушки, нерационально – космонавты погибнут от перегрузок, грузы тоже испортятся. А можно ли выстрелить из пороховой пушки с Луны на Землю?

а) Теоретически возможно, но нерационально по тем же причинам, что и для выстрела Земля – Луна. Поэтому никто этого не делал.
б) С точки зрения расчета траектории – это возможно. Но мешают другие причины, например, отсутствие кислорода, требуемого для сгорания пороха.
в) Теоретически возможно, такой проект был разработан, но никто пока не пробовал.
г) Не только возможно, но такой выстрел был произведен, а снаряд с грузом был успешно получен на Земле.
д) Не только возможно, но такой выстрел был произведен. Снаряд успешно достиг Земли и сгорел в атмосфере.

3) Как появились кратеры на Луне? Какая теория происхождения считается верной на данный момент?

а) Считается, что это следы падения метеоритов
б) Считается, что это следы внутренней активности Луны – извержений вулканов
в) Считается, что кратеры появились при остывании Луны – переходе из расплавленного агрегатного состояния в твердое.
г) Считается, что это результат деятельности внеземных разумных существ.
д) Считается, что кратеры – это неоднородности, возникшие при сжатии пылевого облака, из которого и образовалась Луна.

4) Как был потерян второй робот на Луне – Луноход-2?

а) Он заехал в глубокий кратер и не смогу выбраться назад, так как грунт на поверхности оказался слишком рыхлым.
б) Преодолевая подъем, он наклонился и задел солнечной батареей за поверхность – пыль попала на батарею, и она перестала вырабатывать достаточную электрическую мощность.
в) Перед началом «лунной зимы» его надо было поставить на горку, чтобы во время зимы солнечная батарея вырабатывала энергию, необходимую для функционирования внутренних систем. Это не было сделано и «батарейки сели».
г) С ним была потеряна связь по неизвестным причинам.
д) На самом деле, никакого лунохода на Луне не было – это часть «лунной аферы».

5) К орбитальной станции, находящейся на круговой земной орбите, пристыковывается космический корабль. В момент стыковки двигатели станции и корабля выключены, векторы скоростей коллинеарны, но модуль скорости корабля чуть больше модуля скорости станции. После стыковки корабль и станция движутся как единое тело, влияние атмосферы пренебрежимо мало. Как изменится перигей орбиты станции после стыковки по сравнению с ее перигеем до стыковки?

а) Не изменится.
б) Увеличится.
в) Уменьшится.
г) Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от отношения масс.
д) Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от высоты орбиты.

6) К орбитальной станции, находящейся на круговой земной орбите, пристыковывается космический корабль. В момент стыковки двигатели станции и корабля выключены, векторы скоростей коллинеарны, но модуль скорости корабля чуть больше модуля скорости станции. После стыковки корабль и станция движутся как единое тело, влияние атмосферы пренебрежимо мало. Как изменится апогей орбиты станции после стыковки по сравнению с ее апогеем до стыковки?

а) Не изменится.
б) Увеличится.
в) Уменьшится.
г) Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от отношения масс.
д) Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от высоты орбиты.

7) Какое минимально возможное время получения ответа космонавта с Марса при обращении к нему с Земли (от момента обращения до получения на Земле ответа)?

а) 44 минуты 35 секунд.
б) 25 мин 21 секунд.

в) 22 мин 58 секунд.
г) 1 час 14 минут.
д) 6 минут 12 секунд.

8) Какого цвета звезды можно наблюдать с Земли?

а) Белые, синие, красные, желтые и оранжевые.
б) Только белые.
в) Только белые и красные.
г) Только белые, синие и красные.
д) Белые, красные, голубые, желтые, коричневые, зеленые и оранжевые.

9) Как часто планета Нептун проходит по диску Солнца для земного наблюдателя?

а) Примерно раз в месяц.
б) Один раз в четыре года.
в) Каждый день в ясную погоду.
г) Один раз в 10000 лет.
д) Никогда.

10) Какой космический объект кажется больше при наблюдении с Юпитера – Солнце или спутник Юпитера Ио?

а) Конечно, Солнце!
б) Они выглядят примерно одинаковыми по размеру.
в) Ио.
г) Ио невозможно наблюдать, находясь на Юпитере, из-за очень плотной атмосферы.
д) Это неизвестно, поскольку никто из людей никогда не был на Юпитере.

Варианты для 10 – 11 классов

Заочный тур

Задача 1

> В приемной между тем появилась представительница одной из рекламных фирм. Подбежав к Незнайке, она сунула ему в руки плакат, на котором было написано: Жалеть не будут коротышки и не потратят деньги зря, коль будут все жевать коврижки Конфетной фабрики «Заря».
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

После такой рекламы фабрика «Заря» получила огромный заказ на коврижки и распределила его на 100 пекарей (каждый из них выпек свою часть заказа, причем эти части могли быть различны). Каждый пекарь работал время $t_j, j = 1, 2, \dots, 100$, за которое 99 остальных пекарей, работая вместе, выполнили бы $\frac{k}{n}$ всего заказа. Суммарное время работы $T = t_1 + t_2 + \cdots + t_{100}$ показалось пекарям слишком большим и в следующий раз они для выполнения такого же заказа собрались вместе и управились с ним за 8 часов, работая без перерывов (производительность каждого осталась прежней). Найдите T (ответ запишите в часах).

Задача 2

> В те дни в Космическом городке гостили астроном Альфа и лунолог Мемега и приехавшие вместе с ними два физика Кантик и Кантик.
> Все четверо приехали специально, чтоб познакомиться с устройством космической ракеты и скафандров, так как сами собирались построить ракету и совершить космический полет к Земле.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Лунатики построили твердотельный космический аппарат (не имеющий подвижных частей), способный выдерживать 100-кратную перегрузку (перегрузкой считайте ускорение свободного падения внутри снаряда, отнесенное к g = 9,8 м/с^2). Его предполагается запустить как артиллерийский снаряд с поверхности Луны по параболической траектории. Ствол орудия уложен горизонтально на горное плато. Вычислите необходимую длину ствола.

Задача 3

Наконец он выплакал все слезы, которые у него были, и встал с земли. И весело засмеялся, увидев друзей-коротышек, которые радостно приветствовали родную Землю.
– Ну вот, братцы, и все! – весело закричал он. – А теперь можно снова отправляться куда-нибудь в путешествие!

Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

В следующий раз коротышки отправились на Марс. Во время экспедиции Знайка решил провести следующий опыт. Он выдул два мыльных пузыря диаметрами d_1 = 5 см и d_2 = 6 см, осторожно проткнул мыльную пленку, образующую стенки пузырей, тонкой стеклянной трубкой, и соединил пузыри между собой. После этого весь воздух из одного пузыря полностью перетек в другой пузырь, который в результате увеличился в диаметре до $d_3 = \cdots$ см. Какое значение атмосферного давления p получил космонавт по результатам своего опыта? Ускорение свободного падения у поверхности Марса составляет g = 3,7 м/с^2. Поверхностное натяжение мыльного раствора σ = 0,04 Н/м, плотность ртути ρ = 13,6 г/см^3. Объемом трубки можно пренебречь. Ответ приведите в миллиметрах марсианского ртутного столба, округлив до сотых.

Задача 4

Таким образом, Луна – это не полый шар, вроде резинового мяча, как предположил Знайка, а такой шар, внутри которого имеется другой шар, окруженный прослойкой из воздуха или какого-нибудь другого газа.

Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что модель Луны такова, как описана в книге. А именно, внешняя поверхность Луны есть шаровой слой толщиной 17,4 км, затем идет слой воздуха толщиной 120 км, а затем находится твердое шарообразное однородное ядро. Каково тогда ускорение м/с^2 свободного падения на поверхности этого внутреннего ядра? Масса Луны равна $7{,}3477 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны 1737,4 км, гравитационная постоянная $6{,}6741 \cdot 10^{-11}\text{м}^3\text{кг}^{-1}\text{с}^{-2}$. Ответ округлите до сотых.

Задача 5

> А ты не горюй, работы всем хватит, – сказал ему Винтик. – Во-первых, вокруг домов надо посадить цветы, чтоб было красиво; во-вторых, от электростанции до Космического городка надо провести электролинию, чтоб было электричество; в-третьих, надо сделать дорогу, заасфальтировать улицы, провести водопровод, отделать помещения...
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

В квадрате $ABCD$ со стороной 3 отметили середины всех сторон (точка E – на стороне AB, точка F – на стороне BC, точка G – на стороне CD и точка H – на стороне DA). Затем провели ломаную $AFDECHBGA$. Найдите площадь той части квадрата, в которую попал его центр.

Задача 6

> Коротышки в Космическом городе уже давно спали.Никто не ждал ничего плохого. Не спали лишь Знайка и профессор Звездочкин. Они были заняты математическими расчетами.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Помогите Знайке завершить расчеты: найдите минимальное значение выражения

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

если a, b и c – различные натуральные числа, причем $ab + ac + bc \geq n$.

Задача 7

> Для лунных астрономов появление космического корабля над городом Фантомасом не было неожиданностью. В свое время они точно засекли место, в котором прилунилась ракета.
> С тех пор несколько десятков гравитонных телескопов, разбросанных в различных лунных городах, следили за этой точкой лунного небосвода.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что модель Луны такова, как описана в книге. А именно, внешняя поверхность Луны есть шаровой слой толщиной 17,4 км, затем идет слой воздуха толщиной 120 км, а затем находится твердое шарообразное однородное ядро. В попытке зафиксировать появление ракеты землян на внутренней стороне внешней поверхности Луны лунные коротышки используют телескопы с 40-кратным увеличением и полем зрения окуляра – 60 градусов. Предположив, что наблюдение непрерывно ведут 200 телескопов (области наблюдения не перекрываются), а появление можно равновероятно ожидать в любой точке, какова вероятность обнаружения?

Задача 8

> Кроме заботы о пище, Жулио проявил также заботу о чистоте.
> – У вас, голубчик, в этой комнате слишком много скопилось дряни, – сказал он однажды Спрутсу. – Однако убирать здесь не стоит. Мы попросту перейдем в другую комнату, а когда насвиним там, перейдем в третью, потом в четвертую, и так, пока не загадим весь дом, а там видно будет.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Дом Спрутса имеет форму прямоугольника, поделенного на квадратные комнаты. Жулио составил план дома на бумаге, разбив его, соответственно, на клетки (всего M строк, N столбцов). Однажды он отметил на плане захламленные комнаты, а потом вырезал отмеченные клетки. На сколько кусков распадётся оставшаяся часть плана? Две клетки не распадаются, если они имеют общую сторону. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая решает эту задачу.

Входные данные:

На вход подаются три натуральных числа − количество строк M, количество столбцов N карты и число K − количество вырезанных клеток. Затем последовательность K пар чисел – номер строки и номер столбца вырезанной клетки.

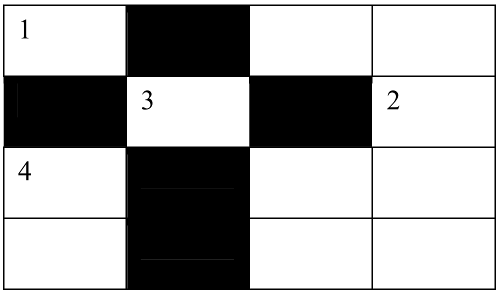
Выходные данные:

Необходимо вывести одно число – количество кусков, на которые распался план.

Пример:

Входные данные:
4 4 5
1 2
2 1
2 3
3 2
4 2

Выходные данные:
4



Пояснение – смотри рисунок, где черным обозначены вырезанные клетки, а номера показывают части, на которые распалась бумага.

Очный тур

Задача 1

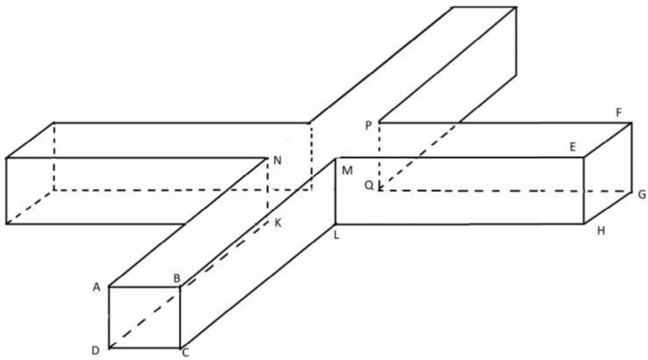
Дана функция $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ с ненулевыми a и c. Известно, что ее график имеет точки в первой, второй и третьей координатных четвертях (и только в них).

а) Найдите знаки коэффициентов a, b, c.

б) Пусть известно дополнительно, что $f(-1) = 2f(-2)$. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

Задача 2

Космическая станция составлена из центрального куба и четырех одинаковых прямоугольных параллелепипедов (см. рисунок), длина



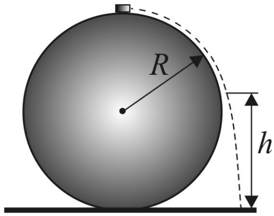
которых в $k = 4$ раза больше двух других размеров:

$$AN = DK = BM = CL = PF = QG = ME = LH =$$

$$= 4AB = 4BC = 4EF = 4FG.$$

Космонавту, вышедшему в открытый космос, необходимо добраться из точки A в точку G по поверхности станции. Проложите кратчайший маршрут.

Задача 3



На планете, лишенной атмосферы, космонавты провели следующий опыт. Небольшой грузик массой m = 10 г они положили на вершину закрепленного шара радиуса R = 0,6 м, обильно смазанного жидкой смазкой. После незначительного толчка грузик начал скользить по поверхности шара и оторвался от нее на высоте h = 0,6 м, отсчитываемой от нижней точки шара. Найдите количество теплоты Q, которое выделилось за время скольжения грузика. Считайте, что поверхностное натяжение смазки не препятствует отрыву грузика от поверхности шара. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с .

Задача 4

На планете Блук профессор Селезнев хотел пополнить коллекцию зоопарка. Туземцы продавали говорунов на ярмарке за A пиастров, а пегасов – за B пиастров. Профессор хочет потратить как можно больше денег, но не более C пиастров, купив как можно больше образцов фауны. То есть, сначала из всех наборов животных, которые профессор может купить на имеющиеся деньги, он выбирает один или несколько наборов с наибольшей стоимостью. Затем из этих наборов профессор выбирает набор с наибольшим числом животных. Помогите ему вычислить стоимость такой покупки.

Входные данные:

Вводятся три целых числа A, B, C $1 \le A < B \le 100$, $0 \le C \le 1000$.

Выходные данные:

Выведите два числа – число говорунов и число пегасов, которых купит профессор.

Примеры:

Входные данные

2 3 11

Выходные данные

4 1

Комментарий: потратив ровно 11 пиастров, можно купить 4 говоруна и 1 пегаса или 1 говоруна и 3 пегасов, но в первом варианте животных больше – его и выбирает профессор.

Входные данные

3 5 10

Выходные данные

0 2

Задача 5

Искусственный спутник сделал один виток по своей орбите. Через равные промежутки времени он передавал свои координаты: широту x (в градусах, отрицательная широта соответствует южному полушарию) и долготу y (в градусах по Гринвичу, отрицательная долгота соответствует западному полушарию).

Номер данного	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Долгота	162	164	166	168	171	173	175	177	179	-179	-177	-175	-172	-170	-168	-165	-163
Широта	0	-1	-3	-4	-6	-7	-9	-10	-11	-13	-14	-16	-18	-19	-21	-22	-24
Номер данного	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Долгота	-160	-158	-155	-152	-150	-147	-144	-141	-137	-134	-130	-126	-122	-117	-112	-107	-101
Широта	-26	-28	-29	-31	-33	-35	-37	-39	-42	-44	-46	-49	-51	-53	-56	-58	-59
Номер данного	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Долгота	-95	-87	-79	-70	-60	-48	-36	-22	-7	8	23	37	49	61	71	80	88
Широта	-60	-59	-57	-53	-47	-39	-30	-18	-6	7	19	30	40	48	54	58	60
Номер данного	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
Долгота	95	102	107	113	118	122	126	130	134	137	141	144	147	150	153	155	158
Широта	60	59	58	56	53	51	48	46	44	41	39	37	35	33	31	29	27
Номер данного	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
Долгота	161	163	166	168	170	172	175	177	179	-179	-176	-175	-172	-170	-168	-166	-164
Широта	26	24	22	21	19	17	16	14	13	11	10	8	7	6	4	3	1
Номер данного	86																
Долгота	-162																
Широта	0																

Иными словами, в момент передачи каждого данного наблюдатель, находящийся на поверхности Земли в точке с широтой x и долготой y, видел спутник точно в зените. Эти данные нанесены на карту Земли (в плоской прямоугольной проекции, см. рисунок). Вычислите

а) Наклонение орбиты к плоскости экватора;

б) Длину большой полуоси эллипса орбиты;

в) Высоту спутника над поверхностью Земли в перигее и в апогее орбиты.

Задача 6

На орбиту выведен спутник, оснащенный, в том числе, принимающей/передающей антенной, электрическими ракетными двигателями (они поддерживают высоту спутника на орбите и его ориентацию) и солнечными батареями отечественного производства (с односторонней рабочей поверхностью). Вывод прошел в штатном режиме, спутник вышел на заданную орбиту. Однако в силу ошибки программистов спутник ориентировался на орбите неверно – с поворотом на 180 градусов. В результате антенна спутника направлена от Земли, а рабочая поверхность солнечных батарей – к Земле. Двигатели спутника автоматически поддерживают его в этой (неверной) ориентации. Центр управления полетами не может связаться со спутником и провести коррекцию, так как антенна спутника экранируется самим спутником.

Предложите центру управления полетами способ исправить ситуацию.

Варианты для 8 – 9 классов

Заочный тур

Задача 1

> – Ну, надо сделать другую ракету, – сказала Селедочка.
> – Это не так просто, – ответил Знайка. – Ведь прибора невесомости у нас теперь нет. Придется строить многоступенчатую ракету, которая могла бы преодолеть силу земного притяжения.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что Знайка решил совершить полет на Луну в артиллерийском снаряде. Вычислите минимально возможную перегрузку, действующую на экипаж во время старта (выстрела), исходя из следующих предположений:

- длина орудийного ствола 50 м;
- ствол расположен вертикально, а снаряд должен долететь до Луны;
- движение снаряда внутри ствола равноускоренное.

Перегрузкой называется ускорение свободного падения внутри снаряда, отнесенное к g = 9,8 м/с^2. Землю считайте однородным шаров, торможение снаряда в атмосфере и центробежную силу, возникающую в результате вращения Земли, не учитывайте. Ответ округлите до трех значащих цифр.

Задача 2

> Через минуту все увидели, что он возвращается обратно. Лицо его было испуганно. – Братцы, а где же солнышко? – спросил он, с недоумением озираясь вокруг.
> – Ты, Незнайка, какой-то осел! – ответил с насмешкой Знайка. – Ну какое тут солнышко…
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

В ходе своего орбитального движения Марс время от времени затмевает различные звезды от земного наблюдателя. Оцените приблизительно время покрытия звезды Марсом, если Марс находится в противостоянии, а покрытие (затмение) началось и закончилось в экваториальной области Марса.

Задача 3

> Коротышки в Космическом городе уже давно спали. Никто не ждал ничего плохого. Не спали лишь Знайка и профессор Звездочкин. Они были заняты математическими расчетами.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Помогите Знайке завершить расчеты: найдите значение выражения

$$\frac{2xy(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2}+\frac{(x+y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2},$$

если известно, что x и y различны, а $x + y = 2021$.

Задача 4

> А ты не горюй, работы всем хватит, – сказал ему Винтик. – Во-первых, вокруг домов надо посадить цветы, чтоб было красиво; во-вторых, от электростанции до Космического городка надо провести электролинию, чтоб было электричество; в-третьих, надо сделать дорогу, заасфальтировать улицы, провести водопровод, отделать помещения...
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

На треугольном участке земли ABC решили построить ангар DEF. Точка D делит сторону AB треугольника ABC пополам. Точка E делит сторону BC в отношении 1:2, считая от вершины B. Точка F делит сторону CA в отношении 1:3, считая от вершины C. Найдите площадь ангара – треугольника DEF, если площадь треугольника ABC равна 24.

Задача 5

Особенно поразил всех рассказ о полицейском Хныгле, который, попав в состояние невесомости, выстрелил из дальнобойной крупнокалиберной винтовки, в результате чего реактивная сила понесла его с такой скоростью, что он за каких-нибудь полчаса совершил кругосветное путешествие, то есть облетел вокруг внутреннего ядра Луны и упал примерно в том же месте, откуда вылетел.

Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Вокруг некоторой планеты по круговым орбитам движутся два одинаковых спутника, отношение изменений импульсов которых за половину периодов их обращений $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = n \dots$. Определите отношение $k = \frac{R_1}{R_2}$ радиусов орбит этих спутников. Ответ округлите до сотых.

Варьируемый параметр n *выбирается в диапазоне от* 2 *до* 20 *с шагом* 1.

Задача 6

Винтик и Шпунтик тотчас же принялись собирать колесно-гусеничный мотоцикл-вездеход, который хранился в разобранном виде в специальном отсеке ракеты.

Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

В поисках воды робот–вездеход обследует окрестности Южного полюса Луны. Вездеход стартует из точки на 60 градусе южной широты и движется со скоростью 10 см/с так, что в каждый момент времени вектор скорости направлен строго восток-юго-восток, образуя с параллелью угол 30 градусов. Какой путь пройдет вездеход, прежде чем достигнет Южного полюса?

Задача 7

> В приемной между тем появилась представительница одной из рекламных фирм. Подбежав к Незнайке, она сунула ему в руки плакат, на котором было написано: Жалеть не будут коротышки и не потратят деньги зря, коль будут все жевать коврижки Конфетной фабрики «Заря».
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

После такой рекламы фабрика «Заря» получила огромный заказ на коврижки и распределила его на 100 пекарей (каждый из них выпек свою часть заказа, причем эти части могли быть различны). Каждый пекарь работал время $t_j, j = 1, 2, \dots, 100$, за которое 99 остальных пекарей, работая вместе, выполнили бы $\frac{k}{n}$ всего заказа. Суммарное время работы $T = t_1 + t_2 + \dots + t_{100}$ показалось пекарям слишком большим и в следующий раз они для выполнения такого же заказа собрались вместе и управились с ним за 8 часов, работая без перерывов (производительность каждого осталась прежней). Найдите T (ответ запишите в часах).

Задача 8

> Дело действительно быстро пошло на лад. Правда, в этот день покупатели больше не появлялись, зато, когда Мига и Жулио пришли в контору на следующий день, они обнаружили, что торговля акциями идет довольно бойко. Перед Незнайкой и Козликом то и дело появлялись разные коротышки и выкладывали на стол свои денежки.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

В первый день доход от продажи составил 1 фертинг, во второй – 2 фертинга, в итоге полученные от продажи акций деньги образовали последовательность 1, 2, 4, 8, 61, 77, 541, 866, 5431, …

Каждое следующее число в последовательности получается так – к предыдущему числу надо прибавить его «обращение» – число, за-

писанное обратным порядком цифр, а затем у суммы отсортировать цифры по убыванию. Например, 866 + 668 = 1534, после сортировки цифр получаем следующий член последовательности 5431.
Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по номеру n вычисляет n −ый член последовательности.

Входные данные:
Программа должна ввести с клавиатуры число n от 1 до 100 включительно.

Выходные данные:
Программа должна вывести на экран одно число – n-ый член последовательности.

Пример:
Ввод: 4
Вывод: 8

Ввод: 8
Вывод: 866

Очный тур

Задача 1

Функция $f(t)$ описывает траекторию струи воздуха при движении космического аппарата в атмосфере (здесь t – время). Функция определена
на всей числовой прямой и для каждого t удовлетворяет уравнению

$$f(t) + t \cdot f(1 - t) = \frac{t + 1}{t^2 - t + 1}.$$

Найдите $f(5)$.

Задача 2

Второй космической скоростью $v_{2к}$ называется минимальная скорость, которую нужно сообщить в вертикальном направлении телу для того, чтобы оно неограниченно удалилось от поверхности планеты, причем его скорость на бесконечно большом расстоянии от планеты стала равной нулю. Известно, что для Земли $v_{2к} = 11{,}2$ км/с. Какова будет скорость v_∞ тела на бесконечно большом расстоянии от Земли, если на поверхности Земли сообщить ему вертикальную скорость $u = 12{,}2$ км/с? Влиянием вращения Земли вокруг оси и притяжением других небесных тел можно пренебречь. Ответ приведите в км/с, округлив до сотых.

Задача 3

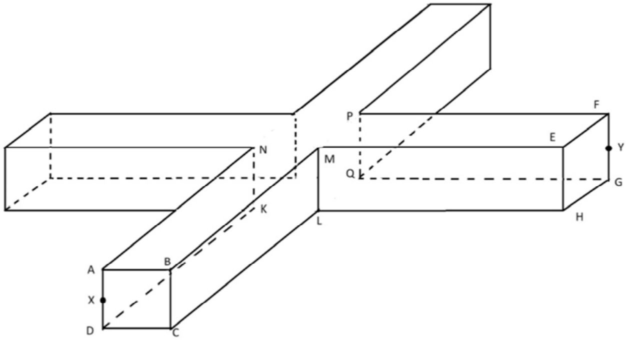
Пять выключателей расположены последовательно в ряд. Каждый может находиться в одном из двух положений – выключено (обозначается нулем) и включено (обозначается единицей). Свет включается, если есть пара выключателей, которая включена, и эти выключатели не являются соседями в ряду из единиц.
Вводятся пять чисел, каждое из которых равно 0 или 1. Требуется вывести YES, если свет загорится и NO в противном случае.

Пример:
Ввод: 1 0 1 1 0
Вывод: YES
Ввод: 1 1 1 0 0
Вывод: NO

Задача 4

Космическая станция составлена из центрального куба и четырех одинаковых прямоугольных параллелепипедов (см. рисунок), длина которых в $k = 4$ раза больше двух других размеров:

$$AN = DK = BM = CL = PF = QG = ME = LH =$$
$$= 4AB = 4BC = 4EF = 4FG.$$



Космонавту, вышедшему в открытый космос, необходимо добраться из точки X – середины ребра AD, в точку Y – середину ребра FG по поверхности станции. Проложите кратчайший маршрут.

Задача 5

На борту Российского сегмента Международной космической станции для приготовления горячей пищи космонавтам нужно воспользоваться специальным агрегатом – системой регенерации воды из конденсата атмосферной влаги (СРВ-К2М). Эта система подогревает нужный объем воды с требуемыми характеристиками и позволяет через краник заправлять пакеты с сублимированной пищей. В агрегате установлен нагревательный элемент сопротивлением R, подключенный к источнику постоянного тока с внутренним сопротивлением $r < R$. Случилось так, что нагревательный элемент сломался, причем аналогичного элемента на борту МКС не оказалось. Можно ли заменить элемент другим, с сопротивлением $R' < r$ и таким, чтобы время подогрева не изменилось?

Задача 6

Известно, что ось вращения Урана практически в точности лежит в плоскости эклиптики (плоскость, в которой лежит орбита Земли при вращении вокруг Солнца), а вращение Урана вокруг Солнца тоже практически в точности происходит в этой плоскости. Спутник Урана Титания вращается в плоскости экватора планеты (период обращения спутника составляет около 209 часов). Опишите, какие фазы спутника может наблюдать житель Урана в течение одного витка Титании и как они могут меняться в течение этого витка.

Варианты для 5 – 7 классов

Заочный тур

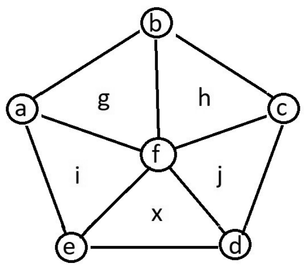
Задача 1

> Вернувшись в Цветочный город, Знайка много рассказывал о своем путешествии. Его рассказы очень заинтересовали всех, и особенно астронома Стекляшкина, который не раз наблюдал Луну в телескоп.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

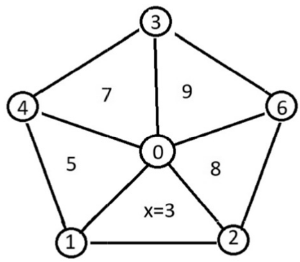
Космический телескоп имени Кеплера с 2009 по 2014 год непрерывно наблюдал одну и ту же область неба в созвездии Лебедя. Мог ли он провести такую же наблюдательную программу в созвездии Скорпиона? Объясните свой ответ.

Задача 2

> Незнайка и Козлик с утра до вечера продавали акции, Мига же только и делал, что ездил в банк. Там он обменивал вырученные от продажи мелкие деньги на крупные и складывал их в несгораемый шкаф.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»



Мига установил на замке несгораемого шкафа шифр $abcdefghijx$. Шифр он составил так. На рисунке слева он заменил буквы $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ на цифры (в некотором порядке) от нуля до девяти (разным буквам отвечают разные цифры). При этом каждая цифра, стоящая в треугольнике, есть сумма цифр, стоящих в вершинах этого

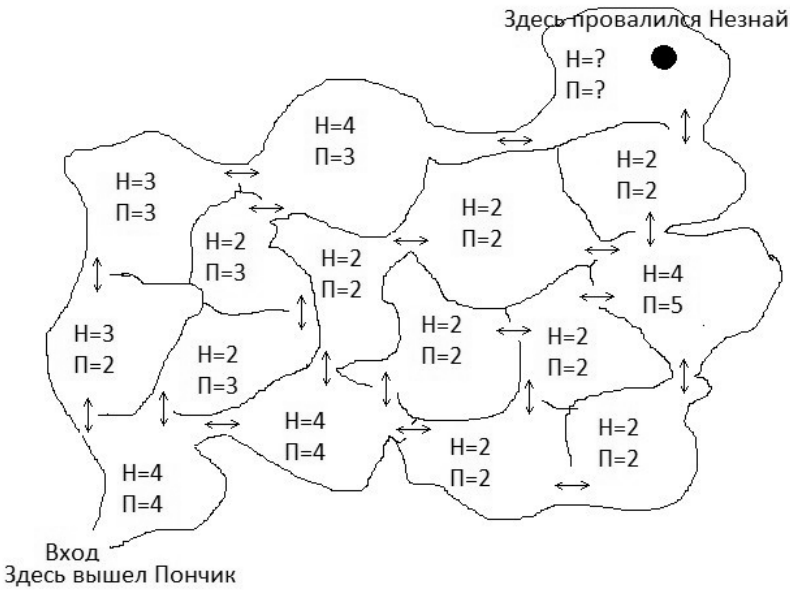


треугольника (например, $g = a + b + f$). Далее Мига нашел число $x = e + f + d$, причем подобрал такую комбинацию цифр $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, при которой число x минимально.
Разгадайте шифр Миги.

Задача 3

Пончик стал мерзнуть еще сильнее и с таким усердием заплясал на ходу, что один космический сапог соскочил у него с ноги и полетел куда-то в сторону. Пончик бросился искать его и сразу же заблудился между ледяными колоннами. Испугавшись, он принялся звать Незнайку, но Незнайка уже не мог прийти к нему на помощь. Как раз в это время Незнайка вышел из грота и попал в новый тоннель, дно которого было покрыто льдом. Как только Незнайка ступил на лед, он поскользнулся и покатился вниз.

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне



Незнайка и Пончик заблудились в лабиринте в пещере на Луне. Карта лабиринта перед вами. На этой карте для каждой комнаты пещеры написаны два числа – сколько раз комнату проходил Незнайка, и сколько раз – Пончик. Маршруты Пончика и Незнайки различны и неизвестны (стрелки на карте показывают лишь возможность перехода из одной пещеры в другую). В результате Незнайка провалился в отверстие под поверхность Луны, а Пончик вышел из лабиринта обратно. Найдите два числа, помеченные на карте знаками вопроса.

Задача 4

> Поднявшись с пола, он достал из ящика стола раздвижную вычислительную линейку. К одному концу этой линейки он прикрепил лунит, а к другому магнитный железняк и начал осторожно сдвигать оба конца.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Экспериментальным путем Знайка установил, что вес предметов начинает исчезать, если лунный камень (лунит) находится на расстоянии ≤ 150 см от камня магнитного железняка. Если расстояние сократить до 50 см, вес пропадает. Сам Знайка, однако, не хотел оставаться в невесомости и для экранирования ее использовал антилунит – другой лунный камень. Он начинает экранировать невесомость, если находится на расстоянии ≤ 100 см от магнитного железняка или от лунита, и полностью возвращает вес Знайке, если расстояние до любого из камней – железняка или лунита – сократить до 50 см. Знайка немедленно соорудил прибор – регулятор невесомости, установив на деревянной прямой оси все три камня. Теперь сдвигая и раздвигая камни можно было создавать и убирать невесомость, экранировать или не экранировать ее. Какую наименьшую длину может иметь такой прибор (размерами самих камней можно пренебречь)?

Задача 5

> – Ну, надо сделать другую ракету, – сказала Селедочка.
> – Это не так просто, – ответил Знайка. – Ведь прибора невесомости у нас теперь нет. Придется строить многоступенчатую ракету, которая могла бы преодолеть силу земного притяжения.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что Знайка решил совершить полет на Луну в артиллерийском снаряде. Вычислите минимально возможную перегрузку, действующую на экипаж во время старта (выстрела), исходя из следующих предположений:

– длина орудийного ствола 50 м;
– ствол расположен вертикально, а снаряд должен набрать вторую космическую скорость 11 200 м/с;
– движение снаряда внутри ствола равноускоренное, т.е. скорость от момента запуска, до момента выхода снаряда из ствола увеличивается по закону $v = at$, где a – ускорение, а t − время.

Перегрузкой называется отношение a/g, где g = 9,8 м/с^2. Землю считайте однородным шаров, торможение снаряда в атмосфере и центробежную силу, возникающую в результате вращения Земли, не учитывайте. Ответ округлите до трех значащих цифр.

Задача 6

> – В это путешествие должны отправится лишь самые умные и самые дисциплинированные коротышки.
> Незнайка очень хорошо переносит состояние невесомости, но зато состояние его умственных способностей оставляет покуда желать много лучшего.
>
> Н.Н. Носов «Незнайка на Луне»

Незнайка решил поумнеть. Он решил научиться делить с остатком - взял некоторое число, разделил его на 2 и отбросил остаток. Результат разделил на 3 и опять отбросил остаток. Полученное число он

разделил на 4, отбросил остаток и получил число K. Какое число Незнайка мог делить изначально?
Напишите программу на вашем любимом языке программирования и приложите ее текст в качестве ответа на это задание.

Входные данные:
Вводится натуральное число K, не превосходящее 1000.

Выходные данные:
Выведите по возрастанию все возможные числа, которые Незнайка мог выбрать изначально, разделяя их пробелами.

Примеры
Входные данные
1
Выходные данные
24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47

Очный тур

Задача 1

На одной далекой планете единицы измерения длины, времени и массы называются соответственно «Пье», «Пи» и «Пуа». 1 Пье=40 сантиметров, 1 Пи=100 секунд, 1 Пуа=400 грамм. Житель планеты предлагает купить у него летающий катер, разгоняющийся до скорости 40 000 Пье/Пи, с расходом топлива 12 Пуа на 100 000 Пье пробега. Найдите скорость катера в км/час и расход топлива в кг на 100 км пробега.

Задача 2

Одна морская миля (она равна 1852 м) имеет именно такую длину потому, что перемещение по меридиану Земли на одну морскую милю в точности соответствует изменению географической широты на 1 минуту (1/60 градуса). Пользуясь только этими данными, найдите радиус Земли (точнее, то значение, которое ему приписывалось на момент определения длины морской мили). Ответ дайте в км с точностью до целых. Для удобства вычислений считайте, что число π = 3,15, а Земля – идеальный шар.

Задача 3

В школе юного исследователя космоса на занятии по математике первый вызванный к доске ученик написал на доске в строку несколько целых чисел, второй записал под каждым написанным числом квадрат этого числа, третий посчитал сумму всех чисел, написанных на доске. Будет ли полученная сумма четным числом (всегда)? Или всегда нечетным? Или может быть и четным, и нечетным? Ответ обоснуйте.

Задача 4

Жители, населяющие планету N трех цветов: синие, красные или зеленые. Синие всегда врут зеленым, красные – синим, зеленые – красным, а во всех остальных случаях жители планеты N говорят друг другу правду. Во время дождя все жители надевают серые дождевики, полностью скрывающие их цвет. Однажды, пережидая под навесом дождь, несколько жителей, не снимая дождевиков, разговаривали, стоя по кругу, и каждый сказал своему соседу справа: «Я – синий». Сколько среди них было зеленых?

Задача 5

В магазине продается набор из n палочек. Все они имеют разную длину. Длина каждой палочки – целое число от 1 до 36 см включительно. Всегда ли можно выбрать из набора три палочки, соединив концы которых, можно сложить на плоскости треугольник? Рассмотрите случаи:

а) в наборе n = 8 палочек,

б) в наборе n = 10 палочек.

Задача 6

Учащийся школы юного исследователя космоса наблюдал с помощью телескопа планету Нептун в противостоянии. В процессе наблюдения Нептун постоянно выходил из поля зрения телескопа, и наблюдатель задумался – а с какой скоростью движется Нептун относительно наблюдателя? Найдите модуль этой скорости, считая, что Нептун находится в плоскости эклиптики (то есть, вращается вокруг Солнца в одной плоскости с Землей), его орбита является круговой с радиусом 30 а.е., орбиту Земли также считайте круговой. Ответ запишите в км/с (1 а.е. считайте равной 150 000 000 км, период обращения Нептуна по своей орбите 60 190 дней).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

2017/2018 год

Разминка. Заочный тур 1: 1. в) 2. г) 3. в) 4. а) 5. а) 6. б) 7. б) 8. б) 9. а) 10. а)

Заочный тур 2: 1. б) 2. а) 3. в) 4. б) 5. в) 6. в) 7. а) 8. в) 9. а) 10. в)

10 – 11 классы

Заочный тур 1

Задача 1. Решение. Поскольку величина z мала, можем не учитывать релятивистские эффекты (в частности, не различать прошедшее для наблюдателя и собственное прошедшее время) и пользоваться плоской моделью Вселенной. Тогда, согласно определению постоянной Хаббла,

$$cz = H_0 r,$$

где $c \approx 300000$ км/с – скорость света, а r – расстояние до объекта в Мпк. Тогда

$$r = \frac{cz}{H_0} \approx 4285{,}7z\text{Мпк} = 13224\text{z} \cdot 10^{19}\text{км},$$

а значит $t = \frac{r}{c} \approx 44{,}08z \cdot 10^{16}c \approx 14000z$ млн лет.
Ответ: 14000z млн лет.

Задача 2. Решение. Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите, G – гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = G\frac{M}{r^2}$, а период обращения спутника $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем что $T = \frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{R^3}{g}}$. Переведем все расстояния в метры, получим:

$$T = \frac{6{,}28}{34 \cdot 10^5}\sqrt{\frac{(94 \cdot 10^5)^3}{3{,}86}} \approx 27{,}1 \cdot 10^3 \text{секунд} \approx 452 \text{ минуты} = 7 \text{ ч } 32 \text{ мин.}$$

Ответ: 7 ч 32 мин.

Задача 3. Пример решения на языке Pascal

```
type
tarr = array[0..1001,0..1001]of integer;

var
i, n, j, m, k: integer; a:tarr;

procedurereadarray(var a:tarr);
var
i, j: integer;
begin
fori := 1to ndo
begin
forj := 1to m doread(a[i, j]);
end;
end;

proceduretest(var a:tarr;i, j: integer);
begin
casea[i, j]of
1:ifa[i, j + 1] = 0then a[i, j] := 0;
2:ifa[i - 1, j] = 0then a[i, j] := 0;
3:ifa[i, j - 1] = 0then a[i, j] := 0;
4:ifa[i + 1, j] = 0then a[i, j] := 0;
end;
ifa[i, j]<>0thenexit;
ifa[i, j + 1] = 3then test(a,i, j + 1);
ifa[i - 1, j] = 4then test(a,i - 1, j);
ifa[i, j - 1] = 1then test(a,i, j - 1);
ifa[i + 1, j] = 2then test(a,i + 1, j);
end;

begin
readln(n, m);
fori := 0to n + 1do
```

```
begin
a[i,0] := 0; a[i, m + 1] := 0;
end;
forj := 0to m + 1do
begin
a[0, j] := 0; a[n + 1, j] := 0;
end;
readarray(a);
fori := 1to ndo
forj := 1to m do
test(a,i, j);
k := 0;
fori := 1to ndo
forj := 1to m do
ifa[i, j]<>0theninc(k);
writeln(k);
end.
```

Задача 4. Решение. Пусть m кг – масса спутника, M кг – масса планеты радиусаr, v м/с – скорость движения спутника по орбите радиуса R. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$.Обозначим $\tilde{T} = 3600\,T$ – период обращения спутника в секундах. Тогда, учитывая, что $M = \frac{4}{3}\pi r^3\rho,\ \tilde{T} = \frac{2\pi R}{v}$ и $R = nr$, получаем, что $\rho = \frac{\pi n^3}{432GT^2\cdot 10^4} \approx \frac{87{,}2}{T^2}\cdot 10^3$кг/м^3.

Ответ: $\frac{87{,}2}{T^2}\cdot 10^3$кг/м^3.

Задача 5. Решение. Назовем циклом последовательность двух действий – «вторничный» выбирает ключ в ящике и кладет его в карман. Продолжительность цикла 35 секунд. По условию, воровать ключ каждый из Ийонов может только в начале цикла. Тогда у «средового» на один ключ уходит 4 цикла или 140 секунд, а у «четвергового» – 7 циклов или 245 секунд. Воровать ключи Ийоны могут начать только со второго цикла. Тогда за оставшиеся 31 цикл «средовый» может украсть максимум 8 ключей, а «четверговый» – максимум 5 ключей, так что в кармане будут лежать минимум 19 ключей. Остается показать, что это возможно, предъявив последовательность действий.

Пусть «средовый» ворует в циклы 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, а «четверговый» – в циклы 2, 9, 16, 24, 32.

Ответ: 19.

Задача 6. Решение. Каждая из звезд движется под действием гравитационного притяжения к другой звезде. Пусть v – скорость движения звезды по орбите. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения для каждой из звезд имеем: $\frac{Mv^2}{R} = G\frac{M^2}{4R^2}$. Обозначим $\tilde{T} = 86400\,T$ – период обращения спутника в секундах. Тогда, учитывая, что $\tilde{T} = \frac{2\pi R}{v}$, получаем, что

$$M = \frac{\pi^2 R^3}{46656 \cdot 10^4 G T^2} \approx \frac{316{,}9}{T^2} 10^{30}\text{кг}.$$

Ответ: $\frac{316{,}9}{T^2} 10^{30}$кг.

Задача 7. Решение. Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Заметим, что условиям задачи удовлетворяет подпоследовательность $1-2-4-8-1$. Таким образом, если какое-либо число x является решением, то решением является и число $x+4$. Приведем примеры:

$$1-2-4-8-1;$$
$$1-2-4-8-16-9-2-4-8-1;$$
$$1-2-4-8-16-9-18-11-4-8-1;$$
$$1-2-4-8-16-9-18-11-22-15-8-1.$$

Из них следует, что решениями являются число 4 (а значит все числа вида $4+4n$); число 9 (а значит все числа $9+4n$), число 10 (а значит все числа $10+4n$) и число 11 (а значит все числа $11+4n$. Под вопросом остаются числа 1, 2, 3, 5, 6 и 7. Перебором всех вариантов

$$1-2-4-8-(1 \text{ или } 16)-(2 \text{ или } 9 \text{ или } 32)$$
$$-(4 \text{ или } 2 \text{ или } 18 \text{ или } 25 \text{ или } 64)$$
$$-(8 \text{ или } 4 \text{ или } 11 \text{ или } 36 \text{ или } 18 \text{ или } 50 \text{ или } 57 \text{ или } 128)$$

убеждаемся, что эти числа ответами не являются.

Ответ: все числа от 1 до 147, кроме 1, 2, 3, 5, 6 и 7.

Задача 8. Решение. Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли одной звездой скопления и всем скоплением соответственно. Тогда $L_2 = 1500L_1$. Пусть m_1и m_2 – соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{L_1}{L_2} \approx 7{,}94,$$

Следовательно, блеск всего скопления: $15 - 7{,}94 = 7{,}06^m$.
Ответ: $\approx 7{,}06^m$.

Задача 9. Решение. Искомый объем $V = V_1 - V_2$, где $V_1 = V_{TABCD}$, $V_2 = V_{TA'B'C'D'}$. Задача состоит в минимизации отношения μ этих объемов. Пусть $\frac{TA'}{TA} = x$, $\frac{TB'}{TB} = y$, $\frac{TC'}{TC} = z$, $\frac{TD'}{TD} = w$. Обозначим через φ угол между диагоналями AC и BD. Тогда $V_1 = 2(a+c)(b+d)\sin\varphi$, $V_{TABD} = 2a(b+d)\sin\varphi$, $V_{TBCD} = 2c(b+d)\sin\varphi$. Известно, что для треугольных пирамид с общим трехгранным ребром отношение объемов равно произведению отношений соответствующих ребер, лежащих на ребрах трехгранного угла. Тогда $V_{TA'B'D'} = 2xywa(b+d)\sin\varphi$, $V_{TC'B'D'} = 2zywc(b+d)\sin\varphi$. Отсюда $\mu = \frac{yw(cz+ax)}{a+c}$. Рассуждая аналогично, получим: $\mu = \frac{xz(by+dw)}{b+d}$. Теперь заметим, что секущая плоскость определяется однозначно выбором секущих $A'C'$и $B'D'$, т.е. можно считать, что параметры x и y выбираются независимо, $z = z(x)$, $w = w(y)$. Тогда задача минимизации величины μ равносильна независимой минимизации произведений xz и yw. Рассмотрим треугольник ATC. Пусть точка H' – середина высоты TH. Известно, что произведение $TA' \cdot TC' = xz \cdot TA \cdot TC$ принимает наименьшее значение, когда H' – середина отрезка $A'C'$. Тогда $A'TC'H$ – параллелограмм, следовательно, $A'T = HC'$, $TC' = A'H$. Далее, $\Delta ATC \sim \Delta HC'C$, $\Delta ATC \sim \Delta AA'H$, следовательно, $\frac{HC'}{AT} = \frac{c}{a+c}$, то есть $\frac{TA'}{TA} = x = \frac{c}{a+c}$. Аналогично $\frac{TC'}{TC} = z = \frac{a}{a+c}$. Проделаем то же для треугольника BTD. Окончательно получим, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{abcd}{(a+c)^2(b+d)^2}$. При этом $V_1 = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot TH = 48$.

Ответ: $48\left(1 - \frac{abcd}{(a+c)^2(b+d)^2}\right)$.

Задача 10. Идея решения. Отсортируем ячейки по возрастанию грузоподъемности, а воганов – по возрастанию массы. Начнем «сажать» воганов в ячейки, при этом если мы можем посадить вогана на место, то переходим к следующей ячейке и увеличиваем счетчик на 1. Если же мы не можем посадить вогана на место, то переходим к следующей ячейке.

Пример решения на языке Python 3:

```
N,M=map(int,input().split())
A =[]
for j inrange(N):
foriinlist(map(int,input().split())):
A.append(i)
A.sort()
K,B,C,P,M =int(input()),sorted(list(map(int,input().
split()))),0,0,0
while P <len(A)and M <len(B):
if B[M]<= A[P]:
        M +=1
        P +=1
        C +=1
else:
        P+=1
print(C)
```

Заочный тур 2

Задача 1. Решение. Диаметр туманности равен $d = r\alpha$, где $r = 2000\text{пк} = 6{,}18 \cdot 10^{16}$ км, $\alpha = 3' = \frac{\pi}{3600}$ рад. Тогда скорость равна

$$v = \frac{d}{T} = \frac{6{,}18 \cdot \pi \cdot 10^{16}}{963 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3600} \frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 1775 \text{ км/с}.$$

Ответ: около 1700 км/с.

Задача 2. Решение. Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите, G – гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = G\frac{M}{r^2}$, а период обращения спутника $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем что $T = \frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{R^3}{g}}$.

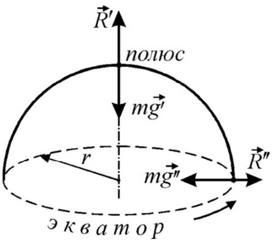
Тогда количество полных оборотов составляет целую часть дроби $\frac{N \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24}{T} \approx 11{,}57N$.

Ответ: целая часть числа $11{,}57N$.

Задача 3. Пример решения на языке Python 3

```
a, b =map(int,input().split())
amin =(a+1)//2
amax= a
bmin=(b+1)//2
bmax= b
print(max(amin,bmin),min(amax,bmax))
```

Задача 4. Решение. Силы, действующие на тело на полюсе и на экваторе, изображены на рисунке, где $\overrightarrow{g'}$ и $\overrightarrow{g''}$ – ускорения, вызываемы силой тяжести, $\overrightarrow{R'}$ и $\overrightarrow{R''}$ – силы реакции опор, на которых покоится тело. Поскольку планета представляет собой однородный шар, ускорения $\overrightarrow{g'}$ и $\overrightarrow{g''}$ различаются только направлением, а модули их совпадают: $g' = g'' = g$. Для тела, покоящегося на полюсе, сила тяжести и сила реакции опоры уравновешены и его вес по величине равен $P' = R' = mg$. Тело, находящееся на экваторе, движется по окружности, радиус которой равен радиусу планеты r. Следовательно, сила тяжести и сила реакции опоры не уравновешены и по второму закону Ньютона $m\omega^2 r = mg - R''$, где ω – угловая скорость вращения планеты. Поэтому вес тела на экваторе по величине равен $P'' = R'' = mg - m\omega^2 r$. По условию $mg - m\omega^2 r = \frac{\eta}{100\%} mg$, откуда $\omega^2 = \frac{g}{r}\left(1 - \frac{\eta}{100\%}\right)$.



С другой стороны, $g = \frac{GM}{r^2}$, где $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ – масса планеты. Отсюда следует, что $\frac{g}{r} = \frac{4}{3}\pi G\rho$. Учитывая, что период вращения планеты $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем, что $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(1-\eta/100\%)}} \approx \frac{75 \cdot 10^3}{\sqrt{100-\eta}}$ секунд.

Ответ: $\frac{75 \cdot 10^3}{\sqrt{100-\eta}}$ секунд.

Задача 5. Решение. Разделим все клетки доски на «выигрышные» и «проигрышные». Пусть король находится на некоторой клетке и ход принадлежит игроку А. Клетка называется «выигрышной», если у игрока А есть стратегия, приводящая его к выигрышу вне зависимости от действий игрока Б. В противном случае клетка называется «проигрышной». Поле h8 является по определению выигрышным.

Поля g8, g7 и h7 также являются «выигрышными», поскольку игрок А достигает победы за один ход. Тогда поле h6 является «проигрышным» – игрок А вынужден сделать ход на h7 (это единственный возможный ход), после чего игрок Б выигрывает. Аналогично, «проигрышным» является поле f8. Заметим, что далее поля можно классифицировать с учетом уже имеющейся информации: если с данного поля существует допустимый ход на «проигрышную» клетку, то поле является «выигрышным»; если же все допустимые ходы ведут на «выигрышные» клетки, то поле является «проигрышным». Результат «классификации» приведен на рисунке. Поскольку по условию «вторничный» ходит вторым, то ему надо ставить короля на «проигрышные» поля.

В	П	В	П	В	П	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В

Ответ: b2, b4, d2.

Задача 6. Решение. Оценим вначале скорость теплового движения молекул воздуха на высоте орбиты спутника. Для этого воспользуемся формулой для среднеквадратичной скорости молекул, а именно $v_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, где R = 8,3 Дж/(моль·К) − универсальная газовая постоянная, M = 0,029 кг/моль − молярная масса воздуха. Расчет для $v_{ср.кв.}$ дает значение $v_{ср.кв.} \approx 470$ м/с, что действительно пренебрежимо мало по сравнению со скоростью спутника. Поскольку молекулы воздуха можно считать практически неподвижными, за время τ спутник столкнется с молекулами, находящимися в воображаемом цилиндре сечением $S = \pi D^2/4$ и длиной $v\tau$. Число таких молекул $\bar{z} = Sv\tau n$, где $n = \frac{p}{kT}$ – их концентрация. Значит,

$$\bar{z} = \pi D^2 v \frac{p}{4kT} \approx 15 \cdot 10^{23} D^2.$$

Ответ: $15 \cdot 10^{23} D^2$.

Задача 7. Решение. Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря.Приведем примеры

$$1-2;$$
$$1-2-4;$$
$$1-2-4-8;$$
$$1-2-4-8-16-9;$$
$$1-2-4-8-16-32-64-57.$$

Теперь вычислим элементы последовательности по модулю 7 (то есть остатки от их деления на 7):

$$1-2-4-1-(2\text{ или }1)-(4\text{ или }2\text{ или }2\text{ или }1)$$
$$-(1\text{ или }4\text{ или }4\text{ или }2\text{ или }4\text{ или }2\text{ или }2\text{ или }1)-\cdots$$

Таким образом, члены последовательности по модулю 7 могут быть равны только 1, 2 и 4. Значит, числа 3,5,6,7,10, 45, 103 и 147 не подходят.
Ответ: 2, 4, 8, 9, 57.

Задача 8. Решение. Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли одной звездой созвездия и всем созвездием соответственно. Тогда $L_2 = 251L_1$. Пусть m_1и m_2 – соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{L_1}{L_2} \approx 6.$$

Значит, полный блеск всего скопления равен $16 - 6 = 10^m$.
Ответ: $\approx 10^m$.

Задача 9. Решение. Поскольку $TB\colon B'B = TD\colon D'D = x$, то $\frac{TB'}{TB} = \frac{TD'}{TD} = \frac{x-1}{x}$. Пусть TH – высота пирамиды, H' - точка пересечения TH и $B'D'$, тогда и $\frac{TH'}{TH} = \frac{x-1}{x}$. Обозначим $V_{TABCD} = V$. Поскольку $\frac{V_{TAB'D'}}{V_{TABD}} = \frac{TA\cdot TB'\cdot TD'}{TA\cdot TB\cdot TD}$, то $V_{TAB'D'} = \frac{V}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2}$(пирамида $TABCD$ – правильная, значит, объем пирамиды $TABD$ равен $\frac{V}{2}$). Найдем отношение $\frac{TC'}{TC}$. Для этого применим теорему Менелая к треугольнику HTC и секущей $H'C'$: $\frac{CC'}{TC'}\frac{TH'}{HH'}\frac{AH}{AC} = 1$. Поскольку исходная пирамида является правильной, то основание ее высоты попадает в середину диагонали основания, откуда получаем, что $\frac{CC'}{TC'} = \frac{2}{x-1}$, а значит, $\frac{TC'}{TC} = \frac{x-1}{x+1}$. Так как $\frac{V_{TCB'D'}}{V_{TCBD}} = \frac{TC \cdot TB' \cdot TD'}{TC \cdot TB \cdot TD}$, то $V_{TCB'D'} = \frac{V}{2}\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}$. Окончательно получаем:

$$V_{TAB'C'D'} = \frac{V}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2}\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}V.$$

Ответ: $\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$.

Задача 10. Решение. Для решения задачи можно применить теорему Пика: Площадь многоугольника с целочисленными вершинами равна сумме В + Г/2 − 1, где В есть количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Г количество целочисленных точек на границе многоугольника, отсюда В = площадь многоугольника − Г/2 + 1.

Пример решения на языке Python 3

```
defgcd(a,b):
whileb!=0:
a,b=b,a%b
return a
n =int(input())
p =[]
s=0; m=0
for x inrange(n):
p.append(tuple(map(int,input().split())))
foriinrange(n):
    x1 = p[i][0]
    y1 = p[i][1]
    x2 = p[(i+1)% n][0]
    y2 = p[(i+1)% n][1]
    v = x1*y2 - y1*x2
    s+=v
s=abs(s)/2
foriinrange(n):
  m+=gcd(abs(p[(i+1)%n][0]-p[i][0]),abs(p[(i+1)%n][1]-
p[i][1]))
k=s-m/2+1
print(int(k))
```

Очный тур

Задача 1. Решение. Пусть v_1 – скорость Ийона. Если $v_2 = v_1 + 20\% v_1 = 1{,}2 v_1$, то $t_2 = t_1 : 1{,}2 = \frac{5}{6} t_1$. Тогда $t_1 - t_2 = \frac{1}{6} t_1 = 4$, а значит Ийон был в пути 24 дня.
Ответ: 8 марта.

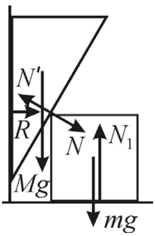
Задача 2. Решение. Падение по радиусу к Солнцу с расстояния R можно представить как движение по предельно сжатому эллипсу с большой полуосью $a = R/2$. Время падения t равно половине орбитального периода P на этой орбите. Значение P легко определяется из 3-го закона Кеплера путем сравнения с движением Земли: $(P$ / 1 год$)^2 = (a$ / 1 а. е.$)^3$. Отсюда

$$t = P/2 = 0{,}5 \text{ года } (R / 2 \text{ а. е.})^{3/2} = 0{,}177 \text{ года } (R / 1 \text{ а. е.})^{3/2} =$$
$$= 64{,}6 \text{ суток } (R / 1 \text{ а. е.})^{3/2}.$$

Ответ: $64{,}6\ R^{3/2}$.

Задача 3. Решение. Ракету нагружаем до тех пор, пока масса груза не превысит 4 т. После этого снимаем один спутник и откладываем его в сторону. За восемь стартов мы отложим в сторону не более 8 спутников, а на складе останется менее 4 т груза, который запустим на девятый старт. За десятый и одиннадцатый старт запустим оставшиеся 8 спутников.

Задача 4. Решение. Модули и направления сил, действующих на клин и кубик, изображены на рисунке, где приняты следующие обозначения: Mg и mg – модули сил тяжести, N и N' – модули сил взаимодействия клина и кубика, N_1 – модуль силы реакции стола, R – модуль силы реакции вертикальных направляющих. Силы $\vec{N}$ и $\overrightarrow{N'}$ направлены перпендикулярно поверхности клина, так как трением можно пренебречь. По третьему закону Ньютона $N' = N$. Обозначив через a и a_1 ускорения клина и кубика, запишем уравнения движения этих тел: $Ma = Mg - N\sin\alpha$, $ma_1 = N\cos\alpha$. Перемещения кубика и клина за любой промежуток времени связаны соотношением $x = y\, tg\, \alpha$. Отсюда следует, что $a_1 = a\, tg\, \alpha$. Исключая из уравнений движения N и используя соотношение между величинами ускорений клина и кубика, получаем, что $a = \frac{Mg}{M + m\, tg^2\, \alpha} \approx 7{,}7$.



Ответ: 7,7.

Задача 5. Решение. Так как $22^n = (20+2)^n = 10p + 2^n$, то последняя цифра числа 22^n равна последней цифре числа 2^n. Для $n = 1$ она равна 2, для $n = 2$ она равна 4, $n = 3$ она равна 8, $n = 4$ она равна 6, $n = 5$ она равна 2. Далее цифры повторяются по циклу, т.е. для $n = 88$ последняя цифра равна 6. Аналогично, последняя цифра числа 88^n совпадает с последней цифрой числа 8^n. Для $n = 1$ она равна 8, для $n = 2$ она равна 4, $n = 3$ она равна 2, $n = 4$ она равна 6, $n = 5$ она равна 8, далее вновь повторяется по циклу, так что последняя цифра числа 8^{22} равна 4.
Ответ: 0.

Задача 6. Оценивается творческое задание.

7 – 9 классы

Заочный тур 1

Задача 1. Решение. Вне зависимости от расстояний, данных в условии, подходит южный полюс. Движение по любому меридиану является движением на север (вначале) и на юг (в конце). Движение по параллели не меняет расстояния до полюса.
Если стартовая точка не является южным полюсом, то эта точка является ответом к задаче в том и только в том случае, если начало и конец пути по параллели совпадают. Пусть l – длина параллели. Тогда $\frac{20}{l} = n$ – натуральное число (количество оборотов). Пусть $R = 1737{,}1$ км – радиус Луны. Таким образом, длина параллели $l \leq 20$ много меньше радиуса, а значит, параллель должна находиться вблизи полюса (либо северного, либо южного). Вблизи полюсов поверхность можно считать плоской. Длина окружности радиуса 35 с центром в южном полюсе уже превосходит 20 (минимально возможную длину параллели). При смещении точки старта из южного полюса длина соответствующей окружности только возрастет. Следовательно, в окрестности южного полюса других решений нет. Пусть стартовая точка находится на расстоянии x от северного полюса. Тогда $l = 2\pi(x - 35) = \frac{20}{n}$. Отсюда $x = 35 + \frac{10}{\pi n}$.

Ответ: Из южного полюса Луны, а также из любой точки лунной поверхности, удаленной от северного полюса Луны на $\left(35 + \frac{10}{\pi n}\right)$ км, где

$n = 1, 2, 3, \dots$ [Если ученик предложит сферическое решение, то еще лучше.]

Задача 2. Пример программы на языке Pascal

```
var
k,x,y,i,j,l:longint;
        ans:int64;
                a:array[-17..17,-17..17]oflongint;

begin
        readln(k,x,y);
        ans:=0;
        if(abs(x)+abs(y))=k then
                writeln(1)
        else
        begin
        a[0,0]:=1;
        forl:=1to k do
                fori:=-16to16do
                forj:= -16to16do
                        if((abs(i)+abs(j)) mod 2) = l
mod 2then
                                a[i,j]:=a[i-
1,j]+a[i+1,j]+a[i,j-1]+a[i,j+1];
                                writeln(a[x,y]);
        end;
end.
```

Задача 3. Решение. Из условия задачи следует, что AH – высота треугольника ABC, точка M – середина AH. Пусть $CKLB$ – искомый четырехугольник, где точка K лежит на стороне AC, а точка L – на стороне AB. Тогда $M \in KL$. Известно, что площадь S_{AKL} является наименьшей ровно тогда, когда $ML = MK$. Отсюда $AK = LH$, $AL = KH$, прямые AK и LH параллельны, прямые AL и KH также параллельны. Это означает подобие треугольников ABC и LBH, откуда $\frac{LH}{AC} = \frac{y}{y+z}$, $\frac{AK}{AC} = \frac{y}{y+z}$. Аналогично получаем: $\frac{AL}{AB} = \frac{z}{y+z}$. Поскольку $\frac{S_{ALK}}{S_{ABC}} = \frac{AL \cdot AK}{AB \cdot AC}$, то $S_{ALK} = \frac{yz}{(y+z)^2} S_{ABC} = \frac{6yz}{y+z}$. Значит,

$$S_{CKLB} = S_{ABC} - S_{ALK} = 6(y+z) - \frac{6yz}{y+z} = 6\left(y + z - \frac{yz}{y+z}\right).$$

Ответ: $6\left(y + z - \frac{yz}{y+z}\right)$.

Задача 4. Решение. Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли Луной и Плутона Солнцем соответственно (согласно условию задачи фаза Луны предполагается максимальной, а поглощением света атмосферой Земли пренебрегаем). Пусть m_1 и m_2 – соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{L_1}{L_2}.$$

Пусть $M -$ абсолютная звездная величина Солнца. Тогда

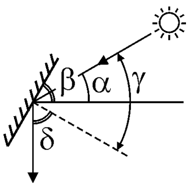
$$m = M - 5 \lg \frac{d}{d_0},$$

где d – расстояние от Солнца до наблюдателя (в парсеках), а $d_0 = 10$ пк. Подставляя сюда расстояния от Солнца до Земли и от Солнца до Плутона, получим $m_2 = -26{,}7 + 5 \lg 40$. Отсюда

$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{(-12{,}7+26{,}7-5\lg 40)/2{,}5} \approx 250.$$

Ответ: в 250 раз.

Задача 5. Решение. Ход луча, падающего на зеркало и отраженного от него, изображен на рисунке. Видно, что угол между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен $\gamma = \frac{1}{2}(90° + \alpha) = 45° + \frac{\alpha}{2}$. По закону отражения угол



между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен углу между отраженным лучом и нормалью, т.е. $\gamma = \delta$. Согласно теореме о равенстве углов с взаимно перпендикулярными сторонами, $\beta = \delta$. Таким образом, $\beta = 45° + \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\beta = 45 + {}^{\alpha}/_{2}$.

Задача 6. Решение. Для нагрева воды необходимо количество теплоты $(t_2 - t_1)cm = N\tau$, где N – количество теплоты, подводимое к воде в единицу времени. Искомое время найдём из уравнения: $N\tau_1 = 1000 \cdot rm$. Окончательно: $\tau_1 = \tau \frac{1000 \cdot r}{c(t_2 - t_1)} \approx 6{,}845\tau$.

Ответ: $6{,}845\tau$.

Задача 7. Решение. Назовем циклом последовательность двух действий – «вторничный» выбирает ключ в ящике и кладет его в карман. Продолжительность цикла 35 секунд. По условию, воровать ключ каждый из Ийонов можеттолько в начале цикла. Тогда у «средового» на один ключ уходит 4 цикла или 140 секунд, а у «четвергового» – 7 циклов или 245 секунд. Воровать ключи Ийоны могут начать только со второго цикла. Тогда за оставшиеся 31 цикл «средовый» может украсть максимум 8 ключей, а «четверговый» – максимум 5 ключей, так что в кармане будут лежать минимум 19 ключей. Остается показать, что это возможно, предъявив последовательность действий.
Пусть «средовый» ворует в циклы 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, а «четверговый» – в циклы 2, 9, 16, 24, 32.
Ответ: 19.

Задача 8. Пример реализации алгоритма на языке Python 3.

```
L, v1, v2, T =map(int,input().split())
s1=v1*-1*T%L
s2=v2*T%L
print(min(max(s1,s2)-min(s1,s2),L-(max(s1,s2)-
-min(s1,s2))))
```

Задача 9. Решение. Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Заметим, что условиям задачи удовлетворяет подпоследовательность $1-2-4-1$. Таким образом, если какое-либо число x является решением, то решением является и число $x+3$. Приведем примеры:

$$1-2-4-1;$$
$$1-2-4-8-5-2-4-1;$$
$$1-2-4-8-5-10-7-4-1.$$

Из них следует, что решениями являются число 3 (а значит все числа вида $3+3n$); число 7 (а значит все числа $7+3n$) и число 8 (а значит все числа $8+3n$). Под вопросом остаются числа 1, 2, 4 и 5. Перебором всех вариантов

$$1-2-4-(1 \text{ или } 8)-(2 \text{ или } 5 \text{ или } 16)-$$
$$-(4 \text{ или } 2 \text{ или } 10 \text{ или } 13 \text{ или } 32)$$

убеждаемся, что эти числа ответами не являются.
Ответ: все числа от 1 до 147, кроме 1, 2, 4 и 5.

Задача 10. Решение. Обозначим через V_1 и V_2 объемы золота и меди в изделии. По условию объем изделия $V = V_1 + V_2$. Масса тела, его плотность и объем связаны соотношением $m = \rho V$. Следовательно, $\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$. Так как масса изделия равна сумме масс золота и меди: $m = m_1 + m_2$, то $\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m-m_1}{\rho_2}$. Отсюда $m_1 = m\frac{\rho_1(\rho-\rho_2)}{\rho(\rho_1-\rho_2)} \approx 0{,}873m$.
Ответ: $0{,}873m$.

Заочный тур 2

Задача 1. Решение. Чтобы луноход оказался в исходной точке, необходимо и достаточно, чтобы длины параллелей, по которым он движется на восток и на запад, были равны. Значит, эти параллели должны отстоять на равное расстояние от экватора. Луноход начинает движение на север, следовательно, он должен находиться в точке, отстоящей от экватора на юг на расстояние, равное половине от длины его пути на север, то есть на 150 км.
Ответ: из любой точки поверхности, удаленной на 150 км на юг от экватора.

Задача 2.

Для решения задачи можно применить теорему Пика: Площадь многоугольника с целочисленными вершинами равна сумме В + Г/2 − 1, где В есть количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Г количество целочисленных точек на границе многоугольника.
Отсюда В = площадь многоугольника − Г/2 + 1.
Пример решения на языке Python 3

```
defgcd(a,b):
whileb!=0:
a,b=b,a%b
return a
n =int(input())
p =[]
s=0; m=0
for x inrange(n):
p.append(tuple(map(int,input().split())))
```

```
foriinrange(n):
    x1 = p[i][0]
    y1 = p[i][1]
    x2 = p[(i+1)% n][0]
    y2 = p[(i+1)% n][1]
    v = x1*y2 - y1*x2
    s+=v
s=abs(s)/2
foriinrange(n):
  m+=gcd(abs(p[(i+1)%n][0]-p[i][0]),abs(p[(i+1)%n][1]-
p[i][1]))
k=s-m/2+1
print(int(k))
```

Задача 3. Решение. Из условия задачи следует, что точка L лежит между точками K и M. Поскольку площади четырехугольников $ABCL$ и $AMCD$ равны, то $KL = MN$. Обозначим длину каждого из этих отрезков через x, тогда $LM = y - 2x$. Очевидно, что

$$S_{ABCL} = S_{\Delta AKL} + S_{KBCN} - S_{\Delta LCN} = \frac{xy}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{y(y-x)}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2}.$$

Далее, $S_{ALCM} = 2S_{\Delta LCM} = 2(S_{\Delta LCN} - S_{\Delta MCN}) = 2\left(\frac{y(y-x)}{4} - \frac{xy}{4}\right) = \frac{y^2}{2} - xy$. Приравнивая площади, получаем, что $x = \frac{y}{6}$, следовательно, $LM = y - 2x = \frac{2y}{3}$.

Ответ: $\frac{2y}{3}$.

Задача 4. Решение. Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли Луной, а m_1 и m_2 – видимые звездные величины Луны в первом и во втором случае. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{L_1}{L_2}.$$

Световой поток, падающий на Землю с Луны прямо пропорционален освещенности Луны Солнцем $L_1 = kE_1$, $L_2 = kE_2$ (коэффициент пропорциональности в первом и во втором случае одинаков). Освещенность Луны вычислим по формуле освещенности от точечного источника

$$E = \frac{I\cdot\cos\theta}{r^2},$$

где I – сила света, а θ – угол падения солнечных лучей на поверхность Луны (при вычислении видимой звездной величины он берется равным 0°, именно это значение принимает угол в полнолуние). Таким образом,

$$m_2 = m_1 + 5\lg\frac{r_2}{r_1} = -12{,}7 + 5\lg 40 \approx -4{,}69.$$

Ответ: $-4{,}7^m$(принимается и $-4{,}69^m$ как более точный ответ).

Задача 5. Решение. Согласно формулам расчета удельной теплоемкости и удельной теплоты парообразования, $c = \frac{Q}{m(t_2-t_1)}$, $1000r = \frac{Q_1}{m}$, где m – масса воды, Q и Q_1 – соответствующие количества теплоты.

Поскольку количество теплоты пропорционально времени подвода тепла, то $\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{cm(t_2-t_1)}{1000rm}$, откуда $\tau = \tau_1\frac{c(t_2-t_1)}{1000\,r} \approx 0{,}16\tau_1$ мин.

Ответ: $0{,}16\tau_1$ мин.

Задача 6. Решение. Согласно закону Гука, работа, совершаемая силой упругости, равна $A = \frac{k(l_2)^2}{2} - \frac{k(l_1)^2}{2}$, где l_1 и l_2 – соответственно начальное и конечное растяжение пружины. Отсюда

$$A_1 = \frac{kx^2}{2},\ A_2 = \frac{k(x+nx)^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{kx^2}{2}n(n+2) = n(n+2)A_1 = n(n+2)\text{ Дж.}$$

Ответ: $n(n+2)$ Дж.

Задача 7. Решение. Пусть A – исходная масса питания (в килограммах). Тогда «вторничный» Ийон съел $\frac{x}{100}A$ кг, а «средовый»: $\frac{y}{100}\left(1 - \frac{x}{100}\right)A$.

Получаем уравнение: $\frac{x}{100}A + \frac{y}{100}\left(1 - \frac{x}{100}\right)A + 2{,}5 = A$,

откуда $A = \frac{25000}{(100-x)(100-y)}$.

Ответ: $\frac{25000}{(100-x)(100-y)}$ кг.

Задача 8. Пример решения на языке C++

```
#include<stdio.h>
#include<cmath>

#define RAD(a) a * M_PI / 180.0
```

```
intmain()
{
        double r, a1, b1, a2, b2, x1, y1, z1, x2, y2,
z2;
        scanf("%lf%lf%lf%lf%lf",&r,&a1,&b1,&a2,&b2);
        a1 = RAD(a1); a2 = RAD(a2); b1 = RAD(b1); b2 =
= RAD(b2);
        x1 = r * cos(a1) * cos(b1);
        y1 = r * cos(a1) * sin(b1);
        z1 = r * sin(a1);
        x2 = r * cos(a2) * cos(b2);
        y2 = r * cos(a2) * sin(b2);
        z2 = r * sin(a2);
        double s = sqrt((x1 - x2) * (x1 - x2) + (y1 -
- y2) * (y1 - y2) + (z1 - z2) * (z1 - z2));
        double l = 2 * r * asin(s / (2 * r));
        printf("%.2lf", l);
        return0;
}
```

Задача 9. Решение. Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Приведем примеры:

$$1-2-4;$$
$$1-2-4-8-5;$$
$$1-2-4-8-5-10-7;$$
$$1-2-4-8;$$
$$1-2-4-8-5-10;$$
$$1-2-4-8-5-10-7-14-28-25.$$

Числа 6, 9, 45 и 147 не могут быть ответами, поскольку все они делятся на три, а наша последовательность таких чисел не содержит. Докажем этот факт по индукции: первый элемент последовательности не делится на три по условию; если n –й член последовательности не делится на три, то и следующий член, равный либо $2n$, либо $n-3$, на три не делится.
Ответ: 4, 5, 7, 8, 10, 25.

Задача 10. Решение. Поскольку $m = \rho V$, то $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$, $V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}$. Из условия $V = V_1 + V_2$ получаем, что $\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m-m_1}{\rho_2} = V$, откуда

$$m_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}(m - V\rho_2) \approx 1{,}86(1{,}6 - 8{,}9V).$$

Ответ: $1{,}86(1{,}6 - 8{,}9V)$.

Очный тур

Задача 1. Решение. Сложение в двоичной системе производится так же, как в десятичной с той лишь разницей, что перенос через разряд происходит тогда, когда сумма по данному разряду превышает 1.

Тогда 100110+11011=1000001. Перевод в десятичную систему:

$$1000001 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^6 = 65.$$

Ответ: 1000001 в двоичной системе и 65 в десятичной системе.

Задача 2. Решение. Очевидно, подпрыгнуть нужно со второй космической скоростью, равной $\left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2}$. Учитывая, что плотность астероида равна плотности Земли, можно использовать значение второй космической скорости для Земли, чтобы облегчить вычисления:

$$V = 11{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot (M_\text{А}/M_\text{З})^{1/2}(R_\text{З}/R_\text{А})^{1/2}.$$

Учитывая, что $M \sim R^3$, получим

$$V = 11{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot (R_\text{А}/R_\text{З})^{3/2}(R_\text{З}/R_\text{А})^{1/2} = 11{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot (R_\text{А}/R_\text{З}).$$

Радиус Земли $R_\text{З} = 6371$ км. Значит, $V = \frac{11200 \cdot 0{,}6}{6371} \approx 1{,}05$м/с.

Ответ: 1,05 м/с.

Задача 3. Решение. а) Каждый следующий член последовательности – результат прочтения слева направо цифр предыдущего члена. Например, второй член появляется в результате прочтения первой строки: «одна двойка», третий: «одна единица одна двойка» и т.д.

Ответ: 13211321322112

б) **Решение.** Вторая строка уже содержит единицу, следовательно, любая следующая строка содержит единицу.

Ответ: нет.

в) Тестируется программа или проверяется алгоритм.

Задача 4. Решение. Пусть $C_ш$ – теплоемкость шарика, а $C_в$ – теплоемкость стакана с водой. Уравнения теплового баланса имеют вид:

$C_ш(t - t_1) = C_в(t_1 - t_0)$ (когда шарик положили в первый стакан),

$C_ш(t_1 - t_2) = C_в(t_2 - t_0)$ (когда шарик переложили во второй стакан).

Из этих выражений следует равенство: $\frac{t-t_1}{t_1-t_2} = \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}$. Выражая из него t_2, находим, что

$$t_2 = \frac{t_1^2 + (t - 2t_1)t_0}{t - t_0} = \frac{900 + 200}{50} = 22℃.$$

Ответ: 22℃.

Задача 5. Решение. Так как $7x + y + 6 = (x + y) + 6(x + 1)$, то при выполнении условия в) выражение $7x + y + 6$ делится на три и больше 6, т.е. не простое число. Таким образом, возможны два случая – выполнено а), б) и в) или а), б) и г). Если выполнено б), то $x + y = 3x + 8$ – не делится на три, значит, первый случай невозможен. Во втором случае $y = k(x + 1) =$ $= 2x + 8$, где k целое. Отсюда $x = \frac{8-k}{k-2}$ – натуральное число, т.е. $3 \leq k \leq 7$. Перебирая варианты, получаем ответ.
Ответ: (1,10) и (5,18).

Задача 6. Оценивается творческое задание.

2018/2019 год

Разминка. Заочный тур 1: 1. в) 2. б) 3. в) 4. в) 5. а) 6. в) 7. б) 8. а) 9. а) 10. в)

Заочный тур 2: 1. г) 2. в) 3. а) 4. г) 5. г) 6. б) 7. г) 8. а) 9. б) и в) 10. а)

10 – 11 классы

Заочный тур 1

Задача 1. Решение. Как известно, звёздные сутки длятся приблизительно 23 часа 56 минут 04 секунды. Следовательно, в следующий раз звезда взойдёт в 23:57 того же дня (секунды не учитываем), но перед тем, как звезда взойдёт, она должна опуститься за горизонт. Следовательно, в течение суток звезда появится на горизонте ещё, как минимум, дважды. Но звезда может проходить видимую (из данного места) часть своего пути очень низко над горизонтом, и тогда она может успеть сесть за оставшиеся до окончания солнечных суток три минуты.

Ответ: звезда пересечет горизонт еще минимум 2 раза, но, возможно, и 3 раза.

Задача 2. Решение. Проведем высоту SO. Треугольники SAO, SBO, SCO, SDO имеют прямой угол O и одинаковый катет SO. По условию, равны еще и углы SAO, SBO, SCO и SDO. Тогда треугольники равны, т.е. $SA = SB = = SC = SD = SO$ (так как острый угол равен 45^0). Итак, SO равно радиусу R окружности, описанной около трапеции $ABCD$. Пусть угол A этой трапеции равен 60^0. Заметим, что окружность, описанная около трапеции, описана также около треугольника ABC. В треугольнике ABC угол B равен 120^0, $AC = x\sqrt{3}$. По теореме синусов находим: $2R = \frac{AC}{\sin 120^\circ} = 2x$.

Ответ: x.

Задача 3. Решение. Один градус широты соответствует примерно 100 км (вдалеке от полярных областей это же справедливо и для градуса долготы). Формальная точность указанных координат составляет 10^{-14} градуса. Координата, указанная с такой угловой точностью, соответствует линейной точности около 100 км × 10^{-14} = 1 мкм. Второй вопрос задачи. Пусть мы оставим n цифр после запятой. Тогда точность равна 100 км × $10^{-n} = 10^{5-n}\text{м} = 30\text{м}$. Логарифмируем и получаем $n \approx 3{,}52$. Округляем в большую сторону. Получаем, что нам нужны 4 знака после запятой. Значит, убрать надо 10 знаков.

Ответ: 1мкм и 10 знаков.

Задача 4. Решение. Заметим, что аргумент второго логарифма – полный квадрат аргумента первого. Делаем замену $t = \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right)$, получаем задачу на минимизацию значения квадратного трехчлена $g(t) = t^2 - 2pt - 3$ на множестве $t \geq 1$. Находим абсциссу вершины $t = p \geq 1$. Значит, минимальное значение равно $g(p) = -p^2 - 3$.

Ответ: $-p^2 - 3$.

Задача 5. Решение. Уравнение движения спутника по круговой орбите под действием силы притяжения Земли имеет вид: $\frac{mv_1^2}{R+h} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$, где m – масса спутника, v_1 – его скорость на первоначальной орбите, M – масса Земли, R – ее радиус, G – гравитационная постоянная. Отсюда $v_1^2 = \frac{GM}{R+h}$. Аналогично, $v_2^2 = \frac{GM}{R+h-\Delta h}$, где v_2 – скорость спутника на новой орбите. Учитывая, что искомая величина $\eta = \frac{E_2-E_1}{E_1} = \frac{v_2^2-v_1^2}{v_1^2}$, получаем, что $\eta = \frac{\Delta h}{R+h-\Delta h} = \frac{\Delta h}{6900-\Delta h}$.
Ответ: $\eta = \frac{\Delta h}{6900-\Delta h} \cdot 100\%$.

Задача 6. Решение. Период обращения звезды, движущейся со скоростью v по окружности радиуса r, равен $T = \frac{2\pi r}{v}$. Обозначив через r_1 и r_2 радиусы орбит звезд, по условию имеем $r_1 = \frac{T}{2\pi}v_1$, $r_2 = \frac{T}{2\pi}v_2$. Поскольку центр масс двух материальных точек расположен между ними на прямой, соединяющей эти точки, расстояние между звездами $R = r_1 + r_2$. Следовательно, $R = \frac{T}{2\pi}(v_1 + v_2) \approx 0{,}955T \cdot 10^5$.
Ответ: $0{,}955T \cdot 10^5$.

Задача 7. Пример решения на языке Python 3
```
n, m, k = map(int,input().split())
a = 0
if m > n and k >= n:
print('NO')
else:
if n >= m:
        a = 1
else:
        a = (m - k - 1) // (n - k) + 1
print(a)
```
Задача 8. Решение. Пусть m – масса зонда, M – масса астероида, v – скорость движения зонда по орбите, G – гравитационная постоянная. Уравнение движения зонда имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что $g = G\frac{M}{r^2}$ и $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем, что $g = \frac{4\pi^2 R^3}{r^2 T^2} \approx 1{,}58 \cdot 10^{-6} R^3$.
Ответ: $1{,}58 \cdot 10^{-6} R^3$.

Задача 9. Программа на языке С++

```
#include<iostream>
#include<vector>
using namespace std;

intmain()
{
char cmd;
int pos, N;
 vector<int> list;

cin>> N;
for(N; N >0; N--)
{
cin>>cmd;
if(cmd == '+')
{
cin>> pos;
list.push_back(pos);
}
elseif(cmd == '-')
{
cout<<list[0]<< std::endl;
list.erase(list.begin());
}
elseif(cmd == '*')
{
cin>> pos;
list.insert(list.begin()   +   (list.size()   /   2   +
(list.size() % 2)), pos);
}

}
return0;
}
```

Задача 10. Решение. Рассмотрим первый набор. Разложим каждое из чисел на простые множители.

Получим, что $240240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; $258720 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$; $280280 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$; $305760 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$; $480480 = 2^5 \cdot$ $\cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; $672672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$; $1681680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot$ $\cdot 11 \cdot 13$.

Обозначим исходные числа через $x_1, x_2, \ldots, x_8$, а недостающее восьмое произведение – через N. Перемножим все восемь произведений, получим, что $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_8)^7 = N \cdot 2^{31} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^{12} \cdot 11^6 \cdot 13^6$.

Это означает, что $N = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \cdot 7^n \cdot 11^p \cdot 13^q$, где

$k = 4 + 7k_1$, $l = 1 + 7l_1$, $m = 1 + 7m_1$, $n = 2 + 7n_1$, $p = 1 + 7p_1$, $q = 1 + 7q_1$.

Поскольку по условию N совпадает с одним из известных произведений, то оно не может содержать степени двойки выше пятой, тройки – выше первой, пятерки – выше первой, семерки – выше второй, одиннадцати – выше первой и тринадцати – выше первой. Значит, $N = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, а произведение всех восьми чисел равно $X = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ Предположим, что числа занумерованы так, что первое из произведений не содержит x_1 и т.д.

Тогда, например, $x_1 = X : 240240 = 14$. Аналогично получаем, что остальные числа равны соответственно $13, 12, 11, 7, 5, 2, 2$, а сумма всех восьми чисел равна 66.

Ответ: 66. *Во втором варианте* 58.

Заочный тур 2

Задача 1. Решение. Видимый с Деймоса угловой размер Марса примерно в 50 раз больше видимого размера Солнца. Действительно, Деймос регулярно попадает в тень Марса, так что, находясь на Деймосе, можно наблюдать полные солнечные затмения, вызываемые Марсом.

Ответ: да.

Задача 2. Решение. Проведем высоту SO. Поскольку угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и ее проекцией на эту плоскость, то угол $\angle BSO = 30^\circ$. Тогда $BS = 2BO, SO = \sqrt{3}BO$.

Далее, поскольку диагонали ромба перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей. Значит, $AC \cdot BD = 2\sqrt{3}x$, откуда $AC = \frac{\sqrt{3}x}{BO}$. Следовательно, площадь треугольника ASC равна $\frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{3x}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}x$.

Задача 3. Решение. Примем Землю за шар радиуса R км. Пусть высота орбиты равна h км. Расстояние между точками на Земле – это длина дуги большого круга. Тогда центральный угол дуги равен $\alpha = \frac{4957}{R}$ рад. Составим прямоугольный треугольник, вершинами которого являются центр Земли, МКС и точка касания с Землей прямой, проходящей через МКС. Получим $R = (R+h)\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда $h = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}} - R$. Радиус Земли примем равным 6400 км. Получим h =511 км. Если учесть влияние атмосферы и то, что радиус Земли меньше 6400 км, высоту орбиты придется еще увеличить.
Ответ: нет.

Задача 4. Решение. Делаем замену $t = 3^{\sqrt[3]{x-1}} > 0$, тогда $3^{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{t}$. Домножим обе части уравнения на t, получим задачу на максимизацию значения квадратного трехчлена $f(t) = -t^2 + (q+4)t$ на множестве $t > 0$. Находим абсциссу вершины $t_B = \frac{q+4}{2} > 0$. Значит, максимальное значение равно ординате вершины, то есть $f(t_B) = \frac{(q+4)^2}{4}$.
Ответ: $\frac{(q+4)^2}{4}$.

Задача 5. Решение. Уравнение движения спутника по круговой орбите под действием силы притяжения Земли имеет вид: $\frac{mv_1^2}{R+h} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$, где m – масса спутника, v_1 – его скорость на первоначальной орбите, M – масса Земли, R – ее радиус, G – гравитационная постоянная. Отсюда $v_1^2 = \frac{GM}{R+h}$. Аналогично, $v_2^2 = \frac{GM}{R+h-\Delta h}$, где v_2 – скорость спутника на новой орбите. Тогда

$$V_1/V_2 = \sqrt{\frac{R+h-\Delta h}{R+h}} = \sqrt{1 - \frac{\Delta h}{6900}}.$$

Ответ: $\sqrt{1 - \frac{\Delta h}{6900}} \cdot 100\%$.

Задача 6. Решение. Период обращения звезды, движущейся со скоростью v по окружности радиуса r равен $T = \frac{2\pi r}{v}$. Обозначив через r_1 и r_2 радиусы орбит звезд, по условию имеем $r_1 = \frac{T}{2\pi}v_1$, $r_2 = \frac{T}{2\pi}v_2$. Тогда $r_1/r_2 = v_1/v_2$. Уравнение движение первой звезды имеет вид $\frac{M_1v_1^2}{r_1} = G\frac{M_1M_2}{R^2}$, где R – расстояние между звездами. Аналогично для второй звезды. Тогда $\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1v_2^2}{r_2v_1^2}$, откуда $\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = 5$. Тогда $M_1 = \frac{5x}{6} \cdot 10^{30}$, $M_2 = \frac{x}{6} \cdot 10^{30}$.

Ответ: $M_1 = \frac{5x}{6} \cdot 10^{30}$, $M_2 = \frac{x}{6} \cdot 10^{30}$ кг.

Задача 7. Пример решения на C++

```
#include<iostream>
#include<vector>
using namespace std;
int main() {
int T, N, M;
cin>> T >> N >> M;
vector<int> C(T);
      for (int i = 0; i< N; ++i) {
      int l, r;
      cin>> l >> r;
      for (int j  =l; j < r; ++j) {
            C[j]++;
}
}
      for (int i = 0; i<M; ++i) {
            int t;
cin>> t;
cout<< C[t];
}
return 0;
}
```

Задача 8. Решение. Пусть m – масса зонда, M – масса астероида, ρ – плотность, v – скорость движения зонда по орбите, G – гравитационная постоянная. Уравнение движения зонда имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, находим плотность $\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$. Период обращения $T = \frac{2\pi R}{v}$. Выражаем M через v, получаем

$$\rho = \frac{3\pi R^3}{r^3 T^2 G} \approx 0{,}0306 \cdot R^3 \text{кг/м}^3.$$

Ответ: $0{,}0306 \cdot R^3 \text{кг/м}^3$.

Задача 9. Пример решения на языке Python 3

```
n = int(input())
gold = list(map(int,input().split()))
if sum(gold) % 2 == 0:
    one = sum(gold) // 2
    a = 0
i = 0
    gold = sorted(gold)
while a < one:
if a + gold[i]<= one:
            a += gold[i]
print(gold[i], end=' ')
else:
break
i += 1
if a < one:
print(one - a)
else:
print("NO SOLUTION")
```

Задача 10. Решение. Пусть в первой группе k учеников, во второй l, в третьей m, в четвертой n. Увеличить число на 35% означает умножить его на $\frac{27}{20}$. Увеличить число на 25% означает умножить его на $\frac{5}{4}$. И так далее. Тогда $\left(\frac{27}{20}\right)^k \left(\frac{5}{4}\right)^l \left(\frac{4}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1{,}08 = \frac{27}{25}$. Приравниваем степени у чисел 2, 3 и 5, получаем систему

$$\begin{cases} -2k - 2l + 2m + n = 0, \\ 3k - m - n = 2, \\ -k + l = -2. \end{cases}$$

Добавляем уравнение $k + l + m + n = 20$ и решаем систему.

Ответ: $k = 5, l = 3, m = 4, n = 8$.

Очный тур

Задача 1. Решение. Газ получает теплоту от нагревателя на участке 1 – 2 и отдает теплоту холодильнику на участке 3 – 4. КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$, где A – работа, совершаемая газом за цикл. По условию $A = \alpha|Q_{34}|$. Кроме того, $Q_{12} = A + |Q_{34}| \ = (\alpha + 1)|Q_{34}|$. Значит, $\eta = \frac{\alpha}{\alpha+1} = 0{,}6$.
Ответ: 60%.

Задача 2. Решение. Вдоль поверхности наклонной плоскости на доску действуют сила трения F, направленная вверх, и составляющая веса доски $Mg\sin\alpha$, направленная вниз. По условию, эти две силы равны по величине, т.е. $F = Mg\sin\alpha$. Отсюда получим $F = 25$Н. По третьему закону Ньютона, сила F создает такую же по величине силу P, действующую на тележку. Эта сила P есть часть той силы тяги, о которой идет речь в задаче. Остальная часть силы тяги, связанная с реактивным движением, не влияет на положение доски на наклонной плоскости. Таким образом, полная сила тяги будет больше или равна 25 Н.
Ответ: $F_{\text{тяги}} \geq 25$ Н.

Задача 3. Решение. Необходимо решить уравнение:

$$\frac{10}{(x+10)} + \frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \cdots + + \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 1}{(x+10)(x+9)\ldots(x+1)} = 11.$$

Сложим две последние дроби

$$\frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)} + \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)(x+1)} =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2(x+1+1)}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)(x+1)} = \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)(x+1)}.$$

Теперь к этой дроби добавим третье (с конца) слагаемое

$$\frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)(x+1)} + \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)} =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3(2+x+1)}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)(x+1)} = \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3}{(x+10)(x+9)\ldots(x+4)(x+1)}.$$

Проделав эту операцию еще семь раз, получим уравнение $\frac{10}{x+1} = 11$, откуда $x = -\frac{1}{11}$.
Ответ: $-\frac{1}{11}$.

Задача 4. Решение. Обозначим $\angle DAB = \alpha$. Тогда $\angle MAB = \angle BCK = 180 - \alpha$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$). Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle ABC = 180 - \beta$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$),

$\angle MBK = \beta$ (свойство вписанного четырехугольника $MBKD$). Итак, $\angle MBA + \angle ABK = \beta = \angle ABK + \angle KBC$, то есть $\angle MBA = \angle KBC$. Тогда треугольники ABM и CBK подобны, откуда $\frac{AB}{CB} = \frac{6}{7} = \frac{AM}{CK} = \frac{AM}{2}$.

Ответ: $AM = \frac{12}{7}$.

Задача 5. Решение (пример программы):

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
	int fX, fY, k;
	int x_min, y_min, x_max, y_max;
	cin>>fX>>fY>> k;
	vector< vector<bool>>Field( fX);
	// Переменная Field это двумерный массив с элементами типа bool
	for (int i = 0; i<fX; i++) {
		Field[i].resize(fY);
	}

	for (int i = 0; i< k; i++) {
		cin>>x_min>>y_min>>x_max>>y_max;
		x_min = max (x_min, 0); // вырубка может выйти за грани-
цы леса
		y_min = max (y_min, 0);
		x_max = min (x_max, fX);
		y_max = min (y_max, fY);

		for (int x= x_min; x <x_max; x++)
// присваиваем значение “true”, если ячейка попала хотя в одну вырубку
			for (int  y = y_min; y <y_max; y++) {
				Field[x][y] = true;
			}

	}

	int Area = 0;
	for (intx= x_min; x<x_max; x++) // считаем число нетронутых ячеек
		for (int  y = y_min; y <y_max; y++) {
```

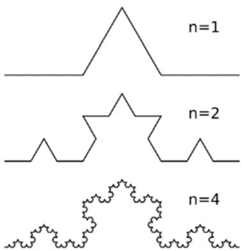
```
                    if (Field[x][y] != true) {
                            Area++;
                    }
            }
        cout<< Area <<endl;

        return 0;
}
```

Задача 6. Решение.

А) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N-N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S, получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S_1, S_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε, процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1+S_2}{2}$.

Б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого



вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубки нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0. Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \to 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D. Для эмпирического определения величины D найдем натуральный логарифм функции $l(h)$ и заметим, что он должен вести себя как $\ln C - D \cdot \ln h$. Тогда дробь $\frac{\ln l(h)}{\ln h}$ стремится при $h \to 0$ к $(-D)$. Найдя величину D, можно определить и число C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.

В) Заметим, что кривая обладает свойством самоподобия. А именно, та ее часть, которая заключена между точками (0,0) и (1/3,0) есть уменьшенная в три раза копия всей кривой. Часть кривой между точками (1/3,0) и $\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ также есть копия всей кривой, уменьшенной в три раза и повернутой на 60 градусов. И так далее. Воспользуемся условием пункта Б): при гомотетии с коэффициентом k «длина кривой» должна измениться в k^D раз. В нашем случае кривая есть объединение четырех своих копий, каждая из которых получена уменьшением в три раза. Пусть $l(h)$ – функция, определенная в пункте Б). Получаем

$$l\left(\frac{h}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^D l(h) = \left(\frac{1}{3}\right)^D \cdot 4l\left(\frac{h}{3}\right) \Rightarrow \frac{4}{3^D} = 1, \text{ то есть } D = \log_3 4.$$

Ответ: $\log_3 4$.

7 – 9 классы

Заочный тур 1

Задача 1. Решение. Вариант $n = 2187$. Раскладываем 2187 в произведение 27^2 и 3. Тогда $x = a^2 \cdot 3,\ y = b^2 \cdot 3$. Получаем $a + b = 27$. Перебираем варианты $a = 27,\ b = 0$; $a = 26,\ b = 1$.
Тогда $x = 2187, y = 0$ или $x = 2028,\ y = 3$. При $a \leq 25$ получаем $x \leq 1984$, что не подходит по условию.
Ответ: $n = 2187$: $x = 2028, x = 2187$.
$n = 2268$: $x = 2023, x = 2268$.
$n = 2312$: $x = 2048, x = 2178, x = 2312$.
$n = 2205$: $x = 2000, x = 2205$

Задача 2. Решение. Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, напряжения на резисторах R_2 и R_3 совпадают друг с другом и равны произведению общего тока I_0, текущего в цепи источника, на сопротивление данного участка, т.е. $I_0 \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$. Ток I_0 найдем, используя закон Ома для замкнутой цепи, а именно $I_0 = \frac{U}{R_1+R_2R_3/(R_2+R_3)} = \frac{U(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$. Через амперметр и через резистор R_3 течет один и тот же ток $I = \frac{R_2}{R_2+R_3} I_0$. Объединяя записанные выражения, находим, что ток, проходящий через амперметр, $I = \frac{UR_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} = \frac{2U}{11}$ ампер.
Ответ: $\frac{2U}{11}$ ампер.

Задача 3. Решение. В наших северных широтах летом поздно темнеет, и даже в середине ночи северный сегмент неба, где располагается Ковш Большой Медведицы не темнеет окончательно, поскольку Солнце опускается неглубоко под горизонт. Это делает Ковш малозаметным.

Задача 4. Пример решения на языке Python 3

```
defvis(x):
a = (x % 4 == 0 and x % 100 != 0) or x % 400 == 0
```

```
    return a

N = int(input())
vount = 0
for i in range(N,2084):
      if (vis(i) or (i-N)%3 == 0 ):
            count +=1
print(count)
```

Задача 5. Решение. Пусть h_0 – высота начального уровня ртути в сосудах. После того, как нальют воду, уровень ртути в левом сосуде опустится на Δh_1, в правом – опустится на Δh_3, а в среднем – повысится на $\Delta h_1 + \Delta h_3$. Жидкости будут находиться в равновесии при равенстве давлений ртути на уровне трубки, соединяющей сосуды:

$$\rho_{\text{в}} h_1 g + \rho(h_0 - \Delta h_1)g = \rho(h_0 + \Delta h_1 + \Delta h_3)g,$$
$$\rho(h_0 + \Delta h_1 + \Delta h_3)g = \rho_{\text{в}} h_3 g + \rho(h_0 - \Delta h_3)g.$$

Из этих равенств, следует, что

$$\rho_{\text{в}} h_1 = \rho(2\Delta h_1 + \Delta h_3), \rho_{\text{в}} h_3 = \rho(\Delta h_1 + 2\Delta h_3),$$
$$\text{или } \rho_{\text{в}}(h_1 + h_3) = 3\rho(\Delta h_1 + \Delta h_3).$$

Учитывая, что $\Delta h_1 + \Delta h_3 = h_2$, получаем, что

$$h_2 = \frac{\rho_в}{3\rho}(h_1 + h_3) \approx 0{,}221(180 + h_3).$$

Ответ: $0{,}221(180 + h_3)$.

Задача 6. Идея решения.

Подняться на 100 км спутник может 1 способом. Подняться на 200 км – либо одной командой на 200 км, либо двумя по 100 км. Чтобы подняться на 300 км, можно потратить подъем на 200 км, а затем на 100 или же подъем на 100 км, а потом на 200.

Обобщим это наблюдение: чтобы подняться на N километров, нужно выполнить подъем на $(N - 200) + 200$ или на $(N - 100) + 100$ км. Число способов есть $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} - n + 1$ число Фибоначчи.

Тогда решение может быть записано на языке Python 3 следующим образом:

```
n=int(input())
defphib(n):
if n==1or n==2:
return1
else:
```

```
        y=phib(n-1)+phib(n-2)
return y
print(phib( (n-400) // 100 +1 ))
```

Задача 7. Решение. Пусть K – точка касания вписанной окружности со стороной AB. Требуется найти OK. Заметим, что угол COD прямой, поскольку CO и DO – биссектрисы соответствующих углов. Значит $CD = 10$. Обозначим через R радиус вписанной окружности. Тогда $OK = R, AB = 2R$. Проведем перпендикуляры OM и ON к сторонам BC и AD соответственно. Из теоремы Пифагора: $MC = \sqrt{36 - R^2}, ND = \sqrt{64 - R^2}$. Воспользуемся свойством описанного четырехугольника: $BC + AD = AB + CD$. Получаем уравнение $2R + \sqrt{36 - R^2} + \sqrt{64 - R^2} = 2R + 10$. Отсюда $R = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

Задача 8. Решение. Обозначим через M массу плота, через m – массу Крыса, а через S – площадь плота. Условия плавания плота с одним Крысом и Крысом и Весельчаком У (при условии, что их массы равны) имеют вид соответственно $(M + m)g = \rho_0 S(h - h_1)g$ и $(M + 2m)g = \rho_0 S(h - h_2)g$. Здесь ρ_0 – плотность воды. Отсюда находим, что $m = \rho_0 S(h_1 - h_2)$, $M = \rho_0 S(h - 2h_1 + h_2)$. Следовательно, $n = \frac{M}{m} = \frac{h - 2h_1 + h_2}{h_1 - h_2} = h - 9$.

Ответ: $h - 9$.

Задача 9. Решение. Нижнюю кульминацию Солнца можно наблюдать за полярным кругом летом, когда Солнце в течение нескольких суток не опускается под горизонт.

Задача 10. Решение. Переводим написанное число из двоичной системы в десятичную – получаем 614. Нам неизвестно, сколько цифр двоичного разложения потеряно, но в любом случае, неизвестное число равно $1024k + 614$. Получить мы должны четырехзначное или пятизначное число с 62 на конце. Тогда $1024k + 552$ делится на 100. Тогда и $24k + 52$ делится на 100. Запишем уравнение $24k + 52 = 100n$, сократим на 4 и подберем решение $k = 2, n = 1$. Положим $p = k - 2, q = n - 1$. Уравнение примет вид $6p = 25q$. Тогда p делится на 25, т.е. $k = 2 + 25l$. Перебираем варианты. При $k = 2$ получаем школу номер 26. При $k = 27$ получаем школу номер 282, при $k = 52$ получаем школу номер 538, при $k = 77$ получаем школу номер 794, а при $k = 102$ номер получаем 1050, а он четырехзначен.

Ответ: 26 282 538 794.

Заочный тур 2

Задача 1. Решение. Вариант $n = 4625$. Раскладываем 4625 в произведение 5^3 и 37. Тогда $x = a^3 \cdot 37,\ y = b^3 \cdot 37$. Получаем $a^2 + b^2 = 25$. Перебираем варианты: $a = 5,\ b = 0$; $a = 4,\ \ b = 3$. Тогда $x = 2368,\ y = 999$. При $a \leq 4$ получаем $x \leq 1984$, что не подходит по условию.

Ответ: $n = 4394$: $\ x = 3456, x = 4394$.

$n = 4625$: $\ x = 2368, x = 4625$.

$n = 9826$: $\ x = 9826, x = 6750$.

$n = 7000$: $\ x = 7000, x = 3584$.

Задача 2. Решение. Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, напряжения на резисторах R_2 и R_3 совпадают друг с другом и равны произведению общего тока I_0, текущего в цепи источника, на сопротивление данного участка, т.е. $I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}$. Ток I_0 найдем, используя закон Ома для замкнутой цепи, а именно $I_0 = \frac{U}{R_1+R_2R_3/(R_2+R_3)} = \frac{U(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$. Через амперметр и через резистор R_3 течет один и тот же ток $I = \frac{R_2}{R_2+R_3} I_0$. Объединяя записанные выражения, находим, что $R_3 = \frac{UR_2 - IR_1R_2}{IR_1+IR_2} = \frac{U-10}{15}$ Ом.

Ответ: $\frac{U-10}{15}$ Ом.

Задача 3. Решение. За три тысячи лет, прошедшие со времен Гомера, северный полюс мира (с точки зрения земного наблюдателя) сместился из-за прецессии земной оси. Сейчас земная ось направлена на Полярную звезду, а пять тысяч лет назад, например, была направлена на альфу Дракона. Соответственно, во времена Гомера созвездие Большой Медведицы находилось ближе к северному полюсу мира и действительно никогда не погружалось в море (для наблюдателя, находящегося в Греции).

Задача 4. Пример решения на языке Python 3

```
defvis(x):
a = (x % 4 == 0 and x % 100 != 0) or x % 400 == 0
     return a

def number_of_day(d,m,y):
    for i in range(1, y):
           if vis(i):
```

```
                d += 366
            else:
                 d += 365
    if vis(y):
            months    =    [31,    29,31,30,31,30,31,31,
30,31,30,31]
    else:
            months    =    [31,    28,31,30,31,30,31,31,
30,31,30,31]
    for i in range(m - 1):
       d += months[i]
    return d


d = int(input())
m = int(input())
y = int(input())
colors                      =                      [
'red','orange','yellow','green','cyan','blue','violet'
]
day1 = number_of_day(d,m,y)
day2 = number_of_day(12,4,2083)
day_passed = abs(day1-day2)

# индексыцветовв массиве начинаютсяс 0, поэтому не за-
будем прибавить 1!
print ((colors.index('orange') + day_passed )%7 ) +1
```

Задача 5. Решение. Из подобия треугольников имеем $x: 0{,}5 = h: 0{,}1$. Отсюда $h = \frac{x}{5}$.

Ответ: $\frac{x}{5}$.

Задача 6. Пример решения на языке Python 3

```
n = int(input())
gold = list(map(int,input().split()))
ifsum(gold) % 2 == 0:
    one = sum(gold) // 2
    a = 0
i = 0
```

```
    gold = sorted(gold)
while a < one:
if a + gold[i]<= one:
            a += gold[i]
print(gold[i], end=' ')
else:
break
i += 1
if a < one:
print(one - a)
else:
print("NO SOLUTION")
```

Задача 7. Решение. Поскольку четырехугольник $ABCD$ является описанным, то у него равны суммы противоположных сторон. Значит, $AD = DC$. Следовательно, треугольники ABD и CBD равны, и точка O лежит на отрезке BD (поскольку центр вписанной окружности должен принадлежать биссектрисам углов B и D). Получаем, что $\angle ADB = 30^\circ$, а $\angle ABD = 60^\circ$. Проведем высоты OH и OK в треугольниках AOB и AOD соответственно. $OH = OK$ (как радиусы вписанной окружности), значит, $AHOK$ – квадрат с диагональю $AO = OC = a\sqrt{6}$, откуда $OH = a\sqrt{3}$. В треугольнике BOH угол H прямой, угол $\angle BOH = 30^\circ$, значит, $BO = 2BH$. Из теоремы Пифагора получаем, что $BO = 2a$.

Ответ: $2a$.

Задача 8. Решение. Обозначим через M массу плота, через m массу Крыса, а через S – площадь плота. Условие плавания плота с одним Крысом имеет вид $(M + m)g = \rho_0 S(h - h_1)g$. Условие плавания плота с одним Весельчаком У: $(M + 3m)g = \rho_0 S(h - h_2)g$. Здесь ρ_0 – плотность воды. Отсюда находим, что $2m = \rho_0 S(h_1 - h_2)$, $M = \rho_0 S(h - 1{,}5h_1 + 0{,}5h_2)$. Следовательно,

$n = \frac{M}{m} = \frac{2h - 3h_1 + h_2}{h_1 - h_2} = \frac{h-7}{2}$.

Ответ: $n = \frac{h-7}{2}$.

Задача 9. Решение. Можно в любой точке с северной широтой, большей $\approx 55{,}5^\circ$, или с южной широтой, большей $\approx 55{,}5^\circ$.

Задача 10. Решение. Поскольку в записи числа используются цифры 1 и 2, то это должна быть система по основанию $n \geq 3$. Заметим, что если основание системы $n \geq 9$, то число 221212 в системе по этому основанию в десятичной системе будет больше или равно 132122, то есть получаем уже четырехзначный номер школы. Значит, основание системы счисления может меняться от 3 до 8 включительно. Переведем число 221212 из каждой из этих систем в десятичную. Получим:
$221212_3 = 698_{10}$, то есть 6 школа, 9 «И» класс;
$221212_4 = 2662_{10}$, то есть 26 школа, 6 «Б» класс;
$221212_5 = 7682_{10}$, то есть 16 школа, 8 «Б» класс;
$221212_6 = 18440_{10}$, что невозможно;
$221212_7 = 38866_{10}$, то есть 388 школа, 6 «Е» класс;
$221212_8 = 74378_{10}$, то есть 743 школа, 7 «И» класс. Поскольку пиратам подходят только шестые или седьмые классы, то они должны посетить школы с номерами 26, 388, 743.
Ответ: 26 388 743

Очный тур

Задача 1. Решение. Чтобы увеличить температуру воздуха на Δt, ему нужно передать количество теплоты, равное: $Q = cm\Delta t$, где $m = \rho V$– масса воздуха в цилиндре. По определению КПД горелки $Q = \eta qM$. Следовательно,

$$M = \frac{c\rho V\Delta t}{\mu q} = \frac{1{,}01 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 1500 \cdot 10^{-6} \cdot 20}{0{,}08 \cdot 27 \cdot 10^6} \approx 16833 \cdot 10^{-9}\text{кг} = 0{,}17\text{ г}$$

Ответ: 0,17 г.

Задача 2. Решение. Пусть начальный объем спирта равен V. Тогда его итоговый объем вычисляется по формуле $0{,}84 \cdot 0{,}85 \cdot V = 0{,}714V$. Итоговый объем смеси равен $1{,}05V$, так что концентрация спирта равна $\frac{0{,}714V}{1{,}05V} = 0{,}68$.
Ответ: 68%.

Задача 3. Решение. Введем систему координат, направив ось вертикально вверх и выбрав в качестве точки отсчета место старта ракеты. По условию, двигатель работает $t_0 = 4$ секунды и обеспечивает ускорение $a = 1{,}3g$. Во время работы двигателя ракета движется с ускорением $a - g = 0{,}3g$ при нулевой начальной скорости, то есть в момент остановки двигателя она имеет скорость $v_0 = 0{,}3gt_0$ и координату $s_0 = \frac{0{,}3g(t_0)^2}{2} = 23{,}52$.

Затем ракета начинает двигаться с ускорением $(-g)$ и достигает наивысшей точки в тот момент, когда ее скорость становится нулевой: $v_0 - t_1 g = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} = 0{,}3t_0$. За это время ракета пройдет расстояние

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{g(t_1)^2}{2} = (0{,}3t_0)^2 g - \frac{(0{,}3t_0)^2 g}{2} = \frac{(0{,}3t_0)^2 g}{2} = 7{,}056.$$

Итого, $s_0 + s_1 = 30{,}576 \approx 31$ м.

Ответ: 31 м.

Задача 4.# Ниже приведена программа на языке Python

```
N=int(input())
M=1
# НаходимN!
foriinrange(1,N+1):
M*=i
# Ищем номер цифры, которая не равна 0 и делится на 3. Начинаем с край-
ней правой
# цифры – ее номер 1
res=1
flag=0
while M>=1:
	a=M%10
# Теперь a равно последней цифре. Если эта цифра не ноль и делится на 3,
выходим
# из цикла
	if (a==3) or (a==6) or (a==9):
		flag=1
break
# В противном случае отбрасываем последнюю цифру и повторяем цикл
M=M//10
res+=1
# Теперь res хранит либо номер искомой цифры (если цикл был прерван),
# либо число цифр числа N!, увеличенное на 1.
# В этом случае надо поменять его значение на 0
if (flag==0):
  res=0
print(res)
```

Задача 5. Решение. Первый снимок – квадрат со стороной x. Тогда $\rho_1 = \frac{4x}{\sqrt{x^2}} = 4$. Второй снимок – прямоугольник со сторонами x и y. Тогда $\rho_2 = \frac{2(x+y)}{\sqrt{xy}} = 4{,}45$. Третий снимок – прямоугольник со сторонами x и z. Тогда $\rho_3 = \frac{2(x+z)}{\sqrt{xz}} = 5$. Аналогично, для четвертого снимка получаем $\rho_4 = \frac{2(y+z)}{\sqrt{yz}}$. Остается решить систему уравнений. Для первого уравнения имеем $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2{,}225$. Обозначим дробь $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ и получим квадратное уравнение $t^2 - 2{,}225t + 1 = 0$, откуда $t = 1{,}6$ или $t = 0{,}625$.
По условию, $y > x$, так что выбираем второй корень. Аналогично, из второго уравнения получаем $t^2 - 2{,}5t + 1 = 0$, откуда $t = 0{,}5$. Итак, $y = 2{,}56x$, $z = 4x$. Подставляем эти равенства и получаем, что $\rho_4 = \frac{2(2{,}56x+4x)}{\sqrt{2{,}56x \cdot 4x}} = 4{,}1$.
Ответ: 4 и 4,1.

Задача 6. Решение. а) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N-N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S, получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S_1, S_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε, процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1+S_2}{2}$.
б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объек-

та, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубки нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0. Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \to 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D, а затем и величину C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.

2019/2020 год

Разминка. 7 – 9 классы: 1. в) 2. а) 3. в) 4. д) 5. г) 6. а) 7. в) 8. в) 9. в) 10. б)
Разминка. 10 – 11 классы: 1. д) 2. в) 3. а) 4. в) 5. в) 6. г) 7. в) 8. д) 9. а) 10. а)

10 – 11 классы

Заочный тур

Задача 1. Решение. Несложно понять, что единиц не меньше 5, но не больше 6. Действительно, если единиц 7 или 8, то уравнение, очевидно, не имеет решений. Если единиц 4 или меньше, то $x_7 \geq x_6 \geq x_5 \geq 2$, а тогда

$x_8 \cdot x_7 \cdot \dots \cdot x_1 \geq x_8 \cdot x_7 \cdot x_6 \cdot x_5 \geq 8x_8 > x_1 + x_2 + \dots + x_8$.
Если единиц ровно 6, то $x_8 \cdot x_7 = 6 + x_7 + x_8$, откуда $(x_8 - 1)(x_7 - 1) = 7$. Все числа целые и отсюда легко получаем первый ответ 11111128.
Если единиц ровно 5, то $x_6 \cdot x_7 \cdot x_8 = 5 + x_6 + x_7 + x_8$. Разделим это уравнение на левую часть и получим

$$1 = \frac{5}{x_6 \cdot x_7 \cdot x_8} + \frac{1}{x_7 \cdot x_8} + \frac{1}{x_6 \cdot x_8} + \frac{1}{x_6 \cdot x_7}$$

Если все три числа x_6, x_7 и x_8 больше или равны 3, то правая часть меньше или равна $\frac{5}{27} + \frac{3}{9} = \frac{14}{27} < 1$ – противоречие. Значит $x_6 = 2$. Если оба числа x_7 и x_8 больше или равны 3, то правая часть меньше или равна $\frac{5}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18} < 1$ – снова противоречие. Значит, $x_7 = 2$ и легко находим $x_8 = 3$.
Ответ: 11111223 11111128.

Задача 2. Решение: $\angle ABC = 120^\circ, \angle CBE = 60^\circ$. На отрезке BC отметим точку O так, что $BO = AB$. Тогда треугольник AOB равнобедренный, $\angle BAO = \angle BOA = 30^\circ$. Тогда $\angle OAC = 15^\circ$, т.е. треугольник AOC тоже равнобедренный, т.е. $AO = OC$. Отметим точку D на середине отрезка BE. Тогда треугольник OBD равнобедренный с углом 60° при вершине, т.е. равносторонний, т.е. $OD = BD = DE$. Тогда треугольники ODE и OBA равны, т.е. $\angle DEO = 30^\circ$, а $OE = OA$. Тогда треугольник AOE равнобедренный, $\angle AOE = 120^\circ$. $\angle AOC = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ$. Тогда $\angle EOC = 90^\circ$. Кроме того, $OE = OC$, т.е. треугольник EOC равнобедренный, а значит, $\angle OEC = 45^\circ$. Искомый угол

$$\angle AEC = \angle AEO + \angle OEC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

Ответ: 75°.

Задача 3. Решение. По второму закону Ньютона уравнение движения спутника орбите радиусом R имеет вид $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Отсюда скорость движения спутника по орбите $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, а модуль его импульса $p_0 = m\sqrt{\frac{GM}{R}}$. По теореме косинусов $\Delta p = 2p_0 \sin\frac{\alpha}{2} \approx 5298{,}5532767 \cdot m$.
Ответ: $5298{,}5532767 \cdot m$.

Задача 4. Решение. По закону Архимеда зонд будет плавать при выполнении условия $mg = \rho gV$, где g – ускорение свободного падения у поверхности планеты, $\rho = \frac{p_0 M}{RT}$ – плотность атмосферы планеты, $T = t + 273$ К – абсолютная температура атмосферы, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ – объем зонда. Отсюда

$$m_{max} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0 M}{RT} \quad \approx 249{,}76656 \cdot r^3 \text{кг.}$$

Ответ: $249{,}76656 \cdot r^3$ кг.

Задача 5. Решение. Ток максимален тогда, когда максимален угол между вектором $\vec{s}$ и плоскостью батарей, т.е. когда минимален угол между вектором $\vec{s}$ и вектором $\vec{n}$ нормали к плоскости батарей. Пусть φ – угол между векторами $(1{,}0{,}0)$ и $\overrightarrow{OA}$, измеряемый от первого вектора ко второму против часовой стрелки (полярный угол). Тогда $\overrightarrow{OA} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, а $\vec{n} = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$. Угол между вектором $\vec{s}$ и вектором $\vec{n}$ минимален тогда, когда максимально их скалярное произведение

$$(\vec{s}, \vec{n}) = \sin\varphi - y\cos\varphi \to \max \;\Leftrightarrow \cos\varphi + y\sin\varphi = 0 \;\Leftrightarrow\; tg\,\varphi = -\frac{1}{y}.$$

Ответ: $-\frac{1}{y}$.

Задача 6. Решение: Пусть m_1, m_2, m_ε – звездные величины первой (более яркой) звезды, второй звезды и двойной звезды соответственно, а $L_1, L_2, L_\varepsilon = L_1 + L_2$ – светимости объектов в визуальном диапазоне. Тогда $m_1 = 0$, а

$$m_\varepsilon - m_1 = -2{,}5\log_{10}\frac{L_\varepsilon}{L_1} \approx -0{,}36.$$

Ответ: $-0{,}36$ или $-0{,}37$ (оба числа допускаются).

Задача 7. Пример решения на C++

Заметим, что сбой может произойти в заранее неизвестном такте. Мы должны рассчитывать на худший случай. С другой стороны, после сбоя программа продолжает выполнение, зацикливаясь, пока не достигнет сбойного такта.

Тем самым нужно найти максимальный в лексикографическом смысле циклический сдвиг исходной программы и оценить смещение робота.

```
#include<iostream>
#include<string>
#include<vector>
#include<algorithm>

using namespace std;
int main() {
```

```
	int N;
cin>> N;
vector<string> S(N);
for(int i = 0; i< N; ++i) {
	int t;
	cin>> t;
	if (t ==1) S[i].push_back('r');
else S[i].push_back('r');
}
	// генерируем все циклические сдвиги
	for(int i =1; i< N; ++i) {
	for(j = N-1;j > 0; j--) {
	S[i][j]=S[i-1][j-1];
}
S[i][0]=S[i-1][N-1];
}
// лексикографическая сортировка
sort(S.begin(), S.end());
//вычисление пути, соответствющего максимальному
int length = 0;
for(int i = 0; i< N; i++) {
	if (S[0][i] == 'r')
len += pow(2, i);
	else
len -= pow(2,i);
}
cout<<len<<endl;
}
```

Очный тур

Задача 1. Решение. Заметим, что $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=10$. Отсюда $\frac{x^2}{y^2}=\frac{10+2}{10-2}=\frac{3}{2}$, тогда $\frac{x^4}{y^4}=\frac{9}{4}$. Обозначим $A=\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$, получим $A=\frac{\frac{9}{4}+1}{\frac{9}{4}-1}+\frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{9}{4}+1}=\frac{194}{65}$.

Ответ: $\frac{194}{65}$.

Задача 2. Решение. $F\Delta t = \Delta p$. За 0,1 секунды: $\Delta t = 0{,}1$. Сила тяжести равняется силе тяги, следовательно, $Mg = \frac{\Delta p}{0{,}1} = \frac{\mu v}{0{,}1}$, где $M -$ масса ракеты, $\mu -$ расход топлива, $v -$ скорость истечения газов.
Отсюда $\mu = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}1}{500} = 600$ кг.
Ответ: 600 кг.

Задача 3. Решение. Рассмотрим первую из окружностей. Угол BCA является вписанным, следовательно, он равен половине дуги AB. Угол BAM образован хордой AB и касательной AM к окружности, поэтому он равен половине той же дуги AB. Следовательно, $\angle BCA = \angle BAM$. Аналогично, $\angle BCA = \angle BAM$. Значит, $\Delta BAC \sim \Delta AMB$. Из подобия следует пропорция $\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BM}$, откуда $BA = \sqrt{6 \cdot 24} = 12$.
Ответ: 12.

Задача 4. Решение. За время t поршень сдвинется на расстояние $h = v \cdot t$. При этом объем изменится на величину $\Delta V = h \cdot S$. Учитывая, что процесс изобарный с постоянным давлением, равным $p = p_0 + \frac{mg}{S}$, для работы газа получим $A = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \Delta V$.
В соответствии с первым началом термодинамики для изменения внутренней энергии, которая определяется формулой $\Delta U = \frac{i}{2} R\Delta T = \frac{i}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \Delta V$, можно записать
$Q \cdot t = A + \Delta U \Rightarrow Q \cdot t = \frac{i+2}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \Delta V \Rightarrow Q \cdot t = \frac{i+2}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot v \cdot t \cdot S$,
где $Q -$ скорость подачи тепла. Тогда $Q = \frac{i+2}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot v \cdot S$.
Следовательно, для обеспечения движения поршня выгоднее использовать одноатомный газ ($i = 3$). Подставляя данные задачи, получим ответ.
Ответ: Одноатомный, $0{,}5625$ Дж/с.

Задача 5. Пример решения на языке С++
```
#include<iostream>
usingnamespace std;

longlong n;
intF(longlong x)
{
longlong y = n;
```

```
intans = 0;
if(x == 0&& n / 10 == 0)
{
if(x == n)
return0;
return1;
}
while(y >0&& x >0)
{
if(x % 10 != y % 10)
            ++ans;
        x = x / 10;
        y = y / 10;
}
if(x != 0 || y != 0)
return -1;
returnans;
}
intmain()
{
longlong x, m;
cin>> n >> m;
    x = n;
    x -= x % m;
int k = 0;
intans = 1e9;
longlong y = 0;
while(x >= 0&& k <100000)
{
if(F(x) != -1&&ans>F(x))
{
ans = F(x);
            y = x;
}
        x -= m;
        ++k;
}
    x = n;
    x -= x % m;
```

```
    k = 0;
while(x >= 0&& k <100000)
{
if(F(x) != -1&&ans>F(x))
{
ans = F(x);
            y = x;
}
        x += m;
        ++k;
}
if(ans == 1e9)
cout<< -1;
else
cout<< y;
return0;
}
```

Задача 6. Решение. Прежде всего, найдем скорость движения МКС. Пусть $R = R_З + h = 6756000$ м – радиус орбиты, ω – угловая скорость вращения станции, а m – масса станции. По закону Ньютона

$$mR\omega^2 = F_T = G\frac{M_З m}{R^2} = m\frac{\mu}{R^2}.$$

Тогда $\omega = \sqrt{\mu/R^3} = 0{,}0011366$ с$^{-1}$, а скорость $V = R\omega = 7679{,}180$ м/с.

а) Итак, скорость спутника относительно центра Земли равна (по модулю) $u = V + v = 7683{,}180$ м/с. Значит, спутник, как и станция, будет двигаться по замкнутой эллиптической орбите вокруг Земли в плоскости орбиты станции. При этом, поскольку космонавт придал спутнику дополнительную скорость, направленную по касательной к окружности (орбита станции), т. е. по вектору, направленному вовне окружности, то спутник в первые секунды полета окажется на более высокой орбите. Кроме того, мы уже знаем, что эта эллиптическая орбита касается круговой орбиты МКС в точке запуска спутника. Теперь заметим, что касание эллипса и окружности с центром в фокусе этого эллипса может осуществляться только в двух точках – перигее и апогее эллиптической орбиты. Действительно, если тело движется по эллиптической орбите за пределами окружности, а затем касается этой окружности, то после касания тело вновь окажется вне окружности (эллипс – выпуклая кривая). Значит, это тело вначале приближалось, а затем отдалялось от центра окружности – фокуса эллипса, т. е. точка касания была перигеем орбиты. Итак, единственной общей точкой орбиты спутника и орбиты МКС будет та самая точка, в которой космонавт осуществил запуск, т. е. спутник и МКС вновь сблизятся после одного витка. Однако опасность столкновения со спутником станции не грозит, т. к. в точку касания орбит тела придут в разное время. Большая полуось орбиты спутника больше радиуса орбиты МКС. Тогда, по закону Кеплера (квадраты периодов обращения относятся как кубы больших полуосей орбит), период обращения спутника больше, чем у МКС. Итак, после одного витка спутник придет в точку соприкосновения орбит позже станции и столкновения не произойдет. При следующих витках спутник продолжит отставать от станции и столкновение теоретически возможно только после нескольких витков, когда спутник отстанет от станции «на круг». Однако за это время различные дополнительные факторы вызовут отклонение траектории станции и вероятность столкновения пренебрежимо мала. Вывод: такой запуск спутника вполне безопасен.

б) Модуль скорости спутника находим из прямоугольного треугольника $u = \sqrt{V^2 + v^2} = 7679{,}181$ м/с. Отсюда же находим угол между направлением движения спутника и МКС в момент броска $\alpha = arctg\frac{v}{V} = 0{,}000521$ радиана. Как и в предыдущем пункте, спутник будет двигаться по эллиптической орбите в плоскости орбиты МКС. Отличие от пункта а) в том, что эти орбиты пересекаются в точке A – точке запуска. Заметим, что если эллипс и окружность с центром в фокусе этого эллипса пересекаются, то точек пересечения ровно две. Действительно, при движении по эллипсу точка находится ближе всего к фокусу в точке перигея, затем отдаляется, достигает максимального расстояния в точке апогея, а затем вновь приближается до точки перигея. Тогда через каждое свое промежуточное значение функция расстояния от точки до фокуса проходит ровно два раза. В нашем случае спутник в первые секунды после запуска будет находиться ниже станции, т. е. пойдет по своей орбите к точке перигея, достигнет ее и затем, отдаляясь от центра Земли, пересечет орбиту МКС. Однако опасность столкновения со спутником станции не грозит, т. к. в точку пересечения орбит (точку B) тела придут в разное время. Во-первых, время движения станции от момента запуска до точки пересечения орбит составляет приблизительно половину периода обращения $\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega} = 2764$ с. Действительно, в силу симметрии эллипса две точки пересечения орбит симметричны относительно прямой, проходящей через фокусы и точку перигея эллипса. Но поскольку эллипс

будет очень близок к окружности, то симметричная точка близка к диаметрально противоположной точке. Во-вторых, во все время этого полувитка скорость спутника будет больше скорости станции. Начальная скорость спутника фактически равна скорости станции, далее спутник движется к точке перигея и, следовательно, его скорость возрастает. После прохождения точки перигея скорость спутника начнет убывать и в силу симметрии вернется к значению $u = 7679{,}181$ м/с в точке B. При этом путь, пройденный спутником, меньше, чем путь, пройденный станцией (орбита спутника ниже орбиты станции). Значит, спутник обгонит станцию в точке B. Следующее пересечение орбит произойдет после одного полного витка станции. Здесь применимы рассуждения из предыдущего пункта: период обращения спутника больше периода обращения станции, и спутник от станции отстанет.
Вывод: такой запуск спутника также безопасен, хотя и хуже первого способа.

в) При таком запуске орбита движения спутника будет лежать в плоскости, отличной от плоскости орбиты МКС. При этом модуль скорости спутника по-прежнему равен $u = \sqrt{V^2 + v^2} = 7679{,}181$ м/с, т. е. практически совпадает со скоростью станции $V = 7679{,}180$ м/с. Векторы скоростей спутника и МКС лежат в разных плоскостях, но оба перпендикулярны оси Oz. Это означает, что в плоскости своей орбиты спутник имеет те же начальные данные (радиус-вектор и вектор скорости), что и МКС в своей плоскости. Значит, орбита спутника будет круговой с тем же периодом обращения, что и у МКС. Тогда, через полвитка станция и спутник сблизятся (если пренебречь разницей между u и V, то просто столкнутся).
Вывод: такой способ запуска является опасным.

7 – 9 классы

Заочный тур

Задача 1. Решение. В момент новолуния Луна находится в точности на отрезке, соединяющем Землю и Солнце. Земля находилась в афелии своей орбиты, т.е. на расстоянии 152 098 тыс. км от Солнца. Таким образом, расстояние от Луны до Солнца было равно $152\,098 - d_{З-Л}$ тыс. км, где $d_{З-Л}$ – расстояние от Земли до Луны на этот момент. Это расстояние колеблется от 356 до 408 тыс. км, т.е. искомое расстояние лежит между 151 690 до 151 742

тыс. км. В любом случае, при округлении получаем 151 700 тыс. км. На самом деле, Луна находилась в апогее своей орбиты 07 июля 1970 года, т.е. 03 июля 1970 года $d_{З-Л} \approx 390$ тыс. км.
Ответ: 151 700 000 км.

Задача 2. Пример решения на С++.

```
#include<iostream>
#include <string>
using namespace std;

#define READY 1
#define PROCESS_NUM 2

int main() {
        int N;
cin>> N;
        string S;
cin>> S;

        int state = READY;
        for (int i = 0; i<S.size(); i++) {
                if (state == READY) {
                        if (S[i] == 1) {
                                state = PROCESS_NUM;
                        }
                } else if (state == PROCESS_NUM) {
cout<< S[i];
                        state = READY;
                }
        }
        return 0;

}
```

Задача 3. Решение. Поскольку точка X лежит на стороне AB, то наиболее удаленной от нее точкой квадрате будет либо точка C, либо точка D. Значит, $f(X) = \max\{|CX|, |DX|\}$. Последнее выражение будет наименьшим в том случае, когда длины отрезков CX и DX равны, то есть, когда X – середина стороны AB. Значит, $|AX| = a/2$.
Ответ: $a/2$.

Задача 4. Решение. Измеренное ртутным барометром атмосферное давление равно давлению, которое оказывает на дно сосуда столбик ртути высотой h мм. Таким образом, $p = \rho g h = 91{,}12h$ Па.
Ответ: $p = 91{,}12h$ Па.

Задача 5. Решение. Двузначное число, составленное из цифр a и b, делится на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 число a+b. Число 9 делится на 3, значит, попасть в пункт с номером 9 можно только из тех пунктов, номера которых делятся на 3. Но и в каждый из них, в свою очередь, можно попасть только из пунктов, номера которых кратны трем, и так далее. Значит, из пункта с номером 1 в пункт с номером 9 попасть невозможно (1 не кратно трем).
Ответ: нет.

Задача 6. Решение. Вес измерен на полюсе, т.е. поправка, связанная с вращением планеты отсутствует. Значит, вес равен силе тяжести $P = G\frac{M_{\text{планеты}} \cdot m}{(R_{\text{планеты}})^2}$, где m – масса космонавта. По условию, этот вес равен $(100 - n)$ процентов земного веса того же космонавта, т.е.

$$G\frac{M_{\text{планеты}} \cdot m}{(R_{\text{планеты}})^2} = \left(1 - \frac{n}{100}\right) G\frac{M_{\text{Земли}} \cdot m}{(R_{\text{Земли}})^2}$$

Массу Земли и массу планеты находим по формуле $M = \rho V$, где ρ - плотность, а V - объем. Считая Землю и планету шарами, находим объем по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Тогда

$$\frac{4mG\rho_{\text{планеты}} R_{\text{планеты}}}{3} = \frac{4mG\rho_{\text{Земли}} R_{\text{Земли}}}{3} \cdot \left(1 - \frac{n}{100}\right)$$

Учитывая, что $R_{\text{планеты}} = \frac{1}{2} R_{\text{Земли}}$, получаем: $\rho_{\text{планеты}} = 2\rho_З \left(1 - \frac{n}{100}\right) = 11{,}04\left(1 - \frac{n}{100}\right)$.
Ответ: $11{,}04\left(1 - \frac{n}{100}\right)$.

Задача 7. Решение. Разберем вариант $a_1 = 12$. Тогда $(a_1)^2 = 144$, значит, $a_2 = 1 + 4 + 4 + 1 = 10$; $(a_2)^2 = 100, a_3 = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$; $(a_3)^2 = 4$, $a_4 = 4 + 1 = 5$; $(a_4)^2 = 25$, $a_5 = 2 + 5 + 1 = 8$; $(a_5)^2 = 64$, $a_6 = 6 + 4 + {}$ $+1 = 11$; $(a_6)^2 = 121$, $a_7 = 1 + 2 + 1 + 1 = 5$.
Значит, начиная с a_4, мы получаем циклическую последовательность: $5, 8, 11, 5, 8, 11, \ldots$

Поскольку $1970 = 4 + 655 \cdot 3 + 1$, то $a_{1970} = a_{4+655\cdot3+1} = a_{4+1} = a_5 = 8$.
Ответ: 8 (во всех вариантах).

Задача 8. Решение. Раз Солнце находилось на юге, то место наблюдений находится в северном полушарии, а время наблюдения – астрономический полдень. Далее, в астрономический полдень в день летнего солнцестояния угол между направлением на Солнце и осью вращения Земли равен углу между этой осью и плоскостью эклиптики, т.е. равен $90^o - 23^o26'$ с точностью до минуты. Если точка поверхности Земли расположена на широте α градусов, то угол между вертикалью и осью равен $90 - \alpha$. Тогда угол между вертикалью и направлением на Солнце равен $(90^o - 23^o26') - (90^o - \alpha) = \alpha - 23^o26'$.
Высота Солнца над горизонтом отсюда равна

$$h = 90 - \alpha + 23{,}5 \text{ градуса.}$$

Ответ: $90 - h + 23{,}5$ градусов северной широты.

Очный тур

Задача 1. Решение. Пусть v_1 м/мин – скорость первого тела, v_2 м/мин – скорость второго тела. При движении в разные стороны они сближаются со скоростью $v_1 + v_2$, а при движении в одну сторону – сближаются со скоростью $v_1 - v_2$. Пусть L – длина окружности. Тогда $\frac{L}{v_1+v_2} = 2$ минуты – время между встречами при движении в разных направлениях, а $\frac{L}{v_1-v_2} = 10$ минут – время, за которое первое тело догоняет второе. Получим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{L}{v_1+v_2} = 2 \\ \frac{L}{v_1-v_2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = L \\ 10v_1 - 10v_2 = L \end{cases}$.
Отсюда $v_1 = 0{,}3L, \quad v_2 = 0{,}2L$. Тогда первое тело проходит окружность за $\frac{L}{0{,}3L} = \frac{10}{3}$ минут, второе тело – за $\frac{L}{0{,}2L} = 5$ минут.
Разница составляет $300 - 200 = 100$ секунд.
Ответ: 100 секунд.

Задача 2. Решение. Пусть брусок массы m_2 переместили вдоль поверхности стола на расстояние x. Для того, чтобы мог сдвинуться брусок массы m_1, необходимо выполнение условия $kx = \mu m_1 g$, откуда $x = \frac{\mu m_1 g}{k}$. Искомая работа будет минимальной, если кинетической энергии оба бруска не при-

обретают. В этом случае искомая работа затрачивается только на преодоление трения и сообщение энергии растянутой пружины: $A = \mu m_2 g x + \frac{kx^2}{2}$. Из записанных соотношений следует, что величина минимальной работы равна $A = \frac{\mu^2 g^2 m_1}{k}\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)$.
Ответ: $A = 0{,}025$ Дж.

Задача 3. Пример решения на языке Python

```
n= int(input())
a=n
t=1
while a-1>0:
if a-1<t :
        c=a-1
        b=t

whilec != 0and b != 0:
if c > b:
                c = c % b
else:
                b = b % c

ifc+b==1:
print(a-1,t)
break
    t=t+1
    a=a-1
```

Задача 4. Решение. Обозначим $\rho -$ плотность воды, тогда плотности металлов равны соответственно 3ρ и 8ρ. Пусть масса первого металла равна x, тогда второго: $1 - x$. Значит, объемы металлов равны $V_1 = \frac{x}{3\rho}$ и $V_2 = \frac{1-x}{8\rho}$. Из закона Архимеда следует: $(V_1 + V_2)\rho g = mg - P = \Delta P = 2{,}5$, где $m = 1$ кг – масса сплава. Получаем уравнение: $\left(\frac{x}{3} + \frac{1-x}{8}\right) \cdot 10 = 2{,}5$, откуда $x = 0{,}6$.
Ответ: 0,6.

Задача 5. Решение. $OB -$ биссектриса и высота в треугольнике AOC, следовательно, этот треугольник равнобедренный. Значит, $AO = OC = \sqrt{5}$, $AB = BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = 1$. Обозначим $CD = x$. $OC -$ биссектриса в треугольнике BOD, значит, по свойству биссектрисы $\frac{BC}{CD} = \frac{OB}{OD}$, откуда $OD = 2x$. По теореме Пифагора для треугольника BOD: $4 + (x+1)^2 = (2x)^2$. Отсюда $3x^2 - 2x - 5 = 0,\ x_1 = -1, x_2 = 5/3$. Отрицательный корень не подходит, следовательно, $AD = 1 + 1 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$.

Ответ: 11/3.

Задача 6. Решение.

а) И космонавт, и спутник в его руках уже имеют скорость относительно центра Земли, равную скорости станции, и, как и вся станция, движутся по круговой орбите. Поскольку космонавт не придает спутнику никакой дополнительной скорости, то спутник, предоставленный сам себе, продолжит движение по той же самой орбите. Вернувшись на станцию, космонавт еще долго будет наблюдать «висящий» за бортом спутник. Такая ситуация является, естественно, нежелательной, поскольку различные дополнительные факторы (в первую очередь, непостоянство поля тяготения Земли) могут вызвать малое отклонение траектории движения станции и привести к столкновению.

б) Ясно, что сил космонавта не хватит, чтобы увеличить скорость спутника с первой космической до второй. Значит, спутник, как и станция, будет двигаться по замкнутой эллиптической орбите вокруг Земли. При этом поскольку космонавт придал спутнику дополнительную скорость, направленную по касательной к окружности (орбита станции), т. е. по вектору, направленному вовне окружности, то спутник в первые секунды полета окажется на более высокой орбите. Кроме того, мы уже знаем, что эта эллиптическая орбита касается круговой орбиты МКС в точке запуска спутника. Теперь заметим, что касание эллипса и окружности с центром в фокусе этого эллипса может осуществляться только в двух точках – перигее и апогее эллиптической орбиты. Действительно, если тело движется по эллиптической орбите за пределами окружности, а затем касается этой окружности, то после касания тело вновь окажется вне окружности (эллипс – выпуклая кривая). Значит, это тело вначале приближалось, а затем отдалялось от центра окружности – фокуса эллипса, т. е. точка касания была перигеем орбиты. Итак, единственной общей точкой орбиты спутника и орбиты МКС будет та самая точка, в которой космонавт осуществил запуск, т.е. спутник и МКС вновь сблизятся после одного витка. Однако опасность столкновения со спутником, станции не грозит, т. к. в точку касания орбит тела придут в разное время. Скорость броска руки человека (4–6 м/с) очень мала по сравнению со скоростью станции (примерно 8 км/с), а значит, эллиптическая орбита спутника будет близка к круговой. Считая орбиту спутника близкой к круговой, можем записать равенство $R\omega^2 = g$, где R – радиус орбиты, ω – угловая скорость, а g – ускорение свободного падения. Знаем, что с отдалением от Земли сила тяжести уменьшается, т. е. уменьшается величина g. Радиус при этом увеличивается, а значит, угловая скорость уменьшается. Поскольку мы уже знаем, что орбита спутника в целом выше орбиты станции, то угловая скорость спутника меньше угловой скорости станции. Тогда период обращения спутника $T = \frac{2\pi}{\omega}$ по орбите больше периода обращения станции. Итак, после одного витка спутник придет в точку соприкосновения орбит позже станции и столкновение не произойдет. При следующих витках спутник продолжит отставать от станции и столкновение теоретически возможно только после нескольких витков, когда спутник отстанет от станции «на круг». Однако за это время различные дополнительные факторы (в первую очередь прецессия орбиты) вызовут отклонение траектории станции и вероятность столкновения пренебрежимо мала.

2020/2021 год

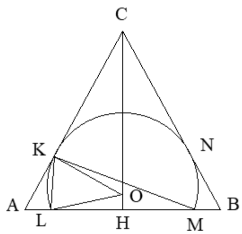
Разминка. 5 – 6 классы: 1. б) 2. б) 3. в) 4. в) 5. в) 6. а) 7. в) 8. д) 9. б) 10. в)

7 – 9 классы: 1. г) 2. б) 3. а) 4. в) 5. в) 6. а) 7. в) 8. б) 9. б) 10. в)

10 – 11 классы: 1. г) 2. б) 3. а) 4. в) 5. в) 6. а) 7. в) 8. б) 9. б) 10. в)

10 – 11 классы

Заочный тур



Задача 1. Решение. Пусть $r = OL = OK = d/2$ – радиус окружности, $AC = a$. Угол OKC равен $\pi/2$, а угол $\angle OCK = \frac{\pi}{2} - \alpha$, т.е. $\angle COK = \alpha$. Тогда $OC = r/\cos\alpha$, $KC = r\text{tg}\alpha$, $AK = a - r\text{tg}\,\alpha$. Опустим высоту KP на сторону AB. Тогда $KP = (a - r\text{tg}\alpha)\cdot\sin\alpha$. Поскольку $CH = a\sin\alpha$, то $OH = a\sin\alpha - \frac{r}{\cos\alpha}$. Из теоремы

Пифагора находим

$$LH = \sqrt{LO^2 - OH^2} = \sqrt{r^2 - \left(a\sin\alpha - \frac{r}{\cos\alpha}\right)^2},$$

а искомая площадь равна $S = LH \cdot KP$.

Ответ: $S = 80k^2\sqrt{2}$.

Задача 2. Решение. Заметим неравенство

$$xy \leq \frac{Ax^2 + By^2}{2\sqrt{AB}}$$

Тогда $r = 1 + Cxy \leq 1 + \frac{C}{2\sqrt{AB}}(Ax^2 + By^2) = 1 + \frac{C}{2\sqrt{AB}}r$, откуда $r \leq \frac{2\sqrt{AB}}{2\sqrt{AB}-C}$. Равенство достигается, если $y\sqrt{B} = x\sqrt{A}$. Такая точка на траектории движения есть, поскольку уравнение

$$Ax^2 - C\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}x^2 + Ax^2 = 1$$

имеет решения, так как $C < 2\sqrt{AB}$.

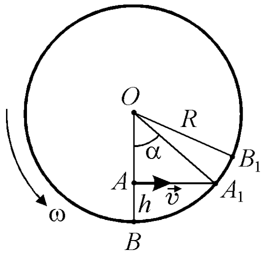
Ответ: $\frac{2\sqrt{AB}}{2\sqrt{AB}-C}$.

Задача 3. Решение. Пусть $O -$ центр Земли, $A -$ точка наблюдения, $B -$ положение спутника. Так как точка находится в северном полушарии, а спутник движется в экваториальной плоскости, то наибольшее его восхождение будет наблюдаться строго на юге. Значит, плоскость ABO пересекает земной шар строго по меридиану. Линия горизонта в этой плоскости – это прямая, проходящая через A перпендикулярно AO (касательная перпендикулярна радиусу в точке касания). Пусть $D -$ точка пересечения этой прямой с OB.

Тогда искомый угол – это $\angle DAB = \alpha$, $OA = r$, $OB = r + h$, $\angle DOA = 45^o$ (широта точки A). Треугольник $OAD -$ равнобедренный и прямоугольный, $\angle ADB = 135^o$, $\angle ABD = 45^o - \alpha$, $AD = r$. Применяем теорему синусов к треугольнику BDA и после упрощений получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r + h - r\sqrt{2}}{r + h} = 0{,}785.$$

Ответ: 0,785.



Задача 4. Решение. Рассмотрим движение предмета в не вращающейся системе отсчета, связанной с кораблем (см. рисунок). В этой системе предмет, выпущенный из руки в точке A, имеет скорость $v = \omega(R-h)$, направленную перпендикулярно к OA. Поскольку сопротивление воздуха и влияние небесных тел пренебрежимо малы, предмет движется прямолинейно и равномерно и за время $\tau = \frac{AA_1}{v}$ достигает пола в точке A_1. Точка B (подошвы ног космонавта) за это время переместится в положение B_1. Обозначив через ω угловую скорость вращения корабля, находим, что длина дуги $\breve{BB_1}$ равна: $\breve{BB_1} = \omega R\tau = \omega R\frac{AA_1}{\omega(R-h)} = R\,tg\,\alpha$. Поскольку длина дуги $\breve{BA_1} = R\alpha$, искомое расстояние (длина дуги $\breve{A_1B_1}$) равно: $\breve{A_1B_1} = \breve{BB_1} - \breve{BA_1} = R(tg\,\alpha - \alpha)$. Следовательно, $l = R(tg\,\alpha - \alpha)$, где $\alpha = arccos\frac{R-h}{R}$. Используя тригонометрические тождества, ответ можно преобразовать к виду: $l = R\left(\frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R-h} - arccos\frac{R-h}{R}\right)$.

Ответ: $l = R\left(\frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R-h} - arccos\frac{R-h}{R}\right)$.

Задача 5. Решение. Записывая для вытекающего воздуха уравнение Бернулли и учитывая, что давление воздуха за рассматриваемый промежуток времени меняется незначительно, имеем: $p_0 = \frac{\rho v^2}{2}$, откуда скорость истечения воздуха $v = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$. Здесь $\rho = \frac{p_0 M}{RT}$ – плотность воздуха, которая также практически постоянна. Следовательно, массовый расход воздуха равен: $\mu = Sv\rho = S\sqrt{2p_0\rho} = Sp_0\sqrt{\frac{2M}{RT}}$. Из уравнения Клапейрона-Менделеева находим изменение давления воздуха за время τ, а именно $\Delta p = \frac{\mu\tau}{MV}RT$. Объединяя записанные выражения,получаем:$\tau = \frac{\Delta p}{p_0}\cdot\frac{V}{S}\cdot\sqrt{\frac{M}{2RT}}$.

Ответ: $\tau = \frac{\Delta p}{p_0}\cdot\frac{V}{S}\cdot\sqrt{\frac{M}{2RT}}$.

Задача 6. Решение. При своем первом ходе Грегор может либо остаться на 1010 этаже, либо спуститься в 1009с, либо подняться на 1011 этаж, либо подняться на 1012 этаж. Во всех вариантах, кроме последнего, Ворчучело ловит его своим следующим ходом. Пусть Грегор за свой первый ход поднялся на 1012 этаж. Тогда правильный ход Ворчучело – 1011е. Теперь Грегор не может спуститься с 1012 этажа. Далее, вне зависимости от хода Грегора, Ворчучело делает ход 1012е. Затем, если Грегор остался на 1012 этаже, Воручечло его ловит, а если Грегор поднялся выше, то ход Ворчучело – 1012с. Дальнейшие ходы Ворчучело: 1012с-1013с-1014с-1014е-1015е-1016е-1016с-1017с-1018с-1018е-1019е-1020е-1020с-… (естественно, если в какой-то момент Ворчучело видит, что может поймать Грегора за один ход, он это делает). Таким образом, Ворчучело каждый раз блокирует лестницу вниз и заставляет Грегора постепенно увеличивать номер своего этажа. Игра закончится, когда Грегор окажется на 2020 этаже. Ворчучело поднимется в 2020е и вне зависимости от хода Грегора поймает его следующим своим ходом.

Задача 7. Решение. Транзит начинается в момент, когда Ио при движении по орбите вокруг Юпитера пересекает прямую, связывающую край Юпитера и наблюдателя (в плоскости орбиты Ио), и заканчивается, когда спутник пересекает прямую, связывающую противоположный край диска планеты и наблюдателя. Пренебрегаем размерами планеты по сравнению с расстоянием между Землей и Юпитером (в любых точках их орбиты), что позволяет считать указанные прямые параллельными. Также считаем отрезок орбиты Ио при транзите прямой линией. Тогда время транзита спутника по диску планеты будет

$$t = \frac{2R_{Jupiter}}{v_{Io}}$$

где $R_{Jupiter} = 69911$ км (средний радиус Юпитера), а средняя скорость движения Ио по орбите

$$v_{Io} = \frac{2\pi R_{orb}}{T_{Io}}$$

где $R_{orb} = 421700$ км – радиус орбиты Ио, а $T_{Io} = 1.76914$ сут – период обращения Ио по орбите. Итого получаем после подстановки численных величин в формулы: 0.093 сут. = 2 ч 10 мин 26 с.

Более точное решение может учесть кривизну орбиты Ио. Угол β между прямыми, проведенными из центра планеты вточки начала и конца транзита, составляет:

$$\beta = 2\arcsin\frac{R_{Jupiter}}{R_{orb}}$$

где $R_{Jupiter} = 71492$ км – экваториальный радиус Юпитера (с достаточной точностью можно считать, что Ио вращается в экваториальной плоскости Юпитера). Время прохождения t может быть оценено как:

$$t = \frac{T_{Io}\beta}{2\pi}$$

Время транзита составляет примерно 8289 секунд (2 часа 18 минут 09 секунд).

Ответ: 8289 секунд с точностью 500 секунд.

Задача 8. Пример решения на языке C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int i= 0, j=0, l=0, r, u=0 , d, N, cnt = 1, dir = 0;
    cin >> N;
    r = d = N-1;
    int num_mat[N][N], N_2 = N*N;
    while (cnt <= N_2){
        switch(dir%4){
            case 0:{ // движемся вправо
                i = u;
                for (j = l; j <=r; j++)
                   num_mat[i][j] = cnt++;
// cnt увеличивается после присваивания
                u++;
                break;
            }
            case 1:{ // движемся вниз
                j = r;
                for (i = u; i <=d; i++)
                    num_mat[i][j] = cnt++;
// cnt увеличивается после присваивания
                    r--;
                    break;
            }
```

```
            case 2:{ // движемся влево
                 i = d;
                 for (j = r; j >=l; j--)
                    num_mat[i][j] = cnt++;
// cnt увеличивается после присваивания
                    d--;
                     break;
            }
            case 3:{ // движемся вверх
                 j = l;
                 for (i = d; i >=u; i--)
                    num_mat[i][j] = cnt++;
// cnt увеличивается после присваивания
                    l++;
                    break;
            }
        }
        dir++;
    }
    cin >> i >> j;
    cout << num_mat[i-1][j-1]; // в Си и Си++ нумерация с
0
    return 0;
}
```

Очный тур

Задача 1. Решение. а) Разбиваем плоскость на 4 части прямыми $x+y=0$ и $x-y-a=0$. В каждой из частей раскрываем модули. Получаем уравнения четырех лучей: 1) луч $y=0$ с началом в точке $(a,0)$, направление совпадает с положительным направлением оси Ox; 2) луч $x=a$ с началом в точке $(a,0)$, направление совпадает с положительным направлением оси Oy; 3) луч$y=-a$с началом в точке $(0,-a)$, направление совпадает с отрицательным направлением оси Ox; 4) луч $x=0$ с началом в точке $(0,-a)$, направление совпадает с отрицательным направлением оси Oy.

б) Очевидно, смена знака выражения под каждым из модулей не нарушает равенства. Значит, каждая из прямых $x+y=0$ и $x-y-a=0$ является осью симметрии. Аналогично находим центр симметрии. Других осей симметрии нет: при симметрии относительно оси луч переходит в луч. Значит, например, для луча $y=0$ имеем только три варианта – его симметричным отражением может быть луч $x=a, y=-a$ или $x=0$. Первый и третий вариант реализованы, а второй невозможен:

прямые $y = 0$ и $y = -a$параллельны, так что ось симметрии обязана быть либо перпендикулярна, либо параллельна им. Легко видеть, что оба варианта не подходят.

Ответ: б) оси симметрии $x + y = 0$ и $x - y = a$. Центр симметрии $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$.

Задача 2. Решение. а) Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. В треугольнике BCD отрезки DK и CO являются медианами, а значит, делятся точкой пересечения L в отношении 2:1, считая от вершины.

б) Применяя теорему Менелая к треугольнику BKD и секущей CN, находим $BQ = 4QD$. Отсюда $OQ : QD = 3 : 2$. Применяя теорему Менелая к треугольнику AOD и секущей CN, находим $AN = 3DN$. Отсюда $DN = \frac{1}{4}DA$, $DQ = \frac{1}{5}DB$, а значит, площадь треугольника DNQ есть $\frac{1}{20}$ площади треугольника DAB и $\frac{1}{40}$ площади всего параллелограмма.

Ответ: б) 80.

Задача 3. Решение. Уравнение движения спутника массой m по круговой орбите радиуса r имеет вид $\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$, где v – скорость спутника, G – гравитационная постоянная, M – масса планеты. Отсюда период обращения спутника $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$. Учитывая, что по закону всемирного тяготения ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = \frac{GM}{R^2}$, это выражение можно переписать в виде $T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}}$. Выражая отсюда r, получаем ответ.

Ответ: $r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \approx 20461$ км

Задача 4. Пример решения на языке C++

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

double f(double x, double c){
// формализуем функцию из условия
    return x*x + sqrt(x) - c;
```

```
}

double solver(double c){
    double a = 0.0, b = sqrt(c), x = (double) (a+b)/2.0;
    double accuracy = 1e-4;
// добиваемся точности в три знака после запятой
    while(fabs(f(x, c)) > accuracy){
        if (f(x, c)*f(a, c) < 0)
            b = x;
        else // f(x, c)*f(b, c) < 0
            a = x;
            x = (double) (a+b)/2.0;
    }
    return x;
}

int main()
{
    double C;
    cin >> C;
    cout << solver(C);
    return 0;
}
```

Задача 5. Решение. Введем полярную систему координат с центром O в центре Земли и полярным лучом, направленным на первый спутник. Спутники движутся с постоянными угловыми скоростями. Значит, в этой системе второй спутник будет описывать окружность с постоянной угловой скоростью. Тогда искомая доля времени (вне зависимости от того, сколько полных оборотов совершит за промежуток времени второй спутник, и вне зависимости от того, вращаются ли спутники в одну сторону или в разные) совпадает с долей дуги, находясь на которой второй спутник находится в прямой видимости с точкой $A = (6860{,}0)$, по сравнению с длиной полной окружности. Пусть второй спутник находится в точке B. Связь продет тогда, когда отрезок AB коснется поверхности Земли, т.е. когда высота OH в треугольнике OAB равна 6400. По теореме Пифагора тогда $AO = 2469{,}737$, $BO = 3298{,}485$, $AB = 5768{,}221$. По теореме косинусов находим $\cos AOB = 0{,}664351$. Поскольку угол AOB равен половине искомой дуги, то ответ – его радианная мера, деленная на π.

Ответ: $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{R^2-\sqrt{(2Ra+a^2)(2Rb+b^2)}}{ab} \approx 0{,}2687.$

Задача 6. Решение. а) При съемке прямоугольника, на снимке получим параллелограмм (примем этот факт без доказательства – именно так мы видим прямоугольники, а человеческий глаз и фотокамера устроены по одному и тому же принципу). При этом, центр прямоугольника проектируется в центр параллелограмма. Заметим, что эта точка является центром симметрии. Сумму всех векторов (x, y) сгруппируем по парам (симметричный с симметричным). Для каждой пары полусумма равна координатам центра. Отсюда получаем алгоритм нахождения центра. Его достоинствами являются малое число операций (порядка N) и устойчивость к погрешностям (несколько ошибочных пикселей дадут малый вклад в ответ, т.к. в знаменателе находится большое число N).

б) Как в любой камере, лучи света, перед тем как попасть на ПЗС-матрицу, проходят через объектив. Объектив может иметь различное устройство, но в целом, он действует как обычная собирающая линза. Предположим, что при съемке нашего поля камера нацелена и сфокусирована в точности на точку A – центр поля. Тогда лучи, испускаемые источником, расположенным в точке A будут собраны на расстоянии x за линзой, где

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d}$$

(здесь f – фокальное расстояние линзы, а d – расстояние от линзы то точки A). Мы предположили, что камера сфокусирована на поле, т.е. ПЗС-матрица находится именно на расстоянии x за линзой. Пусть теперь точка B лежит на границе поля. Обозначим длину отрезка AB через l. Поскольку l много меньше, чем d, то можно считать, что лучи, испускаемые точкой B, собираются также на расстоянии x за линзой (т.е. на ПЗС-матрице – все поле «в фокусе»). Проследив за лучом, исходящим из B, и проходящим через центр линзы, получим два подобных треугольника. Таким образом, в первом приближении, размер изображения отрезка AB на снимке равен дроби

$$\frac{xl}{d} = \frac{fl}{d - f} \approx \frac{fl}{d}$$

Мы получили хорошо известный факт – если объект расположен далеко от нас, то его видимые размеры прямо пропорциональны его величине и обратно пропорциональны расстоянию до него. Так происходит с каждым линейным размером, а значит, площадь поля на снимке обратно пропорциональна d^2. Разница при вертикальной и косой съемке состоит

только в изменении расстояния до поля. Если спутник находится на высоте h, то $d = h\cos\alpha$. Отсюда получаем итоговый ответ.
Ответ: а) Координата x центра есть среднее арифметическое всех координат данных нам пикселей. Аналогично для второй координаты.
б) $S = \frac{k \cdot N}{cos^2\alpha}$.

7 – 9 классы

Заочный тур

Задача 1. Решение. Метеор нагревается и плавится в результате превращения части его кинетической энергии во внутреннюю энергию. Уравнение теплового баланса имеет вид $\alpha\frac{mv_{min}^2}{2} = mc(t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda m$, где m – масса метеорита. Отсюда $v_{min} = \sqrt{\frac{2c(t_{\text{пл}} - t_0) + 2\lambda}{\alpha}}$.

Ответ: $v_{min} = \sqrt{\frac{2(c(t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda) \cdot 100\%}{\alpha}}$.

Задача 2. Решение. Стратегия Грегора заключается в том, чтобы после каждого своего хода находиться в одной из угловых ячеек 1a, 1c, 1g, 1i, 2a, 2c, 2g или 2i. Покажем, что если Грегор находится в угловой ячейке, то где бы ни был Ворчучело, Грегор может перейти в другую угловую ячейку, находящуюся на расстоянии 2 или более от Ворчучела. Тогда следующим ходом Ворчучело не поймает Грегора, а поскольку все угловые ячейки равнозначны, то игра продолжится сколь угодно долго.

Итак, пусть Грегор находится в ячейке 1g. Если Ворчучело находится в 1b, 1c, 1f, 2a, 2b, 2c, 2e, 2f или 2i, то Грегору можно остаться на месте. Если Ворчучело находится в 1a, 1d или 2d, то Грегор перебегает в 1i. Если Ворчучело в 1i, 1h, или 2h, то Грегор перебегает в 1a. Если Ворчучело в 2g, то Грегор может перейти в 1a или 1i – оба варианта его устраивают. Наконец, если Ворчучело в 1e, то Грегору следует сменить этаж, перейдя в 1g или 1i – оба варианта подходят.

Задача 3. Решение. Коэффициент полезного действия механизма по определению равен $\eta = \frac{A_п}{A_з} \cdot 100\%$, где $A_п$ – полезная работа по перемещению ящика, $A_з$ – полная (затраченная) работа. Пусть вертикальное перемещение ящика составило некоторую величину h. Тогда $A_п = mgh$, а $A_з = Fs = F\frac{h}{sin\,\alpha}$. Отсюда $\eta = \frac{mg}{F}\sin\alpha \cdot 100\%$.

Ответ: $\eta = \frac{mg}{F}\sin\alpha \cdot 100\%$.

Задача 4. Решение. Пусть имеется x смагов, y фиргелей и z квилов. Тогда смагами подписано $x - \frac{x}{5} + \frac{y}{10}$ животных (каждый пятый смаг подписан неверно, а к смагам отнесена десятая часть фиргелей). Фиргелями подписано $y - \frac{y}{10} - \frac{y}{20} + \frac{x}{5}$ животных, а квилами $z - \frac{z}{25} + \frac{y}{20}$.

Составляем систему линейных уравнений $\begin{cases} \frac{4x}{5} + \frac{y}{10} = 74, \\ \frac{17y}{20} + \frac{x}{5} = 134, \\ \frac{24z}{25} + \frac{y}{20} = 175 \end{cases}$ и находим:

$x = 75, y = 140, z = 175$.

Ответ: $x = 75, y = 140, z = 175$.

Задача 5. Решение. Мысленно сожмем каждый из оврагов в прямую линию. Проложив теперь кратчайший путь, разожмем овраги обратно и точки линии, оказавшиеся на разных берегах каждого оврага, соединим мостом. После сжатия оврагов, точка B приобретет координаты $(500,1200)$, откуда длина пути равна $\sqrt{500^2 + 1200^2} = 1300$.

Ответ: 1300.

Задача 6. Пример решения на языке C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    long N, x = 0 , y = 0, i, X;
    char D;
    cin >> N;
    for (i =1; i <= N; i++){
```

```
        cin >> D >> X;
        switch(D){
            case 'N':{
                y+= X;
                break;
            }
            case 'S':{
                y-= X;
                break;
            }
            case 'E':{
                x+= X;
                break;
            }
            case 'W':{
                x-= X;
                break;
            }
            default:{
                cout << ""There is no such direction!"";
            return 0; // некорректные входные данные
            }
        }
    }
    cout << x << "" "" << y;
    return 0;
}
```

Задача 7. Решение. Размерами орбиты Титана по сравнению с размерами орбиты Сатурна пренебрегаем. Поток излучения F от Солнца рассчитывается по формуле

$$F = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

где $L_\odot$ - светимость Солнца, r - расстояние от Солнца.

Отношение потоков в перигелии F_p и в апогелии F_a Сатурна составляет

$$\frac{F_p}{F_a} = \frac{L_\odot}{4\pi r_p^2}\frac{4\pi r_a^2}{L_\odot} = \left(\frac{r_a}{r_p}\right)^2 = 1.25,$$

где $r_a = 10.116$ а.е. – расстояние Сатурна от Солнца в перигелии, а $r_p = 9.048$ а.е. – расстояние Сатурна от Солнца в апогелии. Таким образом, система Сатурна в перигелии освещена на 25% сильнее, чем в апогелии.

Ответ: 1.25.

Задача 8. Решение. Движение в задаче двух тел происходит по кеплеровским орбитам, а так как система устойчива, то обе звезды движутся по эллипсам с общим фокусом – барицентром системы. Так как отрезок, соединяющий звезды, всегда проходит через этот барицентр, то в тот момент, когда первая звезда проходит перигей своей орбиты, вторая находится в апогее, и наоборот. Если обозначить через a большую полуось малого эллипса, c фокусное расстояние малого эллипса, A большую полуось большого эллипса, $C -$ фокусное расстояние большого эллипса, то из постоянства расстояния между планетами получаем:

$$a + c + A - C = a - c + A + C,$$

откуда $c = C$, т.е. движение происходит по окружностям. Тогда отрезок, соединяющий звезды, лежит на диаметре каждой из двух окружностей, т.е. период вращения у звезд совпадает. Тогда центробежная сила для каждой из звезд равна $F = M_1 R_1 \omega^2 = M_2 R_2 \omega^2$ (силы равны, поскольку каждая из них равна силе тяготения). Отсюда получаем, что отношение радиусов орбит звезд равно λ (более тяжелая звезда движется по окружности меньшего радиуса).

Очный тур

Задача 1. Решение. Скорость посыльного равна 36 км/ч=10 м/с. В одну сторону он двигался против движения колонны, следовательно, он приближался к «хвосту» колонны со скоростью $(10 + v)$м/с и затратил на этот путь время $t_1 = \frac{500}{10+v}$секунд. В обратную сторону он двигался в одну сторону с колонной, следовательно, он догонял «голову» колонны со скоростью $(10 - v)$м/с и затратил на обратный путь время $t_2 = \frac{500}{10-v}$секунд. Зная общее время, составим уравнение:

$$\frac{500}{10 + v} + \frac{500}{10 - v} = 156.$$

Приведем к общему знаменателю, получим $2500 = 3900 - 39v^2$, откуда $v^2 = \frac{1400}{39}$, $v \approx 6$м/с.

Ответ: 6 м/с.

Задача 2. Решение. 1-й способ. Введем систему координат так, чтобы начало отсчета совпадало с начальным положением шарика, а ось была направлена вниз (по ходу движения шарика). Закон движения имеет вид $S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где a – ускорение свободного падения. На Земле $a = g$. Обозначим ускорение свободного падения на планете через g_1.Далее, у нас в обоих случаях $S_0 = v_0 = 0$. Пусть высота, с которой падают шарики, равна h. Тогда для шарика на Земле имеем: $\frac{h}{2} = \frac{gt_0^2}{2}$. За то же самое время t_0второй шарик достигнет поверхности планеты, следовательно, получаем уравнение $h = \frac{g_1 t_0^2}{2}$, где на планете. Отсюда $g_1 = 2g$. Из закона сохранения энергии следует равенство

$$mg_1 h = \frac{mv_1^2}{2}$$

и такое же для второго шарика.
Отсюда $g_2 : g_1 = v_2^2 : v_1^2 = 2$, т.е. $v_2 : v_1 = \sqrt{2}$.

2 способ. При свободном падении скорость тела равномерно растет со временем, т.е. $v = kt$. Тогда пройденный телом путь можно найти как произведение средней скорости $v_{\text{ср}} = \frac{kt}{2}$ и времени $s = \frac{kt^2}{2}$. Отсюда получаем, что пройденный телом путь пропорционален квадрату финальной скорости. В нашей задаче второй шарик достиг поверхности в тот момент, когда первый прошел половину пути. Если мысленно продолжить падение второго шарика (скажем, он попадает в вертикальную шахту, прорытую вглубь планеты), то в тот момент, когда первый шарик достигнет поверхности, второй пройдет вдвое больший путь. Отсюда $s_2 : s_1 = 2$, а значит, $v_2 : v_1 = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$ раз.

Задача 3. Решение. а) Для чисел от 1 до 9 очевидно $P(n) = n$, т.е. $P(1) + P(2) + \cdots + P(9) = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Для двузначных чисел -го десятка $P(10k + n) = kn$, т.е. $P(10k + 1) + P(10k + 2) + \cdots + P(10k + 9) = k(1 + 2 + \cdots + 9) = 45k$. Отсюда $P(1) + P(2) + \cdots + P(99) = 45 + 45 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + \cdots + 45 \cdot 9 = 45 \cdot 46 = 2070$. Для второй сотни рассуждаем аналогично и получаем $P(100) + \cdots + P(199) = 2025$.

б) Продолжая рассуждения для k-ой сотни, получаем $P(100k) + \cdots + P(100k + 99) = 2025k$, т.е. $P(100) + \cdots + P(999) = 2025 + 2025 \cdot 2 + \cdots + 2025 \cdot 9 = 91125$. Рассуждая для второй тысячи аналогично, получим $P(1000) + \cdots + P(1999) = 91125$. Отсюда итоговая сумма равна 2070+91125+91125+0=184320.

Ответ: а)4095 б) 184320.

Задача 4. Решение. а) Сила Архимеда уравновесит силу тяжести, т.е. $\rho_{\text{воды}} g V_{\text{погруженного тела}} = Mg$. Отсюда находим $V = 27000$ м$^3 = 2 \cdot 135 \cdot 10 \cdot h$ (понтонов у нас два) и глубину погружения.

б) В силу симметрии ответ будет одинаковым для левого и правого понтонов. Вначале понтоны были уравновешены. Затем к понтону были приложены дополнительные силы $F_0 = mg$, $m = 500{:}\,2 = 250$ т (точка приложения делит понтон в отношении 1:3), $F_1 = m_1 g$ (точка приложения делит понтон в отношении 1:3) и $F_2 = m_2 g$ (точка приложения делит понтон в отношении 3:1). Горизонтальное положение понтона является положением равновесия, если $F_1 + F_0 = F_2$. По условию, суммарная масса закачанной воды равна $50500 - 27500 = 23000$ т. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} m_2 - m_1 = 250, \\ m_1 + m_2 = 11500. \end{cases}$$

Проверим еще, что вся эта конструкция не потонет. Повторяя рассуждения пункта а), получим $2 \cdot 135 \cdot 10 \cdot h = 50500$, откуда $h = 18{,}7 < 21{,}5$.

в)При выводе космического аппарата на орбиту, лежащую в экваториальной плоскости (например, на геостационарную орбиту) или близкую к ней наиболее предпочтительной точкой старта является точка на экваторе. В этом случае удается в полной мере использовать центробежную силу, созданную вращением Земли. Эта сила снижает ускорение свободного падения до 9,78 м/с^2, что снижает расход топлива и, в конечном счете, стоимость запуска.

Ответ: а) h =10 м. б) $m_1 = 5625$ т в носовой части каждого понтона; $m_2 = 5875$ т в кормовой части каждого понтона.

Задача 5. Решение. а), б) Если $N < p$, то в первую секунду передаем все пакеты с КА, а во вторую принимаем все ответы. Будет затрачено 2 секунды. При $N \geq p$ алгоритм меняется. Вначале передаем все пакетов с КА в центр. После этого передаем все пакеты обратно. При этом, в ту секунду, когда передача пакетов A_j заканчивается, мы уже занимаем оставшиеся свободными каналы пакетами B_j (это возможно, так как в этот момент получены, по крайней мере, все пакеты $A_1, \dots, A_p$). В результате будет передано $2N$ пакетов. За каждую секунду будем задействовать все p каналов связи. Значит, передача займет $\left\lceil\frac{2N}{p}\right\rceil$ (наименьшее целое, большее дроби $\frac{2N}{p}$). За меньшее время осуществить передачу невозможно, т.к. первые $\left[\frac{2N}{p}\right]$секунд все каналы заняты (оптимизация невозможна).

в) Пример решения на языке C++

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

int main()
{
    int N, p, i, j, k;
    cin >> N >> p;
    int N_p =  N%p;
    if (p >= N) {
// сможем передать за 2 секунды
        for (i=1; i<=N; i++)
            cout << 'A' << i << ' ';
            cout << '\n';
            for (i=1; i<=N; i++)
                cout << 'B' << i << ' ';
        }
        else{
// нужно сначала отправить, затем получить
            k = ceil((double) N/p);
            for (j = 0; j <k-1; j++){
                for (i = 1; i <= p; i++)
                    cout << 'A' << i+j*p << ' ';
                cout << '\n';
            }
            if (N_p == 0){
                for (i = 1; i <= p ; i++)
                    cout << 'A' << i+j*p << ' ';
                cout << '\n';
            }
            else{
                for (i = 1; i <= N_p ; i++)
                    cout << 'A' << i+j*p << ' ';
```

```
            }

            for (i = 1; i <= p - N_p; i++)
                cout << 'B' << i << ' ';
            cout << '\n';
            k = ceil((double) (N - p + N_p)/p);
            for (j = 0; j < k-1; j++ ){
                for (i = 1; i <= p; i++)
                    cout << 'B' << i + j*p + p - N_p << '
';

                cout << '\n';
            }
            for (i = 1 + j*p + p - N_p; i <= N; i++)
                cout << 'B' << i << ' ';
        }
        return 0;
}
```

5 – 6 классы

Заочный тур

Задача 1. Решение. Выпишем все двузначные числа, которые делятся на 7 и содержат в своей записи различные цифры от 1 до 9. Получим: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 84, 91, 98.

Теперь выпишем все двузначные числа, которые делятся на 13 и содержат в своей записи различные цифры от 1 до 9. Получим: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91.

Заметим, что ни одно из них не заканчивается на 7, значит, цифра 7 должна идти в коде первой. Начинается на 7 только число 78, значит, код начинается с цифр 78. На 8 начинается только число 84, значит, код начинается на 784. Дальше перебираем варианты:

784 – следующее число 42 или 49. Возьмем 42. Дальше 21 или 26 (28 быть не может, так как цифра 8 уже встретилась в коде). Возьмем 21, дальше 13 (1 нельзя, так как 4 уже была). Дальше 35 или 39. Возьмем 35, дальше 56 (52 нельзя, так как 2 уже была). Дальше 63 или 65, но их брать нельзя, так как уже использовали 3 и 5. Значит, 35 после 13 брать нельзя.

Если после 13 взять 39, то дальше 91 или 98, но их брать нельзя, так как уже использовали 1 и 8. Значит, 39 после 13 брать нельзя. Но тогда нельзя взять 13 после 21, но это был единственный вариант, следовательно, 21 тоже неправильно.

Возьмем 26 после 42. Дальше 63 или 65. Возьмем 63. Дальше 35 или 39. Возьмем 35. Дальше 52 или 56. Но их брать нельзя, так как 2 и 6 уже были. Значит, 35 после 63 брать нельзя. Возьмем 65. Дальше 52 или 56, но их снова брать нельзя, так как 2 и 6 уже были. Значит, и 26 после 42 – это неправильно.

Получаем, что надо брать 49, то есть следующая цифра в коде – это 9.

На 9 начинаются 91 и 98, но 8 уже было, значит, следующая цифра – это 1.

На 1 начинаются 13 и 14, но 4 уже было, значит, следующая цифра – это 3.

На 3 начинаются 35 и 39, но 9 уже было, значит, следующая цифра – это 5.

На 5 начинаются 52 и 56. Возьмем 52. На 2 начинаются 21 и 26, но 1 уже было, значит, последняя цифра – это 6. Получаем код 784913526.

Если возьмем не 52, а 56, то дальше могут идти либо 3, либо 5, но они уже использованы. Значит, этот вариант неправильный.

Таким образом, единственный подходящий код – это 784913526.

Ответ: 784913526.

Задача 2. Решение. Назовём инопланетян с чётным числом рук чётными, а с нечётным – нечётными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук чётно. Общее число рук у чётных инопланетян чётно, поэтому общее число рук у нечётных инопланетян тоже чётно. Следовательно, число нечётных инопланетян чётно.

Задача 3. Решение. В детстве Грегора Хвату нужно было купить 2 баночки (то есть 100 г). Сейчас Грегор весит на 120% больше, то есть в 2,2 раза больше. Значит, Хвату достаточно 220 г чистого соуса. Однако соус разбавляют, теперь в баночке содержится $(100 - a)\%$ чистого соуса, то есть $(100 - a)$ граммов (поскольку баночки теперь стали по 100 г).

Значит, Хват должен купить такое количество n баночек, чтобы число $n(100 - a)$ стало не меньше, чем 220.

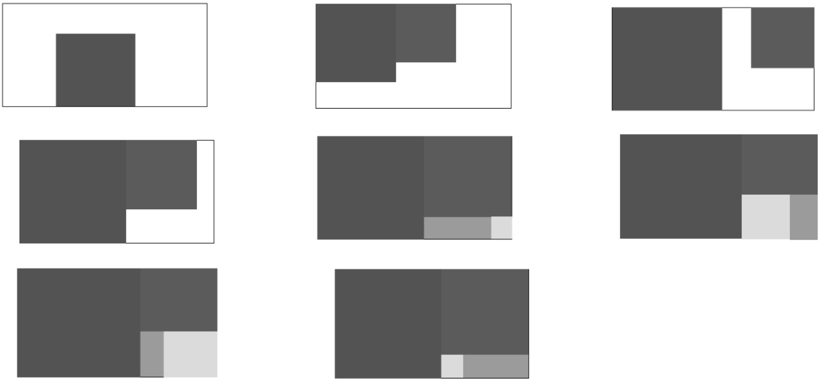
Ответ: при $a = 10$: $n = 3$, останется 50 г.

При $a = 20$: $n = 3$, останется 20 г.

При $a = 30$: $n = 4$, останется 60 г.

При $a = 40$: $n = 4$, останется 20 г.
При $a = 50$: $n = 5$, останется 30 г.

Задача 4. Решение



Будем считать, что самый большой квадрат – синий, следующий по величине – красный, самый маленький – желтый. Развернем одеяло так, чтобы горизонтальный размер был больше или равен, чем вертикальный. Синий квадрат обязан содержать один из углов одеяла. В противном случае сбоку от него должны быть либо квадраты больших размеров (а синий – самый большой), либо два прямоугольника (это запрещено условием). Повернем одеяло так, чтобы синий квадрат содержал верхний левый угол. Если синий квадрат не содержит еще один угол одеяла, то остаток одеяла нельзя составить из двух других квадратов и прямоугольника (смотри второй рисунок).
Итак, синий квадрат содержит два угла одеяла. Опять проверяем, что красный квадрат надо стыковать к синему (иначе решений нет, смотри третий рисунок). Перевернем одеяло, если надо, и можем считать, что красный квадрат содержит верхний левый угол остатка. Заметим, что он должен содержать и верхний правый угол одеяла (иначе решений нет, смотри четвертый рисунок). Для желтого квадрата получаем два варианта: его можно пристыковать внизу слева или внизу справа. Оба варианта являются ответами, но периметр очевидно одинаков. Осталось поместить прямоугольник – для него есть теперь только одно место. Однако вариантов два – желтый квадрат может стыковаться к меньшей стороне прямоугольника или к большей его стороне. Второй вариант

также разбивается на два случая, но периметр в них одинаков. В первом варианте желтый квадрат имеет сторону a, красный сторону $4a$, синий $5a,$ а размеры одеяла $9a \times 5a$. Тогда периметр равен $28a$. В втором варианте желтый квадрат имеет сторону $3a$, красный сторону $4a$, синий $7a,$ а размеры одеяла $11a \times 7a$. Тогда периметр равен $36a$.
Ответ: $28a$ и $36a$.

Задача 5. Решение. Стратегия Грегора заключается в том, чтобы после каждого своего хода находиться в одной из угловых ячеек 1a, 1c, 1g, 1i, 2a, 2c, 2g или 2i. Покажем, что если Грегор находится в угловой ячейке, то где бы ни был Ворчучело, Грегор может перейти в другую угловую ячейку, находящуюся на расстоянии 2 или более от Ворчучела. Тогда следующим ходом Ворчучело не поймает Грегора, а поскольку все угловые ячейки равнозначны, то игра продолжится сколь угодно долго.
Итак, пусть Грегор находится в ячейке 1g. Если Ворчучело находится в 1b, 1c, 1f, 2a, 2b, 2c, 2e, 2f или 2i, то Грегору можно остаться на месте. Если Ворчучело находится в 1a, 1d или 2d, то Грегор перебегает в 1i. Если Ворчучело в 1i, 1h, или 2h, то Грегор перебегает в 1a. Если Ворчучело в 2g, то Грегор может перейти в 1a или 1i – оба варианта его устраивают. Наконец, если Ворчучело в 1e, то Грегору следует сменить этаж, перейдя в 1g или 1i – оба варианта подходят.

Задача 6. Решение. Вначале Грегор и пистолет движутся в одну сторону, причем Грегор опережает пистолет со скоростью $5 - 2 = 3$м/с. Через 7 секунд между ними будет расстояние 21 м. Затем Грегор и пистолет движутся навстречу друг другу со скоростью сближения $5 + 2 = 7$ м/с. Значит, Грегор доберется до пистолета за 3 секунды, т.е. через 10 секунд после столкновения.
Хват и пистолет вначале движутся в разные стороны со скоростью отдаления $6 + 2 = 8$ м/с. Через 5 секунд между ними будет расстояние 40 м. Затем Хват догоняет пистолет со скоростью 6 м/с (скорость пистолета 2 м/с не учитываем, т.к. Хват бежит по ленте транспортера и также имеет дополнительную скорость 2 м/с). Грегор схватит пистолет через 10 секунд после столкновения, т.е. через 5 секунд после разворота Хвата. За это время Хват сблизится с пистолетом на $6 \cdot 5 = 30$ м, т.е. будет в $40 - 30 = 10$ метрах от Грегора.
Ответ: Грегор успеет добежать до пистолета.

Очный тур

Задача 1. Решение. а) Да, например дробь 1/10000.
б) Нет. Пусть $\frac{n}{m}$ – исходная дробь, тогда получаем соотношение $\frac{n+1}{m+100}=\frac{2n}{m}$, откуда $nm+200n=1$, что невозможно для натуральных чисел.
в) Да, например дробь 2/50.
Ответ: а) да, б) нет, в) да.

Задача 2. Решение. Разность периметров квадратов с четными и нечетными номерами равна периметру одного квадрата. Длина его стороны $24:4=6$.
Периметр прямоугольника равен $24\cdot 3 = 72$. Значит, сумма длины и ширины равна 36, при этом и длина, и ширина делятся на 6, поскольку должно поместиться целое число квадратов со стороной 6.
Возможны три варианта для сторон прямоугольника: 6×30 (5 квадратов в ряд), 12×24 (не подходит, так как тогда имеем четное число квадратов) и 18×18 (но тогда длины сторон одинаковы, а по условию они различны). Значит, годится только первый вариант.
Площадь прямоугольника $6\cdot 30=180$.
Ответ: 180.

Задача 3. Решение. Для чисел от 1 до 9, очевидно,$P(n)=n$, т.е. $P(1)+P(2)+\cdots+P(9)=1+2+\cdots+9=45$. Для двузначных чисел - го десятка $P(10k+n)=kn$, т.е. $P(10k+1)+P(10k+2)+\cdots+P(10k+9)=k(1+2+\cdots+9)=45k$. Отсюда $P(1)+P(2)+\cdots+P(99)=45+45\cdot 1+45\cdot 2+\cdots+45\cdot 9=45\cdot 46=2070$. Для второй сотни рассуждаем аналогично и получаем: $P(100)+\cdots+P(199)=2025$.
Ответ 4095.

Задача 4. Решение. Согласно условию, $N_1:N_2=9:11$, $N_1:N_3=10:11$. Пусть $N_1=90x$, тогда $N_2=110x$, $N_3=99x$, $N=N_1+N_2+N_3=299x=897$. Тогда $x=3, N_1=270$, $N_2=330$, $N_3=297$.
Ответ:$N_1=270$, $N_2=330$, $N_3=297$ миллиардов «фунтиков».

Задача 5. Решение. Обозначим вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда подходит, например, расстановка:

$$A(0), B(0), C(-1), D(-1), A_1(1), B_1(1), C_1(0), D_1(0).$$

Задача 6. Решение. а) Да, например, 1289736.

б) Нет. Если такое число есть, то оно не содержит 0 и заканчивается на четную цифру. Значит, не содержит 5. Тогда сумма цифр не кратна 9.

в) Из пунктов а), б) следует, что такой код должен состоять из 7 цифр. Очевидно, он не может содержать цифру 0. Если он содержит цифру 5, то должен делиться на 5. Значит, оканчивается на 5 или на 0. На 0 нельзя, значит, на 5. Тогда это число нечетное, следовательно, не может содержать цифр 2, 4, 6, 8. Значит, в нем меньше 7 цифр – не подходит. Итак, отбрасываем цифру 5.

Чтобы число было как можно больше, начнем его с цифры 9. Тогда оно должно делиться на 9, то есть сумма его цифр должна делиться на 9.

1+2+3+4+6+7+8+9=40. Ближайшее число, которое меньше 40 и делится на 9 – это 36. Значит, отбрасываем 4. Искомое число состоит из цифр 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9. Заметим, что 98 делится на 7, а делимость на 8 не зависит от первых двух цифр. Значит, начнем наше число с 98 и будем подбирать оставшиеся пять цифр. Самое большое возможное число равно 76321, но оно не делится на 8. Переставим две последние цифры, получим 76312 – оно делится на 8, но не делится на 7. Переставим местами 7 и 6 – число 67312 делится на 7 и на 8. Докажем, что это число действительно наибольшее. Наше число должно делиться на 7, 8 и 9, то есть на 504. Будем двигаться от 67312 вверх с шагом 504. Получим числа:

67816, 68320, 68824, 69328, 69832, 70336, 70840, 71344, 71848, 72352, 72856, 73360, 73864, 74368, 74872, 75376, 75880 (дальше уже получим больше, чем 76321). Ни одно из этих чисел не подходит.

Ответ: а) да; б) нет; в)9867312.

2021/2022 год

Разминка. 5 – 7 классы:1. в) 2. в) 3. а) или б) 4. а) 5.б) 6. а) 7. а) 8. а) 9. д) 10. в)

8 – 9 классы: 1. в) 2. а) или б) 3. а) 4. б) 5. б) 6. а) 7. д) 8. а) 9. д) 10. в)

10 – 11 классы: 1. в) 2. а) или б) 3. а) 4. б) 5. а) 6. б) 7. д) 8. а) 9. д) 10. в)

10 – 11 классы

Заочный тур

Задача 1. Решение. Пусть производительность каждого пекаря равна v_j. Тогда каждый из них сделал часть работы $A_j = v_j t_j$, причем $A_1 + \cdots + A_{100} = 1$. По условию, для каждого пекаря имеем $t_j\left(v_1 + \cdots + v_{100} - v_j\right) = \frac{k}{n}$. Добавляя сюда слагаемое A_j и сложив все 100 этих равенств, получим в левой части суммарное время T, умноженное на суммарную производительность, а справа получим $100 \cdot \frac{k}{n} + 1$. Второе условие задачи дает нам $8(v_1 + \cdots + v_{100}) = 1$. Выражая отсюда суммарную производительность, получим $T = 8\left(100 \cdot \frac{k}{n} + 1\right) = 800\frac{k}{n} + 8$.
Ответ:$T = 800\frac{k}{n} + 8$.

Задача 2. Решение. Для полета по параболе снаряд должен набрать вторую космическую скорость, которая для Луны равна $\sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 2376$ м/с. Имеем $v_0 = 0, v_1 = 2376\frac{\text{м}}{\text{с}}, a = 100g = 980\ \text{м/с}^2$. Тогда время полета снаряда в стволе равно $t = \frac{2376}{980} \approx 2{,}4245\text{с}$. Тогда длина ствола равна $S = \frac{at^2}{2} \approx 2880{,}3$ м.
Ответ: $S \approx 2880{,}3$ м.

Задача 3. Решение. Давление внутри мыльного пузыря диаметром d определяется по формуле: $p = p_0 + \frac{8\sigma}{d}$, где p_0 – атмосферное давление, σ – поверхностное натяжение мыльного раствора. В этой формуле учтено, что мыльная пленка, образующая искривленные стенки пузыря, имеет две поверхности: внешнюю и внутреннюю, а толщина пленки пренебрежимо мала. Полагая, что воздух в условиях опыта можно считать идеальным газом, запишем уравнения состояния воздуха в мыльных пузырях:
$\left(p_0 + \frac{8\sigma}{d_1}\right)\frac{\pi}{6}d_1^3 = \nu_1 RT$, $\left(p_0 + \frac{8\sigma}{d_2}\right)\frac{\pi}{6}d_2^3 = \nu_2 RT$, $\left(p_0 + \frac{8\sigma}{d_3}\right)\frac{\pi}{6}d_3^3 = (\nu_1 + \nu_2)RT$. Исключая из этих уравнений количества воздуха в пузырях ν_1,

ν_2 и его абсолютную температуру T, получаем для p_0 выражение: $p_0 = 8\sigma \cdot \frac{d_1^2+d_2^2-d_3^2}{d_3^3-d_1^3-d_2^3}$. Поскольку ускорение свободного падения у поверхности Марса g = 3,7 м/с^2, а плотность ртути ρ = 13,6 г/см^3, то искомое давление в миллиметрах марсианского ртутного столба равно $p_{\mathrm{Hg}} = \frac{p_0}{\rho g}$.

Ответ:$p_{\mathrm{Hg}} = \frac{8\sigma}{\rho g} \cdot \frac{d_1^2+d_2^2-d_3^2}{d_3^3-d_1^3-d_2^3}$.

Задача 4. Решение. Докажем прежде всего, что внешний шаровой слой не притягивает материальную точку внутри сферы. Для этого проведем из этой точки два конуса (двусторонний конус с общей высотой) с очень маленьким телесным углом. Тогда площадь поверхности сферы, высекаемая конусом, можно считать равной площади основания конуса. Пусть высота первого конуса h, а второго H, радиус основания первого конуса r, а второго R. В силу подобия$\frac{h}{H} = \frac{r}{R}$, т.е. площади оснований конусов относятся как $\left(\frac{h}{H}\right)^2$. Но тогда так же относятся объемы частей шарового слоя, попавшие в первый и второй конус, а значит и их массы. Поскольку силы тяготения равны $F_1 = \frac{Gm}{h^2}$ и $F_2 = \frac{GM}{H^2}$ соответственно (материальную точку берем единичной массы), то они равны по модулю и направлены противоположно, т.е. взаимно сокращаются. Поскольку наше рассуждение верно для любого двустороннего конуса, получаем результат – суммарное притяжение шарового слоя внутри сферы равно нулю.

Итак, достаточно написать закон тяготения для внутреннего ядра Луны, т.е. $a = \frac{GM}{R^2}$. По условию, $R = 1737{,}4 - 17{,}4 - 120 = 1600$ км.

Масса внутреннего ядра есть масса всей Луны за вычетом массы шарового слоя (массой прослойки воздуха пренебрегаем), т.е. равна

$$7{,}3477 \cdot 10^{22}\left(1 - \frac{V_{\text{слоя}}}{V_{\text{общий}}}\right).$$

Объем слоя равен разности объемов шаров, т.е.

$$V_{\text{слоя}} = \frac{4}{3}\pi(1737{,}4^3 - 1720^3).$$

Общий объем есть сумма этого объема и объема внутреннего шара радиусом 1600 км. Отсюда $\frac{V_{\text{слоя}}}{V_{\text{общий}}} \approx 0{,}03539$,

Ответ:$a \approx 1{,}84532$ м/с^2.

Задача 5. Решение. Проведем диагональ BD и среднюю линию FH. Отметим точку Q пересечения FH и BG. Из теоремы Фалеса следует, что Q - середина BG. Заметим, что EC параллельна AG, откуда следует, что EC - средняя линия в треугольнике ABG. Значит, эта прямая пересекает сторону BG в ее середине – в точке Q. Аналогично доказываем, что диагональ BD, отрезок AF и отрезок CE пересекаются в одной точке (обозначим ее P). Обозначим еще центр квадрата через O.

Теперь заметим, что BG – медиана треугольника BCD, а значит и треугольника BOM, т.е. $\frac{OQ}{OM} = \frac{1}{2}$. Далее, $ABFH$ - прямоугольник, а значит FA - медиана треугольника BFH. Так как BO – тоже медиана в этом треугольнике, то P – точка пересечения медиан, откуда $\frac{OP}{OB} = \frac{1}{3}$. Тогда $S_{POQ} = \frac{1}{6} S_{BOF}$. Для остальных сторон все аналогично, т.е. центральная часть есть восьмиугольник, площадь которого равна $\frac{1}{6}$ часть суммы площадей треугольников $BOF, COF, COG, DOG, \ldots$, т.е. площади всего квадрата.

Решение 2. Введем систему координат с центром в точке A и осями, направленными по ADи AB. Тогда точки имеют координаты $A = (0,0), B = (0,3), C = (3,3), D = (3,0), E = (0,1.5), F = (1.5,3), G = (3,1.5), H = (1.5,0)$. Тогда прямая AFимеет уравнение $y = 2x$, а прямая CE имеет уравнение $y = \frac{x}{2} + 1.5$. Тогда их точка пересечения (обозначим ее Pнаходится из уравнения $2x = \frac{x}{2} + 1.5$, откуда $P = (1,2)$. Аналогично, прямая BG имеет уравнение $y = 3 - x/2$, а тогда точка пересечения этой прямой и прямой CE (назовем эту точку Q) находится из уравнения $\frac{x}{2} + 1.5 = -\frac{x}{2} + 3$, откуда $Q = (1.5, 2.25)$. Наконец, центр квадрата (точка O) имеет координаты $(1.5,1.5)$. Тогда площадь треугольника OPQ равна половине произведения основания OQи высоты из точки Pна эту сторону, т.е. равна $\frac{1}{2} \cdot 0.75 \cdot 0.5 = \frac{3}{16}$. В силу симметрии площадь центрального восьмиугольника составлены из восьми таких площадей, т.е. равна $\frac{3}{2}$.

Ответ: 1.5.

Задача 6. Решение. Известно, что для любых положительных чисел $x_1, \dots, x_n$ имеет место неравенство

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Используя его для чисел a^3, b^3, c^3, видим, что выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ неотрицательно. С другой стороны, при $a = b = c$ наше выражение равно нулю. Однако, по условию, числа a, b, c должны быть различными натуральными. Значит, надо взять их так, чтобы разности между ними были минимально возможными, т.е. равными 1. Итак, выражение будет минимальным, если $a = b - 1, c = b + 1$. В этом случае выражение имеет вид $f(b) = 9b$, а ограничение имеет вид $3b^2 - 1 \geq n$. Значит, надо взять наименьшее натуральное b, такое что $b \geq \sqrt{(n+1)/3}$.

Решение 2. Заметим, что

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Выражение во второй скобке равно

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2).$$

Это выражение достигает своего наименьшего значения (ноль) в случае $a = b = c$. По условию задачи, числа a, b, c различны, а тогда наименьшее значение выражения есть 3 и достигается в случае, когда a, b, c – идущие подряд натуральные числа. Отсюда получаем неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 6 + n$. Теперь заметим, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 6 + n + 2n = 6 + 3n.$$

Возвращаясь к первой строчке, видим, что $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 3\sqrt{6 + 3n}$. С другой стороны, взяв $a = b - 1, c = b + 1$ и выбирая число b наименьшим, но так, чтобы $a + b + c \geq \sqrt{6 + 3n}$, т.е. чтобы $b \geq \sqrt{(n+1)/3}$, получим ответ.

Ответ: Минимальное значение получается подстановкой чисел $b - 1, b$ и $b + 1$, где b - наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $b \geq \sqrt{(n+1)/3}$.

Задача 7. Решение. Истинное поле зрения равно 60/40=1,5 градуса, т.е. наблюдатель видит внутренность конуса с углом $\alpha = 0{,}75^o$ при вершине. Телесный угол конуса равен $2\pi(1 - \cos\alpha)$, а полный телесный угол равен 4π. Значит, искомая вероятность есть

$p = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \cdot 200 \approx 0{,}0086$. **Ответ:**0,0086.

Задача 8. Решение. Пример программы на языке C++

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int n, m;
vector< vector<int>> A;

void dfs(int i, int j, int color) {
    A[i][j] = color;
    for (int s = -1; s <= 1; ++s)
        for (int t = -1; t <=1; ++t) {
            int x = i+s;
            int y = j+t;
            if ((labs(s)+labs(t) )< 2 && x >= 0 && x < n
&&
                y >= 0 && y < m && (A[x][y] == 0 )) {
            dfs(x, y, color);
            }
        }
}

int main() {
    int d;
    int x, y;
    cin>> n >> m >> d;
    A.resize(n);
    for (int i = 0; i< n; i++) {
        A[i].resize(m);
    }
    for (int i = 0; i< d; i++) {
        cin>> x >> y;
        A[x-1][y-1] = -1;
    }
    int color = 1;
    for (int i = 0; i< n; i ++)
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            if (A[i][j] == 0) {
                dfs(i, j, color);
                color++;
            }
        }

cout<<color-1;
return 0;
}
```

Очный тур

Задача 1. Решение. а) Из условия следует, что график функции не имеет точек в четвертой четверти. Значит, $a > 0$. Действительно, если бы число aбыло отрицательным, то при подстановке очень большого положительного xзначение функции было бы отрицательным. Аналогично $c > 0$, поскольку иначе при подстановке очень малого по модулю положительного x получили бы отрицательное значение функции. Осталось выяснить знак коэффициента b. Если $b \leq 0$, то при $x < 0$получаем $f(x) < 0$. Но тогда график функции не будет иметь точек во второй четверти, что противоречит условию. Следовательно, $b > 0$.
б) Уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $ax^2 + bx + c = 0$ (поскольку $c \neq 0$, то $x = 0$ не может быть корнем). Это уравнение задает параболу, ветви которой направлены вверх (поскольку $a > 0$). Если эта парабола не пересекает ось абсцисс, то $ax^2 + bx + c \geq 0$ при всех x, а тогда $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x} \leq 0$при любом отрицательном значении x, что неверно (график должен иметь точки во второй четверти). Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет два вещественных корня. По теореме Виета их сумма равна $-b/a$. Из условия $f(-1) = 2f(-2)$ получаем $b = 3a$, то есть сумма корней равна -3.
Ответ: а) $a > 0, b > 0, c > 0$; б) -3.

Задача 2. Решение. По пути из A в G космонавт должен пересечь одну из сторон квадрата $MPQL$. Очевидно, что проходить через сторону PQ ему не выгодно, это лишь удлинит путь. Разберем ситуацию, в которой он пересечет отрезок MP (ситуация с LQ разбирается полностью аналогично). Заметим, что кратчайший путь должен пройти через точку M . Для этого рассмотрим развертку граней $PFGQ$ и $EFGH$ на верхнюю плоскость (разрезы проводятся по ребрам FG, PQ, QG, EH, HG). Кратчайшая ломаная, пересекающая отрезок MP, пройдет через точку M. (Аналогично, при разборе ситуации с отрезком LQ получим, что кратчайший путь пройдет через точку L.) Таким образом, в любом случае космонавт пересечет отрезок ML. Обозначим середину этого отрезка через S. Предположим, что космонавт пересекает отрезок MS (ситуация с отрезком LS разбирается аналогично).

Итак, путь проходит через некоторую точку X отрезка MS . Очевидно, что кратчайший путь из A в X пересекает ребро BM. Очевидно также, что кратчайший путь из X в G пересекает либо ребро LH, либо ребро EH. Обозначим $ML = a,\ SX = x$. Развернем грани $QLHG$ и $EFGH$ на плоскость грани $MEHL$. Тогда длина первого пути (через ребро LH) равна $\sqrt{\left(\frac{3a}{2} + x\right)^2 + 16a^2}$, длина второго (через ребро EH) равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + 25a^2}$, следовательно, первый путь короче.

Покажем, что путь будет кратчайшим в ситуации, когда $X = S$. Действительно, траектория космонавта $AX \to XG$. Но отрезок $XG = YA$, где точка $Y \in SL$ симметрична точке X относительно S. Теперь осталось заметить, что $AX + AY \geq 2AS$, причем равенство достигается при $X = Y = S$ (полусумма длин двух сторон треугольника больше длины медианы, проведенной к третьей стороне – легко проверяется достроением до параллелограмма). Точки пересечения траектории с ребрами BM и LH находятся из подобия треугольников.

Ответ: траектория $A \to T \to S \to U \to G$, где $T \in BM, MT{:}TB = 1{:}2$, $S \in ML, MS = LS,\ U \in LH, LU{:}UH = 1{:}2$.

Задача 3. Решение. Грузик движется по поверхности шара под действием сил, модули и направления которых указаны на рисунке, где mg – модуль силы тяжести, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы вязкого трения, N – модуль нормальной составляющей реакции шара. Согласно второму закону Ньютона, $m\frac{v^2}{R} = mg\cos\vartheta - N$, причем в момент отрыва $N = 0$. По закону изменения механической энергии $mg2R = \left(mgR + mgR\cos\vartheta + \frac{mv^2}{2}\right) + Q$. Отсюда находим, что $\cos\vartheta = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{Q}{mgR}\right)$ и $h = R\cos\vartheta + R = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}\frac{Q}{mg}$.

Ответ: $Q = mg\left(\frac{5}{2}R - \frac{3}{2}h\right) = 0{,}06$Дж.

Задача 4. Решение. Пример решения на языке Python:

```
A=int(input())
B=int(input())
C=int(input())
cost=0
cost1=0
g1=C
p1=0
g=0
p=0
if cost<=C:
    while p1<=C/A:
        while g1>=0:
            cost1=p1*B+g1*A
            if (cost1<=C):
                if (cost1>cost):
                    cost=cost1
                    p=p1
                    g=g1
elif (cost1==cost)and(p1+g1>p+g):
                    p=p1
                    g=g1
            g1-=1
        p1+=1
        g1=C
    print(g,p)
else:
print(0,0)
```

Задача 5. Решение. а) Простое замечание из стереометрии: если две плоскости пересекаются, в одной из плоскостей дана прямая l, и найден угол между этой прямой и второй плоскостью, то величина угла не превосходит величины угла между плоскостями (и достигает ее, когда прямая l перпендикулярна прямой пересечения плоскостей). Плоскость кеплеровской орбиты проходит через центр Земли, а радиус-вектор спутника с началом в центре Земли делает за один виток полный оборот. Угол между этим радиус-вектором и плоскостью экватора – это широта точки, в которой радиус-вектор пересекает поверхность Земли. Таким образом, наклонение орбиты совпадает с максимальной широтой спутника в течение витка, то есть равно 60°.

б), в) Разберемся в том, как спутники Земли движутся относительно ее поверхности, точнее, как меняется долгота проекции спутника на поверхность Земли. Если спутник вращается по низкой орбите (ниже геостационарной), то он делает один виток быстрее, чем за сутки. Возможны два варианта – спутник движется по направлению вращения Земли или против. В первом случае долгота проекции в течении витка монотонно увеличивается и меняется менее чем на 360° (так как Земля за время оборота спутника тоже поворачивается на некоторый угол). Видим, что эта ситуация не соответствует условию задачи – у нас долгота проекции за один виток изменилась более, чем на 360°. Во втором варианте долгота проекции монотонно убывает и меняется более чем на 360°. Это нам подходит (в условии задачи не сказано, что нумерация данных в таблице соответствует возрастанию времени; оказывается, данные надо читать по убыванию номеров). Рассмотрим теперь случай, когда спутник движется выше геостационарной орбиты. При движении по направлению вращения Земли спутник теперь «отстает» от вращения Земли, и его долгота монотонно убывает. Изменение долготы за один виток спутника ничем не ограничено (если не учитывать, что для очень высоких орбит на спутник начинают действовать другие тела Солнечной системы). Например, если период обращения спутника вдвое больше периода обращения Земли, то за один виток спутника Земля сделает два оборота и долгота проекции уменьшится ровно на 360°. Это нам подходит (данные вновь надо читать по убыванию номеров). Если же спутник на высокой орбите движется против направления вращения Земли, то за один оборот спутника Земля делает более одного оборота и долгота проекции должна уменьшиться более чем на 720° – это нам не подходит. Наконец при движении по вытянутой эллиптической орбите возможны случаи, когда спутник пересекает геостационарную орбиту. Если такой спутник вращается по направлению вращения Земли, то в некоторых частях орбиты он «обгоняет» Землю (долгота растет), а в некоторых «отстает» от Земли (долгота убывает). В нашем случае этого не наблюдается. Если же такой спутник движется против направления вращения Земли, то долгота проекции монотонно убывает, т.е. противоречий с данными нет, но этот вариант мы уже отбросили выше.

Итак, мы видим два варианта – низкая нисходящая орбита (против вращения Земли) или высокая восходящая орбита. Согласно данным, изменение долготы проекции составило 396°. В первом случае получаем, что за время витка Земля повернулась на $396 - 360 = 36^\circ$, т.е. период обращения спутника составляет одну десятую периода обращения Земли, т.е. 8640 с. Нам надо найти a – большую полуось эллипса орбиты. Согласно третьему закону Кеплера, отношение квадратов периодов обращения равно отношению кубов больших полуосей орбит. Значит, если мы при вычислениях заменим эллиптическую орбиту спутника на круговую (радиус круга равен большой полуоси нашей орбиты), то период обращения не изменится. Итак, можно работать с круговой орбитой. Так как $R^3\omega^2 = GM = \mu$ (здесь G - гравитационная постоянная, M – масса Земли, а их произведение обозначено $\mu \approx 4 \cdot 10^{14}$ - гравитационный параметр), то $R^3 = \frac{\mu T^2}{4\pi^2}$. Отсюда $a \approx 9100$ км. На самом деле, учитывая погрешности в данных (нам даны целые градусы, значит, округление составляет до $0{,}5^o$), получаем $a \in [8900; 9500]$ км. Во втором варианте за время витка Земля повернулась на $396 + 360 = 756^o$, т.е. период обращения спутника равен $T = 50{,}4$ ч $= 181440$ с. Подставляя в ту же формулу, находим $a \approx 69350$ км (с той же погрешностью).

Попробуем найти эксцентриситет орбиты. Вытянутость орбиты вызывает неравномерность движения спутника (быстрое движение в перигее и медленное в апогее). В результате данные наблюдений (по условию, они проводились через равные промежутки времени) будут неравномерно расположены вдоль проекции спутника. Видим, что при первом пересечении экватора проекцией спутника данные «идут часто», а при втором – «редко», т.е. именно здесь спутник проходил апогей и перигей своей орбиты. Для низкой нисходящей орбиты угловая скорость проекции равна сумме угловой скорости спутника и угловой скорости Земли. Т.е. большая угловая скорость проекции соответствует перигею («редкие» данные), а меньшая – апогею. Для высокой восходящей орбиты угловая скорость долготы проекции равна разности угловой скорости Земли и угловой скорости долготы спутника. Тогда в перигее долгота проекции должна меняться медленнее, чем в апогее! При этом широта (а в окрестности экватора изменение широты проекции можно считать примерно линейной функцией) все равно должна меняться быстрее в перигее, чем в апогее. Видим, что у нас такого не наблюдается – при первом пересечении экватора медленно меняется и широта, и долгота; при втором пересечении – и широта, и долгота меняются быстро. Значит, вариант с высокой восходящей орбитой можно отбросить.

Согласно второму закону Кеплера, радиус-вектор, направленный из центра Земли на спутник, заметает за равные промежутки времени равные площади. Для малых промежутков времени траекторию можно приближенно считать круговой, т.е. $S = R^2 \cdot \omega \cdot \Delta t/2$. Тогда $\frac{R_{\text{апогея}}}{R_{\text{перигея}}} = \sqrt{\frac{\omega_{\text{перигея}}}{\omega_{\text{апогея}}}}$. Возьмем два измерения возле точки перигея и два измерения возле апогея и попробуем найти дробь в правой части. Поверхность Земли на коротких расстояниях можно приближенно считать плоской. В окрестности экватора сдвиги на один градус широты и на один градус долготы примерно равны. Тогда $\omega_{\text{апогея}} \approx \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ (в градусах). Аналогично, $\omega_{\text{перигея}} \approx \sqrt{394} \approx 19{,}75^o$. Для более точных выкладок можно использовать сферическую теорему Пифагора: $\omega_{\text{перигея}} = \arccos(\cos(13^o) \cdot \cos(15^o)) \approx 19{,}85^o$. Получаем $\frac{R_{\text{апогея}}}{R_{\text{перигея}}} \approx 3$, или для эксцентриситета орбиты имеем $\frac{1+e}{1-e} \approx 3$, т.е. $e \approx 0{,}5$. Наши выкладки, однако, очень неустойчивы к погрешностям данных. Учитывая, что градусы в данных даны с погрешностями в $0{,}5^o$, а высота орбиты тоже найдена приближенно, получим $\frac{R_{\text{апогея}}}{R_{\text{перигея}}} \in [2{,}26\,; 4{,}61]$ или $e \in [0{,}38\,; 0{,}64]$. Учтем еще, что мы действовали в рамках линейного приближения и не учитывали вращение Земли (оно вносит поправку в изменение долготы порядка 10% - отношение угловой скорости Земли к средней угловой скорости спутника). Таким образом, реально можем только оценить $e \in (0{,}3\,; 0{,}7)$. Эту оценку можно уточнить из других соображений. Заметим, что минимальная высота в перигее не может быть меньше 120 км – иначе спутник сгорит в атмосфере, т.е. $R_{\text{перигея}} \geq 6500$. Так как $R_{\text{апогея}} + R_{\text{перигея}} = 2a$, то $R_{\text{апогея}} \leq 2a - 6480 \leq 19000 - 6500 = 12500$ км, а $e \leq 0{,}32$.

Ответ: а) наклон орбиты 60°, б) большая полуось орбиты равна примерно 9500 км, в) высота в перигее порядка 120 км, высота в апогее порядка 12500 км.

Задача 6. Решение. Варианты действий:

– установить связь через другой спутник, находящийся на более высокой орбите. Сложно реализовать в силу технических сложностей: каждый спутник работает на своей частоте связи;

– установить связь с помощью отраженного от Луны сигнала. Сложно реализовать, так как спутник автоматически отфильтровывает как «шум» все слабые сигналы;

– дождаться пока сядут аккумуляторы, после чего спутник перестанет поддерживать свою ориентацию на орбите. Двигаясь без вращения относительно неподвижной системы координат, спутник будет вращаться относительно системы координат, связанной с центром Земли. А именно, за половину витка спутник будет совершать поворот на 180 градусов (антенна будет направлена к Земле). В задаче описывается реальная ситуация – именно так и поступил центр управления полетами. Сразу после выведения, когда проблема была обнаружена, центр управления вначале «нашел» спутник на орбите (при выведении любого космического аппарата параметры орбиты известны только приблизительно, затем они уточняются). Параметры орбиты были точно замерены, и появилась возможность «следить» за спутником. Был проведен примерный расчет – когда сядут аккумуляторы. Заранее была подготовлена «перепрошивка» программного обеспечения. Когда прошло расчетное время, центр начал периодически посылать на спутник направленный сигнал. Связь со спутником была установлена, после чего его ориентация была исправлена. Спутник до сих пор работает на орбите.

8 – 9 классы

Заочный тур

Задача 1. Решение. При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью и финальной скоростью V имеем для ускорения $a = \frac{2V^2}{S}$. Снаряд должен покинуть орбиту Земли, т.е. должен приобрести скорость, как минимум, вторую космическую. Отсюда $V = 11200$ м/с, $a = 1254400$м/с^2. Отсюда перегрузка равна $\frac{a+g}{g} = 128001$ (добавили ускорение свободного падения, так как ствол установлен вертикально.

Ответ: 128001.

Задача 2. Решение. Надо найти за какое время Марс пройдет свой диаметр, двигаясь по орбите. Диаметр Марса $d = 6779$ км, а его средняя орбитальная скорость 24,13 км/с. Однако нам нужно найти его скорость относительно земного наблюдателя. Средняя орбитальная скорость Земли 29,77 км/с, причем вращение Земли и Марса происходит примерно в одной плоскости и в одном направлении. Тогда относительная скорость равна $v = 5{,}64$ км/с, а искомое время $t = \frac{d}{v} \approx 1202$с. Надо сказать, что орбитальные скорости Земли и Марса меняются (планеты имеют эллиптические орбиты). Учитывая это, наш ответ является «средним». Возможны отклонения до 100 секунд.
Ответ: 1202 с.

Задача 3. Решение. Упрощаем – получаем выражение $(x + y)^3 = 8254655261$.
Ответ: 8254655261.

Задача 4.Решение. Площади двух треугольников с одинаковым углом относятся как произведение отношений сторон, прилежащих к углу. Тогда $S_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = 9$, $S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = 4$, $S_{CEF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = 4$, $S_{DEF} = 24 - 9 - 4 - 4 = 7$.
Ответ: 7.

Задача 5. Решение. Поскольку задано изменение импульсов спутников за одинаковые доли периодов их обращений, массы спутников равны и взаимодействием спутников друг с другом можно пренебречь, то отношение изменений импульсов равно отношению модулей их скоростей, т.е. $\frac{v_1}{v_2} = n$. По условию задачи центростремительное ускорение каждого из спутников обусловлено только действием гравитационных сил со стороны планеты. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения: $\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$, где m – масса спутника, R – радиус его орбиты, G – гравитационная постоянная, а M – масса планеты. Отсюда следует, что $v_1^2 R_1 = v_2^2 R_2 = GM$. Поэтому $k = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{1}{n^2}$.
Ответ: $k = \frac{1}{n^2}$.

Задача 6. Решение. Скорость вездехода в каждый момент времени направлена под углом 30 градусов к параллели, т.е. при проекции на меридиан получим скорость $v_y = v \cdot \sin 30^o = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ см/с. Расстояние до полюса равно дуге с углом $90^o - 60^o = 30^o$ окружности радиуса $R = 1737$ км (радиус Луны). Переводя в радианы, получаем длину дуги $R\alpha \approx 909{,}5$ км. Тогда время пути $t = \frac{909500}{0{,}05}$. Тогда пройденный путь $S = vt = 2R\alpha \approx 1819$ км.
Ответ: 1819 км.

Задача 7. Решение. Пусть производительность каждого пекаря равна v_j. Тогда каждый из них сделал часть работы $A_j = v_j t_j$, причем $A_1 + \cdots + A_{100} = 1$. По условию, для каждого пекаря имеем $t_j(v_1 + \cdots + v_{100} - v_j) = \frac{k}{n}$. Добавляя сюда слагаемое A_j и сложив все 100 этих равенств, получим в левой части суммарное время T, умноженное на суммарную производительность, а справа получим $100 \cdot \frac{k}{n} + 1$. Второе условие задачи дает нам $8(v_1 + \cdots + v_{100}) = 1$. Выражая отсюда суммарную производительность, получим:$T = 8\left(100 \cdot \frac{k}{n} + 1\right) = 800\frac{k}{n} + 8$.
Ответ: $T = 800\frac{k}{n} + 8$.

Задача 8. Решение. Программа на языке Python:

```
n = int(input())
a = 1
for i in range(1,n):
    a += int(''.join(reversed(str(a))))
#перевели число в строку, прочли ее справа налево, пере-
вели обратно в число и добавили
list = []
while a>0:
    list.append(a % 10)
    a = a // 10
#перевели число в список цифр этого числа
list = sorted(list)
a = 0
for j, v in enumerate(list):
    a += v * 10 ** j
#отсортировали список и перевели его обратно в число
print(a)
```

Очный тур

Задача 1. Решение. Подставим $t = 5, t = -4$ в заданное уравнение на f(t) и получим систему линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(5) + 5f(-4) = \dfrac{2}{7} \\ f(-4) - 4f(5) = \dfrac{-1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(5) = \dfrac{1}{21} \\ f(-4) = \dfrac{1}{21} \end{cases}$$

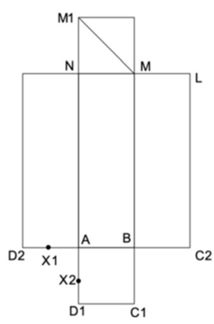
Ответ: $f(5) = \frac{1}{21}$.

Задача 2. Решение.Из определения второй космической скорости и из закона сохранения механическойэнергии следует, что $\frac{mv_{2k}^2}{2} = \Delta E_{\Pi}$, где m – масса тела, ΔE_{Π} – приращение потенциальной энергии тела при перемещении его с поверхности Земли в бесконечно удаленную точку. Если начальная скорость тела равна $u > v_{2k}$, то $\frac{mu^2}{2} = \Delta E_{\text{п}} + \frac{mv_{\infty}^2}{2}$. Из записанных равенств получаем, что $v_{\infty} = \sqrt{u^2 - v_{2k}^2}$.
Ответ:$v_{\infty} = \sqrt{u^2 - v_{2k}^2} \approx 4{,}84$ км/с.

Задача 3. Решение. Одно из возможных решений на языке Python:

```
l = input("Введите строку без пробелов:")
if
(l.find("101")!=—1)or(l.find("1001")!=—1)or(l.find("10001")!=—1)
:
    print('Yes')
else:
    print('No')
```

Задача 4. Решение. Заметим, что в силу симметрии станции, можно считать, что путь проходит только по верхней поверхности станции. Обозначим дополнительно оставшиеся вершины центрального куба M_1 и L_1. Любой путь их X в Y пересекает плоскость (MLM_1). Тогда в силу симметрии станции очевидно, что оптимальный путь симметричен относительно плоскости (MLM_1). Таким образом осталось найти кратчайший путь от точки X



до сечения (MLM_1L_1по верхней поверхности станции. Сделаем развертку на верхнюю плоскость, сделав разрез по AD и BC:

Таким образом, точке X на развертке соответствуют точки X_1 и X_2. Остается найти кратчайший путь от этих точек до ломаной M_1ML, что соответствует пути по поверхности до сечения MLM_1L_1, а весь искомый путь будет состоять из двух таких симметричных путей. Рассмотрим путь, выходящий из X_1. Угол $\angle M_1MX_1$ тупой, значит перпендикуляр из точки X_1 падает на продолжение MM_1 за точку M, и значит ближайшая к X_1 точка на отрезке – точка M. Аналогично $\angle LMX_1$ – тупой, значит M и ближайшая точка к X_1 на отрезке ML, а значит и на всей ломаной. $X_1M = \sqrt{73}/2$, а весь путь будет иметь длину $\sqrt{73}$. Аналогично можно проверить, что M также ближайшая точка ломанной и для точки X_2. Находим $X_2M = \sqrt{85}/2$, а весь путь будет иметь длину $\sqrt{85}$. Таким образом выбираем кратчайший путь на развертке X_1M (итоговый путь получается его симметричным отражением относительно MM_1).

Задача 5. Решение. Пусть ЭДС источника тока равна $\mathcal{E}$. Общее сопротивление равно $r + R$. По закону Ома сила тока равна $I = \frac{\mathcal{E}}{r+R}$, а напряжение в цепи $U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{r+R}$.В таком случае мощность нагревателя $P = I\text{U} = \frac{\mathcal{E}^2R}{(r+R)^2}$. Чтобы время нагрева при замене элемента не поменялось, R' должно быть решением уравнения $P(R') = P(R)$. Решая уравнение находим, что $R' = \frac{r^2}{R} < r$ – удовлетворяет условию.

Ответ: да,это возможно, $R' = \frac{r^2}{R}$

Задача 6. Решение. Ось вращения Урана лежит очень близко к плоскости его орбиты (то есть, планета фактически вращается «лежа на боку»), при этом направление этой оси в пространстве остается постоянным. Таким образом, Уран в ходе своего орбитального движения может быть ориентирован в сторону Солнца одним из своих полюсов, экватором, либо любой параллелью между экватором или полюсом. Год на Уране многократно больше как периода осевого вращения планеты, так и периодов обращения всех его спутников вокруг планеты. Поэтому в ходе одного или нескольких оборотов спутника вокруг планеты характер смены его фаз почти не будет меняться. В то же время в разных частях орбиты Урана при движении вокруг Солнца этот характер будет меняться весьма сильно. Так как плоскость орбиты Титании близка к экваториальной плоскости Урана, то:

- когда ось вращения Урана близка к направлению на Солнце, то смены фаз практически не будет, наблюдатель будет со стороны планеты видеть фазу, близкую к четверти в любой точке орбиты спутника,
- когда Уран ориентирован на Солнце экватором или близкой к экватору области, то может наблюдаться полная смена фаз и даже могут иметь место частичные затмения Солнца спутником и полные и длительные затмения спутника планетой,
- когда Уран ориентирован на Солнце параллелью с широтой, существенно отличающейся от экватора или полюса, то будет иметь место промежуточное состояние, а именно, частичная смена фаз будет иметь место, но не будет ни фазы «полнотитании» (аналога полнолуния), ни фаз «новотитании» (аналога новолуния).

Изменение фаз поддается количественному подсчету, но в данной задаче не требуется, необходимо качественное понимание того, что в силу конфигурации плоскости орбиты спутника, плоскостей орбиты и экватора планеты характер смены фаз спутника будет меняться в течение уранианского года.

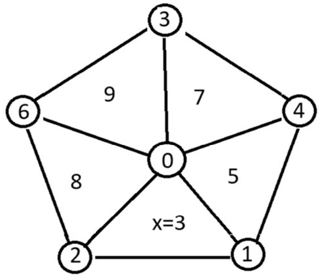
5 – 7 классы

Заочный тур

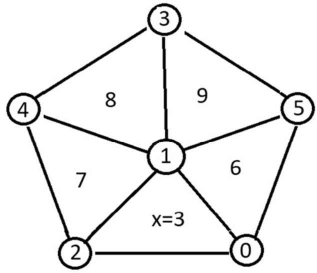
Задача 1. Решение. Скорпион – зодиакальное созвездие, т.е. при наблюдении с Земли созвездие Скорпиона пересекается плоскостью эклиптики. Поэтому существует период в течение года, когда в этом созвездии находится Солнце, а значит наблюдение с помощью фотометра, состоящего из ПЗС-матриц (именно таким является данный телескоп) невозможно.

Ответ: Нет.

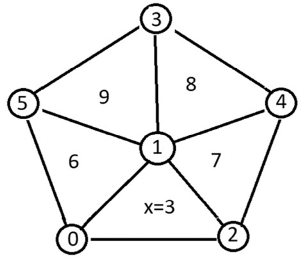
Задача 2. Решение. Меньше 3 число x быть не может (оно есть сумма трех различных цифр, а самые маленькие три цифры – это 0, 1 и 2).



Пусть $x = 0 + 1 + 2 = 3$. Предположим, что $f = 0$, тогда либо $e = 1, d = 2,$ либо наоборот. Рассмотрим первый случай. Заметим, что цифры $7, 8, 9$ обязаны стоять внутри пятиугольника – иначе они будут участвовать в двух суммах (с соседом слева и соседом справа), хотя бы один из этих соседей ≥ 3 и тогда сумма не является цифрой. Итак, число 8 стоит в одном из треугольников. Тогда оно должно быть суммой двух своих соседей (т.к. внутри стоит 0). Возможно два варианта $8 = 2 + 6 = 3 + 5$. Рассмотрим первый вариант. Тогда положение цифры 6 определено. Соседствовать с ней может только 3. Соседствовать с 3 может (из оставшихся 4 и 5) только 4, и мы получаем правильный ответ. Если же $8 = 3 + 5$, то разложим в сумму девятку: $9 = 1 + 8 = 2 + 7$ нельзя (цифры 7 и 8 должны стоять внутри). Тогда либо $9 = 3 + 6$, либо $9 = 4 + 5$. В первом случае получаем на границе комбинацию 6, 3, 5 (именно в таком порядке, т.к. 6 и 5 не рядом). По часовой стрелке так ставить цифры нельзя, т.к. $6 + 1 = 5 + 2$. Против часовой тоже нельзя, т.к. $6 + 2 = 3 + 5$. Значит, остается случай, когда на границе стоят 3, 4 и 5 (причем 4 и 5 рядом).



Тройка не может стоять рядом с 1 или 2, т.к. $3 + 1 = 4, 3 + 2 = 5$ (а эти цифры уже заняты). Значит 3 стоит посередине – противоречие. Мы полностью отвергли вариант $8 = 3 + 5$, т.е. полностью разобрали случай $f = 0, e = 1$, $d = 2$. Случай $f = 0, e = 2, d = 1$ полностью симметричен и дает второй возможный ответ.

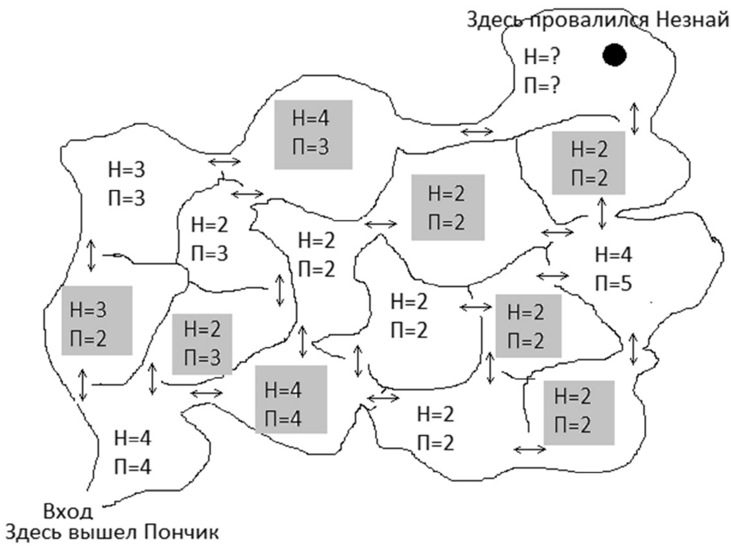


Предположим, что $f = 1$, тогда либо $e = 2, d = 0,$ либо наоборот. Рассмотрим первый случай. Заметим, что цифры 9, 8, 7 и 6 обязаны стоять

внутри. Действительно, если одно из этих чисел стоит на границе, то наименьшим возможным его соседом является 3, а уже $6 + 3 + f$ не является цифрой. По той же причине число 5 на границе стоит рядом с 3 и не рядом с 4. Получаем два варианта расстановки: 5, 3, 4 (по часовой стрелке) или 4, 3, 5. Первый вариант не подходит, т.к. $5 + 2 + 1 = 3 + 4 + 1$, а второй подходит и дает третий ответ. Случай $e = 0, d = 2$ полностью симметричен и дает четвертый ответ.
Наконец, случай $f = 2$ невозможен, т.к. теперь уже 9, 8, 7, 6 и 5 должны стоять внутри, где всего четыре места.

Ответ: 4,3,6,2,1,0,7,9,5,8,3;
6,3,4,1,2,0,9,7,8,5,3;
4,3,5,0,2,1,8,9,7,6,3;
5,3,4,2,0,1,9,8,6,7,3. В любом случае, $x = 3$.

Задача 3. Решение. Раскрасим все пещеры в белый и черный цвет. Лабиринт устроен так, что из «белой» пещеры можно перейти только в «черную» и наоборот. Незнайка и Пончик вошли в «белую» пещеру.



Каждый из них вышел так же из «белой» пещеры. Значит, в сумме в «белых» пещерах каждый из них был ровно на один раз больше, чем суммарно в «черных». Для Незнайки сумма по известным «белым» пещерам равна 19, а по «черным» 21. Тогда ответ для Незнайки 3. Аналогично, для Пончика суммы равны 21 и 20 соответственно, т.е. для него ответ 0. Доказывать, что указанная на рисунке ситуация возможно (для этого надо придумать хотя бы один подходящий маршрут для Незнайки и хотя бы один для Пончика) не обязательно – в условии задачи существование такого маршрута гарантировано.

Ответ: Н=3, П=0.

Задача 4. Решение. По условию, мы должны уметь ликвидировать вес предметов и частично, и полностью. Значит, должны уметь создавать любое расстояние из диапазона $[50, 150]$ между лунитом и железняком. Аналогично, нужно уметь создавать любое расстояние из диапазона $[50, 100]$ между антилунитом и системой {лунит, железняк}. Взяв первое расстояние равным 150, а второе 100, получим минимально возможный размер прибора 250 см. Такой прибор, очевидно, возможен – установим, например, лунит слева от железняка, а антилунит справа.

Ответ: 250 см.

Задача 5. Решение. Скорость снаряда внутри ствола меняется равномерно от нуля до 11200 м/с. Значит, для вычисления длины пути по формуле $S = Vt$ можно воспользоваться средней скоростью $V = 5600$ м/с. Отсюда $t = \frac{50}{5600} \approx 0{,}00893$ с. За это время снаряд должен увеличить скорость от нуля до 11200 м/с, т.е. ускорение равно $a = \frac{11200}{0{,}00893} \approx 1254400$ м/с^2. Разделим на g и учтем, что пушка направлена вертикально (добавим еще одно g) получим ответ: перегрузка равна 128001.

Ответ: 128001.

Задача 6. Решение. Самое меньшее число получается, когда все остатки от деления минимальны (то есть, равны нулю). Самое большое число получается, когда все остатки от деления максимальны (то есть, остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 4).

Пример программы на Python 3

```
K = int(input())
Min = K*4*3*2
Max = ((K*4+3)*3+2)*2+1
for i in range(Min,Max+1):
    print(i,end=' ')
```

Очный тур

Задача 1. Решение. 1 Пье=40 см=0,4 м=0,0004 км. 1 Пи=100 с=100/3600 часа=1/36 часа. 1 Пуа=400 г=0,4 кг. Тогда
$40\,000\,\frac{\text{Пье}}{\text{Пи}} = 40000 \cdot 0{,}0004 \cdot 36\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 576\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
Далее, 12 Пуа на 100000 Пье $= 12 \cdot 0{,}4$ кг на $100000 \cdot 0{,}0004$ км $=$ $4{,}8$ кг на 40 км. Тогда на 100 км пробега будет $4{,}8 \cdot \frac{100}{40}$ кг $= 12$ кг.

Ответ: 576 км/ч, 12 кг.

Задача 2. Решение. Длина полуокружности $C = \pi R$ соответствует изменению широты на 180 градусов. Тогда длина дуги меридиана для одной минуты равна $\frac{\pi R}{180 \cdot 60} = 1852$ м $= 1{,}852$ км.
Отсюда $R = 1{,}852 \cdot 180 \cdot \frac{60}{3{,}15} = 6350$ км (с точностью до целых). Если взять число пи более точно, то получим $R = 6360$.

Ответ:6350 км.

Задача 3. Решение. Если число четно, то его квадрат тоже четен. Если число нечетно, то его квадрат тоже нечетен. Значит, складывая число с его квадратом, всегда получим четное число. Складывая несколько таким чисел, получим общую сумму – она четна.

Ответ: всегда четным.

Задача 4. Решение. Предположим, среди стоящих есть зеленый. Кто может стоять слева от него? Если красный, то красный скажет зеленому правду: «я красный» - противоречие. Если синий, то он скажет зеленому неправду, т.е. не скажет «я синий» – противоречие. Если зеленый, то он скажет зеленому правду: «я зеленый» - вновь противоречие. Значит, зеленых среди стоящих нет. С другой стороны, описываемая ситуация возможна. Например, если в круге стоят только синие, то они скажут друг другу правду, т.е. все скажут «я синий», что соответствует условию.

Ответ: ноль.

Задача 5. Решение. а) Рассмотрим набор 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Никакие три палочки из такого набора не образуют треугольник, так как длина наибольшей из каждой тройки палочек больше суммы двух других длин.

б) Занумеруем палочки по возрастанию длин. Пусть длина первой палочки равна x, а второй равна y. Чтобы третья не образовала с первыми двумя треугольник, необходимо, чтобы ее длина была $x + y$ или больше. Аналогично, длина четвертой $\geq x + 2y$. Длина пятой $\geq 2x + 3y$, длина шестой $\geq 3x + 5y$, длина седьмой $\geq 5x + 8y$, длина восьмой $\geq 8x + 13y$, длина девятой $\geq 13x + 21y$, длина десятой $\geq 21x + 34y$. Даже для минимально возможных $x = 1$, $y = 2$ эта длина ≥ 89, что противоречит условию.

Ответ: а) нет, не всегда; б) да, всегда.

Задача 6. Решение. Скорость движения Нептуна по орбите относительно Солнца будет равна длине окружности орбиты, деленной на орбитальный период планеты. То есть,

$$v_N = \frac{2\pi a_N}{P_N} = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 150\,000\,000}{60190 \cdot 86400} \approx 5{,}44\,\frac{\text{км}}{\text{с}},$$

где a_N – радиус орбиты Нептуна в километрах, а P_N – его орбитальный период в секундах. Скорость движения Земли по орбите относительно Солнца составляет приблизительно

$$v_G = \frac{2\pi a_G}{P_G} = \frac{2\pi \cdot 150\,000\,000}{365{,}25 \cdot 86400} \approx 29{,}87\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Земля и Нептун двигаются по своим орбитам в одном и том же направлении, Земля обгоняет Нептун примерно на 24,4 км/с, это и есть скорость, с которой Нептун движется относительно земного наблюдателя.

Ответ: 24,43 км/с.

Учебное издание

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ «ЛОМОНОСОВ» ПО ПРОФИЛЮ «КОСМОНАВТИКА» 2017–2022 гг.

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Верстка: *Н. С. Давыдова*
Обложка: *М. А. Еронина*

Подписано в печать 04.05.2023 г.
Формат 60x84 1/16 Тираж 50 экз.
Объем 16,0 усл. п.л. Изд. № 062.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н