Лекция 1. Первое знакомство

Прослушав курс обыкновенных дифференциальных уравнений, вы уже поняли, что процессы, протекающие во времени, можно моделировать функцией $u(t)$. Описание процесса приводит при этом к тому, что для этой функции составляется уравнение, содержащее производные или интегралы — дифференциальное или интегральное (или даже смешанное, интегрально–дифференциальное) уравнение. Бывает и так, что функция зависит не от времени, а от точки на прямой, т.е. $u = u(x)$. Описание математической модели объекта при этом также может выразиться в составлении дифференциального или функционального (или даже функционально–дифференциального) уравнения.

Но вот, вам потребовалось описать движение газового потока в трубе. Как его смоделировать? Можно представить себе функцию плотности газа. Можно представить себе поле скоростей частиц в каждой точке трубы. Если считать, что диаметр трубы мал по сравнению, с продольной длиной, то и в первом, и во втором случае, приходим к функции, зависящей от одной пространственной переменной x. Если течение динамически меняется, то появляется еще и зависимость от времени. Получаем уравнение а функцию двух переменных. Как мы узнаем, оно может выглядеть по–разному (это зависит от нашей модели жидкости — сжимаемая она или нет, вязкая или нет, есть вихри или нет, меняется ее температура или нет, прилипает она к стенкам трубы или нет и т.д.). Например, можно получить простейшее уравнение переноса

$$u_t + v(x,t)u_x = 0,$$

где $v(x,t)$ задана. Или более сложное уравнение переноса

$$u_t + (v(x,t)u)_x = 0.$$

Или уравнение Хопфа

$$u_t + u \cdot u_x = 0.$$

В любом случае, получаются уравнения в частных производных. Вот их мы и будем изучать.

Итак, мы знакомимся с новым объектом. Точнее с целым классом объектов (уравнения с частными производными). Самое главное в начале — правильная дефиниция изучаемого объекта. Что мы изучаем? Ответ будет неутешителен: класс уравнений слишком огромен, чтобы дать его описание. Нужно больше конкретики. Так, например, свойство уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ кардинально отличаются от свойств уравнения $u_{xx} = -u_{yy}$ (а мы всего лишь сменили знак)! Однако кое–что общее все–таки сказать можно.

Первое. Объект сложный, решить уравнения в частных производных в общем виде удается редко. Нужно быть готовым к тому, что в результате нашей работы, получится не само решение, а алгоритм его поиска или неявное описание этого решения (например, описание свойств решения).

Второе. Уравнение нельзя изучать само по себе. Для получения правильной модели нужны (всегда!) дополнительные условия. Вы уже заметили это, изучая обыкновенные дифференциальные уравнения — для получения окончательного решения кроме уравнения нужны начальные условия. Там это был набор чисел. Здесь (переменных стало много!)

— это набор функций. Кроме того, появляется новый объект — кроме начальых условий еужы еще и граничные условия. Действительно, как можно изучать, например, нагревание стержня, если мы не знаем, что происходит на его концах — тепло «утекает» из нашей системы или нет. Одно дело изчать колебания струны, концы которой закреплены, а совсем другое дело, если за этот конец кто–то дергает. И так далее.

Третье. Уравнение с начальными и граничными условиями нельзя изучать в отрыве от реальной физической задачи. Ведь каждое уравнение — только приближенное описание физического процесса. Увлекшись уравнением, мы можем выйти за границы применимости физической модели и начать изучать «сферического коня в вакууме». Грамотный исследователь должен иметь в голове целый каскад моделей для одного и того же процесса (вот у меня есть уравнение, оно сложное, но если вот эту величину считать постоянной, то получится другое, более простое уравнение; если же наоборот, надо учесть вот такой новый эффект, то к уравнению добавиться вот такое новое слагаемое и т.д.).[1] При этом в уравнении могут появляться не только производные, но и интегралы, т.е. уравнение может стать интегро–дифференциальным. А могут появиться запаздывания по времени, т.е. уравнение станет функционально–дифференциально–интегральным.

Четвертое. Раз явный вид решения получается редко, значит надо быть готовым к численному моделированию задачи. А такое моделирование обязательно состоит в замене «бесконечного» объекта «конечным» (не функция, а ее приближение, например, рядом Фурье, причем в ответ пойдет частичная сумма — ведь мы не можем просуммировать бескоечное число слагаемых). А значит, нам нужны не только теоремы о существовании и единственности решения, но и теоремы об «устойчивости решения» — при малых изменениях начальных и граничных функций, решение меняется мало. Но тогда надо сначала договориться, что такое малое изменение функции. Например, функции $f(x) \equiv 0$ и $g(x) = 0.01\sin(100x)$ на отрезке $x \in [0, \pi]$, вроде бы, близки. Но производные их, вроде бы не близки. Это как понимать?

Видно, что трудностей слишком много — нельзя их «валить в одну корзину». Сложные задачи надо решать маленькими шагами. Вопросы четвертого пункта отложим до следующего года и займемся ими в курсе функционального анализа. Вопросы третьего пункта отложим до следующего года и займемся ими в курсе математического моделирования. А в этом курсе займемся основными уравнениями, на примере которых освоим наиболее часто встречающиеся алгоритмы их решения.

Начнем с того, что договоримся изучать в этом курсе только «чистые» дифференциальные уравнения — никаких интегральных добавок или запаздывания аргументов. Далее, договоримся о терминологии — если какая–то переменная в уравнении участвует, но дифференцирование по этой переменной не проводится, то будем эту переменную называть параметром задачи, а не переменной. Время договоримся всегда обозначать t, пространственные переменные x, y и z, функции u, v и w.

Теперь попробуем классифицировать уравнения. Если t не является переменной, то уравнение описывает какой–то объект и называется *стационарным.* Если переменная t в уравнение входит, то уравнение описывает какой–то процесс и называется *динамическим.* Если уравнение линейно по функции u, то так его и назовем *линейным*, а иначе *нели-*

[1] «Ученый, который хочет изучать математическую задачу в отрыве от физической постановки, подобен крестьянину, который стерилизует свою корову, чтобы оградить ее от быков». П. Л. Чебышев

нейным. Число пространственных переменных дает размерность уравнения. Наивысший порядок производной дает порядок уравнения. Потренируемся.

Уравнение $u_t = -A(x)u_x + D(x)u_{xx}$ Фоккера–Планка (описывает броуновское движение и другие случайные блуждания частиц). Это линейное динамическое одномерное уравнение 2 порядка.
Уравнение $u_t = a(u_{xx} + u_{yy})$ теплопроводности (описывает распределение тепла и другие процессы диффузии).
Уравнение $u_t + a(x,t)u_x = 0$ переноса (описывает движение газа или жидкости в трубе).
Уравнение $u_t + u \cdot u_x = 0$ Хопфа также описывает движение газа, но допускает существование ударных фронтов.
Уравнение $(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 = C$ эйконала описывает распространение луча света в нелинейной оптике.
Уравнение $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ Лапласа описывает установившееся течение жидкости, электростатическое поле (и не только).
Уравнение $u_{tt} = a(u_{xx} + u_{yy})$ описывает колебания тонкой мембраны.
Уравнение $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ Бюргерса описывает движение вязкой жидкости с ударнными фронтами.
Уравнение $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ Кортевега — де–Фриза описывает движение жидкости в мелком канале.
Уравнение $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + k^2u = 0$ Гельмгольца описывает распространение волн с постоянной частотой в пространстве.

Спрашивается, какая польза от нашей классификации? Ответ такой — бывают случаи, когда уравнения в частных производных решаются явно, но это, скорее исключение, чем правило. Если такого не произошло, то уравнение требует детального исследования и это исследование следует вести по–разному, в зависимости от класса уравнения. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений тоже встречались линейные, но там это был один из многих типов. Здесь ситуация другая, теория линейных и нелинейных уравнений — это два разных мира.

В «линейном мире» есть общие законы. Если перед нами линейное стационарное уравнение, значит мы изучаем задачу абстрактного вида $Au = f$, где A — заданный линейный оператор, f — заданная функция, а краевые условия задают область определения оператора A. Конечно, операторы могут самые разные (они будут содержать производные по пространственным переменным), но у всех у них есть область определения, ядро, образ, и обратный оператор. Еще очень важны собственные значения, собственные векторы. В общем, примерно ясно, куда двигаться.

Пример 1. *Найдите решение уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 0$ на функцию $u(x,y,z)$, определенную на кубе $\mathcal{D} = \{0 \le x\, y\, z \le 1\}$ с граничными условиями $u(x,y,z) \equiv 1$ на гранях куба.*

Решение. Положим $v(x,y,z) = u(x,y,z)-1$, тогда $v_{xx}+v_{yy}+v_{zz} = 0$, а на гранях куба $v \equiv 0$. В пространстве квадратично суммируемых на $\mathcal{D}$ функций введем скалярное произведение

$$(f,g) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)\overline{g}(x,y,z)\, dxdydz.$$

В этом скалярном произведении оператор $L: v \mapsto v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}$ с нулевыми граничными условиями отрицателен, т.к.

$$(Lv,v)=\int_0^1 v_{xx}\overline{v}\,dxdydz+\int_0^1 v_{yy}\overline{v}\,dxdydz+\int_0^1 v_{zz}\overline{v}\,dxdydz=$$
$$=v_x\overline{v}\big|_0^1-\int_0^1 |v_x|^2\,dx+v_y\overline{v}\big|_0^1-\int_0^1 |v_y|^2\,dy+v_z\overline{v}\big|_0^1-\int_0^1 |v_z|^2\,dz<0$$

(равенство нулю достигается только для констант, но константа, равная нулю на грнаице куба — это нулевая константа). Значит, оператор не имеет ядра, $v(x,y,z)\equiv 0$, $u(x,y,z)\equiv 1$. $\square$

Если перед нами линейное динамическое уравнение, содержащее только первую производную u_t, причем она выделена, то мы изучаем абстрактную задачу вида $u_t = Au+f(x,t)$, где A — заданный линейный оператор, f — заданная функция. Тогда ключевую роль будет играть экспонента, построенная по оператору A, т.е. решение вида $u(t)=\exp\{At\}u_0$, где u_0 — начальная функция. Если динамическое уравнение имеет вид $u_{tt}=Au+f(x,t)$, то опять нужно изучать экспоненту, но построенную уже по корню из оператора $u(t)=\exp\{\pm\sqrt{A}t\}u_0$. В любом случае, получаем задачу об изучении линейного оператора на некотором пространстве функций.

«Нелинейный мир» совсем другой. Здесь каждое уравнение индивидуально, имеет свой характер. Однако что–то общее можно сказать и здесь. Изученние такого уравнения надо начинать с поиска группы симметрий. Она (группа) поможет строить частные решения и, возможно, подскажет замену переменных, после которой уравнение упростится.

Однако, пора переходить от общих слов к делу. Пусть, например, функция $u=u(x,y)$ зависит от двух пространственных переменных. Рассмотрим простейшее уравнение

$$u_x(x,y)=0.$$

Его решить легко. Поскольку y в дифференцировании не участвует, его можно считать параметром задачи. При фиксированном значении y получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого константа, т.е. величина, не зависящая от x. Отпуская y на свободу, получаем общий ответ $u(x,y)=C(y)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что любая такая функция уравнению удовлетворяет, т.е. мы нашли общее решение.

Обратите внимание (это общий факт), что решение уравнения в частных производных выражается не через произвольные константы, как для обыкновенных уравнений, а через *произвольные функции*.

Понятно, что если у нас функция зависит от трех переменных, т.е. $u=u(x,y,z)$, то решением уравнения $u_x=0$ будет произвольная функция вида $u(x,y,z)=C(y,z)$. Понятно, также, что если у нас уравнение более сложное, но содержит дифференцирование только по одной переменной, то перед нами обыкновенное дифференциальное уравнение. Просто константы в его общем решении будут зависеть от других переменных (точнее, параметров задачи).

Пример 2. *Пусть $u=u(x,t)$, $t\in[0,+\infty)$, $x\in[0,1]$. Решим уравнение $u_{tt}+u_t=1$ с начальным условием $u(x,0)=x$.*

Решение. Фиксируем x — получим обыкновенное дифференциальное уравнение $u_{tt} + u_t = 1$. Частное решение подбирается легко: $u(t) = t$. Для решения однородного уравнения пишем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0$, т.е. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Тогда общее решение имеет вид $u(t) = t + {}_1 + C_2 e^{-t}$. «Размораживаем» x, получаем $u(x,t) = t + C_1(x) + C_2(x)e^{-t}$.
Учитываем начальное условие $0+C_1(x)+C_2(x) = x$, т.е. $u(x,t) = t+xe^{-t}+C_1(x)(1-e^{-t})$. □

Итоговое решение содержит неопределенность (произвольную функцию $C_1(x)$), что неудивительно — поведение решения уравнения второго порядка требует двух начальных условий. Например, можно добавить условие $u_t(x,0) = \varphi(x)$.

Сформулируем основной вывод: **Если уравнение в частных производных удается привести к уравнению, в котором дифференцированние проводится только по одной переменной (а остальные переменные тогда оказываются параметрами задачи), то решить такое уравнение можно и нужно методами обыкновенных дифференциальных уравнений**.

А как можно сводить уравнения к такому виду? Ответ простой — подходящей заменой переменных и функции. Но как угадать эту замену? Помнить самые частые случаи, а если случай сложный, то либо найти в справочнике (возможно, найти что–то похожее и подправить под свой случай), либо уметь вывести самому. От последнего пути сразу откажемся — в общем случае он требует знания основ теории групп и алгебр Ли и умения строить группу симметрий для данного уравнения.

Пример 3. *Решите уравнение* $(x + y)u_x + (y - x)u_y = 0$, *сделав замену* $\xi = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\eta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Решение. Поскольку $u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x$, то

$$u_x = u_\xi\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2(1+y^2/x^2)}\right) + u_\eta\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2(1+y^2/x^2)}\right).$$

Аналогично, $u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y$, т.е.

$$u_y = u_\xi\left(\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{x(1+y^2/x^2)}\right) + u_\eta\left(\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x(1+y^2/x^2)}\right).$$

Тогда

$$(x+y)u_x+(y-x)u_y = \frac{x+y}{x^2+y^2}\left((x-y)u_\xi + (x+y)u_\eta\right)+\frac{y-x}{x^2+y^2}\left((x+y)u_\xi + (y-x)u_\eta\right) = 2u_\eta.$$

Получили простейшее уравнение $u_\eta(\xi,\eta) = 0$, откуда $u(\xi,\eta) = f(\xi)$.
Ответ: $u(x,y) = f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$, где f — произвольная функция. □

Пример 4. *Решите уравнение* $2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$, *сделав замену* $\xi = x + 2y$, $\eta = x - y$.

Решение. Сразу запишем производные $\xi_x = 1$, $\xi_y = 2$, $\eta_x = 1$, $\eta_y = -1$. Тогда

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$
$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = 2u_\xi - u_\eta.$$

Аналогично,

$$u_{xx} = u_{\xi x} + u_{\eta x} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x + u_{\xi\eta} \cdot \eta_x + u_{\eta\xi} \cdot \xi_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = u_{\xi y} + u_{\eta y} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot \eta_y + u_{\eta\xi} \cdot \xi_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = 2u_{\xi y} - u_{\eta y} = 2(u_{\xi\xi} \cdot \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot \eta_y) - (u_{\eta\xi} \cdot \xi_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y) = 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Подставляем все это в уравнение и после сокращений получаем

$$9u_{\xi\eta} + 3u_\xi = 0 \Longleftrightarrow (3u_\eta + u)'_\xi = 0 \Longleftrightarrow 3u_\eta + u = C_1(\eta).$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром ξ. Его общее решение находим стандартным способом

$$3\left(u \cdot e^{\eta/3}\right)'_\eta = C_1(\eta)e^{\eta/3} \Longleftrightarrow 3u \cdot e^{\eta/3} = \int C_1(\eta)e^{\eta/3}d\eta + C_2(\xi).$$

Поскольку функция C_1 произвольна, то и интеграл является произвольной функцией, т.е.

$$3u(\xi,\eta)e^{\eta/3} = C_3(\eta) + C_2(\xi) \Longleftrightarrow u(\xi,\eta) = f(\eta) + e^{-\eta/3}g(\xi),$$

где функции f и g произвольны.
Ответ: $u(x,y) = f(x-y) + g(x+2y)e^{\frac{y-x}{3}}$. □

Пример 5. *Решите уравнение* $u_x - u_t = \frac{1}{u}$, *сделав замену* $v = u^2$, $\xi = x - t$, $\eta = x + t$.

Решение. Имеем $u = v^{1/2}$, откуда

$$u_x = \frac{1}{2\sqrt{v}}(v_\xi + v_\eta), \qquad u_t = \frac{1}{2\sqrt{v}}(-v_\xi + v_\eta).$$

Подставляем в уравнение и получаем $v_\xi = 1$, т.е. $v(\xi,\eta) = \xi + C(\eta)$.
Ответ: $u(x,y) = \sqrt{x - t + C(x+t)}$. □

Здесь полезно вернуться к тексту первой половины лекции. Уберем в последнем примере правую часть. Получим простейшее уравнение $u_x = u_t$ и решение $u(x,t) = f(x+t)$, где функция f произвольна. Я говорил, что линейные уравнения вида $u_t = Au$ должны иметь решения вида $u(x,t) = \exp\{At\}u_0(x)$. Где же оно? Все в порядке, оно перед вами. Дело в том, что экспонента $\exp\{tD_x\}$, построенная по оператору дифференцирования, равна оператору сдвига $T: \ f(x) \mapsto f(x+t)$, что мы и получили. Чтобы это заметить достоточно сделать преобразование Фурье: $FD_xf = i\lambda\hat{f}(\lambda)$. Ясно, что экспонента от оператора умножения на функцию $i\lambda$ равна оператору умножения на экспоненту $e^{i\lambda t}$ (запишите ряд Тейлора для экспоненты). Остается сделать обратное преобразование Фурье $F^{-1}(e^{i\lambda t}\hat{f}(\lambda)) = f(x+t)$.

Упражнение 1. *Решите следующие уравнения, сделав указаные замены переменных.*

1. $yu_x - xu_y = 0$, $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$.

2. $xu_x + yu_y = u$, $\xi = x$, $\eta = y/x$.

3. $u_x + u_y + u_z = 0$, $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z - x$.

4. $x^2 u_x + y^2 u_y = u^2$, $\xi = x$, $\eta = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{u} - \frac{1}{x}$.

5. $xu_x + yu_y + zu_z = u + \frac{xy}{z}$, $\xi = x/z$, $\eta = y/z$, $\zeta = z$, $w = u/z$.

6. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

7. $u_{xx} - yu_{yy} = \frac{1}{2}u_y$, $\xi = x - 2\sqrt{y}$, $\eta = x + 2\sqrt{y}$.

8. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$, $\xi = xy$, $\eta = x/y$.

9. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = y/x$, $w = u/x$.

10. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Для должников дополнительно: решить уравнения, сделав указанные замены

11. $yu_x - xu_y = (y - x)u$, $\xi = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\eta = x^2 + y^2$;

12. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $w = xy - u$.

Лекция 2. Уравнения первого порядка (линейные и квазилинейные)

Определение 1. *Уравнение в частных производных на функцию $u(x, y)$ вида*

$$\alpha(x, y)u_x + \beta(x, y)u_y = f(x, y)$$

называется линейным уравнением первого порядка с правой частью.

Все такие уравнения решаются при помощи подходящей замены переменных. Начнем с простейшего случая, когда $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ константы. Достаточно вспомнить, что выражение $\alpha u_x + \beta u_y$ — это производная по направлению вектора (α, β) и все становится ясно. Прямая с таким направляющим вектором имеет параметрическую запись $x = \alpha s$, $y = \beta s$ или уравнение $\beta x = \alpha y$. Делаем замену $\xi = \beta x - \alpha y$, а вторую координату выбираем произвольно (например, $\eta = \alpha x + \beta y$, чтобы система координат осталась ортогональной). Тогда

$$\begin{cases} x = d^{-1}(\beta\xi + \alpha\eta), \\ y = d^{-1}(-\alpha\xi + \beta\eta). \end{cases} \quad \text{где } d = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$u_\eta = u_x \cdot x_\eta + u_y \cdot y_\eta = d^{-1}(\alpha u_x + \beta u_y) = d^{-1} f(x, y) = g(\xi, \eta).$$

Остается проинтегрировать по переменной η (обозначим результат интегрирования через $G(\xi, \eta)$): $u(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) + C(\xi)$. Возвращаемся к исходным переменным и получаем итоговый ответ. Абсолютно так же действуем для функции трех пространственных переменных (здесь произвольно выбираются вторая и третья координаты) или в случае, когда вместо одной пространственной переменной выступает время.

Пример 6. *Решим простейшее уравнение переноса на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$u_t + a\nabla u = 0 \iff u_t + a(u_x + u_y) = 0. \tag{1}$$

Решение. Видим, что выражение в левой части — это производная по направлению вектора $e_1 = (a, a, 1)$ в трехмерном пространстве (x, y, t). Два другие вектора выбираем из условия ортогональности. Например, легко подобрать вектор $e_2 = (1, -1, 0)$. Вектор $e_3 = (x, y, t)$ находим, решив систему

$$\begin{cases} 0 = e_1 \cdot e_3 = ax + ay + t, \\ 0 = e_2 \cdot e_3 = x - y, \end{cases}$$

т.е., с точностью до коэффициента $e_3 = (1, 1, -2a)$. Направим координатные оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ вдоль e_1, e_2 и e_3 соответственно. Как мы помним из аналитической геометрии, матрица обратного перехода составляется из координат векторов, записанных по столбцам. Тогда

$$\begin{cases} x = a\xi + \eta + \zeta, \\ y = a\xi - \eta + \zeta, \\ t = \xi \quad - 2a\zeta, \end{cases} \implies u_\xi = u_x \cdot x_\xi + u_y \cdot y_\xi + u_t \cdot t_\xi = au_x + au_y + u_t = 0.$$

Значит, $u(\xi,\eta,\zeta)=\varphi(\eta,\zeta)$, где функция ψ произвольна. Для записи ответа требуется еще найти матрицу обратной замены и выразить η и ζ через x, y и t. Немного подсчетов и

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\frac{1}{4a^2+2}\begin{pmatrix}2a & 2a & 2\\ 2a^2+1 & -2a^2-1 & 0\\ 1 & 1 & -2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ t\end{pmatrix}.$$

Ответ: $u(x,y,t)=\varphi\left(\frac{x-y}{2},\frac{x+y-2at}{4a^2+2}\right)$. Какой–то не очень красивый ответ. Попробуем его переосмыслить. Оси $O\eta$ и $o\zeta$ мы выбирали произвольно, лишь бы только была ортогональность оси $O\xi$. Значит, мы всегда можем переходить к их (невырожденным) линейным комбинациям, что не меняет ответа. После напряженного подбора придумываем замену $\eta'=\eta+(2a^2+1)\zeta$, $\zeta'=-\eta+(2a^2+1)\zeta$. Подставляя сюда выражения для η и ζ, получим $\eta'=x-at$, $\zeta'=y-at$. Так ответ выглядит лучше: $u(x,y,t)=\varphi(x-at,y-at)$. □

Тут становится ясно, что мы сделали много ненужной работы (точнее, эту работу достаточно сделать один раз в жизни): как только был найден вектор e_1 можно было уже сообразить, что для построения решения $u(x,y,t)$ достаточно задать функцию $u=\varphi$ в плоскости $O\eta\zeta$ (т.е. в ортогональной к e_1 плоскости), а затем распространить эту функцию на все пространство параллельным переносом вдоль $O\xi$ (ведь мы уже догадывались, что уравнение пример вид $u_\xi=0$). Итак, упростим решение.

Решение второе. Видим, что выражение в левой части (1) — это производная по направлению вектора $e_1=(a,a,1)$ в трехмерном пространстве (x,y,t). Подберем векторы $e_2'=(1,0,-a)$ и $e_3'=(0,1,-a)$ так, чтобы они были ортогональны e_1 (при этом ортогональность $e_2'\perp e_3'$ не обязательна). Эти векторы показывают нам выражения $x-at$ и $y-at$, от которых зависит произвольная функция φ, задающая ответ. □

Неплохо, но хотелось бы придумать универсальный метод решения, который бы приводил к ответу побыстрее. Что оказалось ключевым для решения? Тот момент, когда мы нашли выражения $x-at$ и $y-at$. После этого ответ пишется «на автомате» — произвольная функция от найденных выражений. Сами эти выражения тоже, естественно, являются решениями уравнения. Причем первое из них не зависит от y, а, значит, его можно воспринимать как функцию $x(t)$, которая удовлетворяет уравнению $\frac{dt}{1}=\frac{dx}{a}$. Аналогично устроено второе решение.

Вывод: **для того, чтобы решить уравнение $\alpha u_t+\beta u_x+\gamma u_y=0$ надо записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\begin{cases}\alpha^{-1}dt=\beta^{-1}dx,\\ \alpha^{-1}dt=\gamma^{-1}dy\end{cases}$, найти два ее независимых решения и записать ответ как произвольную функцию от этих двух решений.**

Еще раз: направляющий вектор оси $O\xi$ равен (α,β,γ), а ортогональные векторы выбираются $(\alpha^{-1},-\beta^{-1},0)$ и $(\alpha^{-1},0,-\gamma^{-1})$. При этом, найденный нами метод подходит и для случая, когда α, β и γ зависят от x, y и t. Ничего не изменится и при другом наборе переменных (три пространственных переменных и время, стайционарное уравнение с любым числом пространственных переменных). Конечно, в общем случае, траектории полученной нами системы обыкновенных дифференциальных уравнений будут нелинейными фуннкциями. Это означает, что *с математической точки зрения, линейное уравнение первого* *порядка — это уравнение $u_\xi = f$, только записанное в некоторой криволинейной системе координат.*

Пример 7. *Решим стационарное уравнение*

$$(x+y)u_x - yu_y + (y+z)u_z = 0.$$

Решение. Пишем систему

$$\frac{dx}{x+y} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{y+z}.$$

Первое уравнение приводим к виду $ydx + (x+y)dy = 0$, это уравнение в полных дифференциалах, откуда $2xy + y^2 = const$ (те, кто не заметили полного дифференциала не расстраиваются, замечают, что уравнение линейно, если считать x функцией от y, и решают уравнение по известной схеме). Аналогично, $(y+z)dy + ydz = 0$, т.е. $2yz + y^2 = const$. Ответ: $u(x, y, z) = \varphi(2xy + y^2, 2yz + z^2)$, где функция φ произвольна. □

Определение 2. *Функции $\eta(x, y, z)$ и $\zeta(x, y, z)$, которые мы находим в процессе решения системы, постояы вдоль траекторий $(x(\xi), y(\xi), z(\xi))$. Такие фуннкции назвыают первыми интегралами системы. Сами кривые $(x(\xi), y(\xi), z(\xi))$ называются характеристическими кривыми или просто характеристиками.*

В последнем примере первыми интегралами были функции $2xy+y^2$ и $2yz+y^2$. В предыдущем примере — функции $x - at$ и $y - at$.

Добавим к уравнению правую часть f, зависящую от переменных, но не от функции u. Оказывается, ничего страшного не произойдет. Еще раз проговорим ннаш путь решения. Пусть $u = u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha(x, y, z)u_x + \beta(x, y, z)u_y + \gamma(x, y, z)u_z = f(x, y, z)$$

Мы находим криволинейные координнаты (ξ, η, ζ), в которых уравнение примет вид $u_\xi = f$. При этом самое важное — выбор кривой $O\xi$, т.е. параметрической функции $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$, $z = z(\xi)$. Эту кривую мы выбираем так, чтобы

$$u_\xi = u_x \cdot x_\xi + u_y \cdot y_\xi + u_z \cdot z_\xi = \alpha(x, y, z)u_x + \beta(x, y, z)u_y + \gamma(x, y, z)u_z,$$

т.е. решаем систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = \alpha(x, y, z), \\ \frac{dy}{d\xi} = \beta(x, y, z), \\ \frac{dz}{d\xi} = \gamma(x, y, z), \end{cases} \iff \frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)} = d\xi.$$

Но, ведь, $u_\xi = \frac{du}{d\xi} = f(x, y, z)$, т.е. мы просто можем добавить к системе еще одно уравнение $d\xi = \frac{du}{f(x,y,z)}$. Тогда у системы останутся два первых интеграла вида $\eta(x, y, z)$ и $\zeta(x, y, z)$, а кроме них появится еще один, содержащий функцию u. Он будет иметь вид $u = J(x, y, z)$. Тогда мы скажем, что нашли частное решение, а общее решение есть сумма частного решения и общего решения однородного уравнения (это, очевидно, всегда верно для линейных уравнений). В этом случае, наш ответ

$$u(x, y, z) = J(x, y, z) + \varphi(\eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)),$$

где φ — произвольная функция.

Пример 8. *При моделировании транспортного потока на шоссе $x \in [0, +\infty)$, $t \in [0, 1]$, выбрана модель*

$$u_t + (v(x,t)u)'_x = f(x,t).$$

Смысл функции $u(x,t)$ — плотность потока автомобилей в точке шоссе x в момет времени t. Функция $v(x,t)$ характеризует скорость потока. В нашей моделе она взята $v(x,t) = 1 - e^{-x}$ (шоссе вначале идет по городу, точка $x = 0$ соответствует центру города, а потом выходит за город и его пропусная способность возрастает). Наконец, функция $f(x,t) \neq 0$ означает, что к движению подключаются все новые и новые частицы. В нашей модели $f(x,t) = e^{-x}$ (закончился рабочий день и в каждый момент времени к движению подключается одинаковое число машин, но в центре их число больше). Начальное условие $u(x,0) = 0$ (дорога пуста). Найдем решение задачи.

Решение. Итак, имеем уравнение $u_t + (1-e^{-x})u_x = e^{-x}(1-u)$. Вообще–то, в наших рассуждениях мы считали правую часть уравнения не зависящей от u. Но, давайте попробуем. Пишем систему на поиск характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1-e^{-x}} = \frac{du}{e^{-x}(1-u)}.$$

Тогда первое уравнение — уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя, получаем

$$t + C = \int \frac{dx}{1-e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \ln(e^x - 1).$$

Второе уравнение — тоже уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}-1} = \frac{du}{1-u} \Longleftrightarrow \int \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int \frac{du}{1-u} \Longleftrightarrow -\ln(1-e^{-x}) = \ln(1-u) + C.$$

Остановимся и подумаем, как нам теперь писать ответ. Вспомним, что после замен мы должны прийти к уравнению $u_\xi = f(\xi, \eta, u)$. После интегрирования этого уравнения получится функция, связывающая u и ξ и содержащая неопределенную постоянную. Эта «постоянная» не зависит от ξ, но зависит от переменной η, которая, в свою очередь, является первым интегралом системы вида $\eta = \eta(x,t)$. Теперь все стало ясно: записываем равенство

$$-\ln(1-e^{-x}) = \ln(1-u) + C \Longleftrightarrow u = 1 - \frac{C}{1-e^{-x}},$$

где $C = \varphi(\eta)$, φ — произвольная функция. Выражение для η находим из другого первого интеграла $\ln(e^x - 1) - t = const$. Остается учесть начальное условие. Подставляем $t = 0$, получаем

$$\varphi(\ln(e^x - 1))1 - e^{-x} \Longleftrightarrow \varphi(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}.$$

Теперь подставляем найденную функцию φ в общее решение и получаем окончательный ответ

$$u(x,t) = \frac{e^t - 1}{e^t - 1 + e^x}.$$

Анализируя ответ видим, что плотность потока не превосходит 1, т.е. шоссе вполне справляется с потоком. □

Вывод: **пусть дано уравнение вида**

$$\alpha(x,y,z)u_x + \beta(x,y,z)u_y + \gamma(x,y,z)u_z = f(x,y,z,u).$$

Для его решения надо записать систему обыкновеннных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma} = \frac{du}{f},$$

найти ее первые интегралы вида $\eta(x,y,z)$**,** $\zeta(x,y,z)$ **и** $J(x,y,z,u)$**. Тогда решение в неявной форме имеет вид** $J(x,y,z,u) = \varphi(\eta(x,y,z),\zeta(x,y,z))$**, где** φ **— произвольная функция.**

А если еще немного подумать? Раз уж мы допускаем запись решения в неявной форме, то что нам мешает ввести зависимость от u в функции α, β и γ? Ответ мы тогда ожидаем в нечвном виде $\Phi(x,y,z,u) = 0$. Тогда наша система будет иметь три первых интеграла вида $\eta(x,y,z,u)$, $\zeta(x,y,z,u)$ и $J(x,y,z,u)$, а ответ примет вид $\varphi(\eta,\zeta,J) = 0$, где φ — произвольная функция.

Пример 9. *На этот раз модель транспортного потока сделали более реальной — скорость потока зависит от его плотности. Решите простейшее уравнение такой модели (однородное уравнение Хопфа)*

$$u_t + uu_x = 0$$

при $x \in [0,+\infty)$*,* $t \in [0,+\infty)$ *с начальным условием* $u(x,0) = e^{-x}$*.*

Решение. Имеем

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}.$$

Первое уравнение интегрируем (u считаем независимой переменной, т.е. при интегрировании постоянной!), получаем первый интеграл $x - ut = const$. Второе уравнение тоже интегрируем, получаем первый интеграл $u = const$. Тогда общее решение имеет неявный вид $F(u, x - ut) = 0$, где F произвольна. Подставим начальное условие, получим $F(p,q) = 0$ на кривой $p = e^{-q}$, $q \geq 0$. Значит, на плоскости (p,q) наше решение движется по этой кривой, т.е.

$$u = e^{ut-x} \Longleftrightarrow x = ut - \ln u.$$

□

Если посмотреть на график полученной функции в осях $OuOx$ при разных t, то видно, что $u(x,0)$ определена при всех x, а, например, $u(x,1/2)$ — только при $x > 1/2$. Немного подумав, становится ясно, что так и должно быть — за время $T = 1/2$ автомобили, находившиеся на шоссе уехали за пределы точки $x = 1/2$, а информации о въехавших через точку $x = 0$ на шоссе автомобилях у нас нет (забыли поставить граничное условие!). Но дальше происходит еще один эффект: при фиксированных $t > 1$ функция $x = ut - \ln u$ не имеет обратной функции $u = u(x)$! Такое явление называют *градиентной катастрофой*. В данном случае понятно, как это случилось: в момент времени $t = 1$ задние автомобили догнали ушедших вперед и решение пропало (образовалась ударная волна)! Вывод: **никогда нельзя забывать про физическую постановку задачи — любая физическая**

модель имеет границы применимости. В нашем случае, модель описывала движение без взаимодействия частиц, что явно неверно при образовании дорожной «пробки».

Покажем, как выводилось уравнение — тогда станут понятны эти самые «границы применимости». Рассмотрим поток частиц газа в области $\mathcal{D} \subset R^d$, где $d = 1$, 2 или 3. Пусть r — координата некоторой частицы (это, соответственно, число, двумерный вектор или трехмерный вектор). В нашем случае $d = 1$, так что r — число. Если считать, что частицы друг с другом не взаимодействуют, то закон Ньютона $m\ddot{r_j} = 0$ полностью определяет движение частицы с номером j (мы считаем, что внешних сил нет). Пара (r_j, t) называется *лагранжевыми координатами* частицы. Введем на прямой координату x. Пара (x, t) называется *эйлеровыми координатами* (эти координаты привязаны не к частице, а к точке). Тогда в каждой точке x определена скорость движения частиц среды $v = v(x, t)$. Если в эту точку x_0 в данный момент времени t_0 попала некоторая частица, то ее скорость равна v. С другой стороны, эта частица движется по своей траектории, т.е. $r_j = r_j(t)$, причем $r_j(t_0) = x_0$. Тогда при дифференцировании скорости этой частицы $\dot{r_j(t)}$ получаем

$$\begin{aligned}\dot{r_j}(t) - \dot{r_j}(t_0) = v(x,t) - v(x_0,t_0) = v(x,t) - v(x,t_0) + v(x,t_0) - v(x_0,t_0) \approx \\ \approx v_t(x,t_0)\Delta t + v_x(x_0,t_0)(x - x_0) \approx v_t(x_0,t_0)\Delta t + v_x(x_0,t_0)(r_j(t) - r_j(t_0)) = \\ = v_t(x_0,t_0)\Delta t + v_x(x_0,t_0)v(x_0,t_0)\Delta t.\end{aligned}$$

Свободное движение частицы характеризуется уравнением $(m_j \cdot r_j(x,t))'_t = 0$, откуда $m_j(v_t + v_x v) = 0$. Это и есть уравнение Хопфа.

Упражнение 2. *Решите следующие уравнения.*
1. $xu_x + yu_y = 1$.
2. $uu_x + xu_y = u$.
3. $xu_x + yu_y + zu_z = u^3$.
Решите следующие задачи Коши.
4. $xyu_x + xuu_y$, $u = 1 + y^2$ *при* $x = 1$.
5. $u_x + (u - x^2)u_y = 2x$, $u = x^2 + x$ *при* $y = 2x^2$.
6. $xu_x + uu_y = u + 2x^2$, $u = x$ *при* $y = 1/4 - x^2$.
Решите уравнение с n *переменными*
7. $x^1 \frac{\partial}{\partial x_1} u + \cdots + x^n \frac{\partial}{\partial x_n} u = au$, *где* $a = const$.
Для должников дополнительно: решить следующие задачи Коши
8. $xu_x + yu_y = x + y + u$, $u = x + y$ *на прямой* $y = x + 1$;
9. $y^2 u_x + xyu_y = x^3 u$, $u = e^{y^2/2}$ *на прямой* $x = 2y$;
10. $yu_x + xuu_y = yu$, $u = -y^2$ *на прямой* $x = 0$.

Лекция 3. Задача Коши. Простейшие системы

Раз уж у нас так хорошо все получилось с линейными и квазилинейными уравнениями первого порядка, то пора, наверное, доказать теорему о существовании и единственности решения. Не будем стремится к самому общему случаю. Пусть уравнение имеет вид

$$\alpha(x,y,z)u_x+\beta(x,y,z)u_y+\gamma(x,y,z)u_z=f(x,y,z,u), \tag{2}$$

где функции α, β и γ непрерывно дифференцируемы (в той области, где это будет надо). Правую часть будем также считать непрерывно дифференцируемой, и решение $u(x,y,z)$ будем искать в классе непрерывно дифференцируемых функций. К уравнению добавим начальное условие. Вообще–то, мы называем его начальным условно — «начало» подразумевает наличие времени. Конечно, никто нам не запретит считать одну из переменных (например, x) временем. Но тогда начальное условие логично задавать на плоскости $x=0$. Мы же рассмотрим более общий случай — условие будем задавать на некоторой поверхности S в пространстве $\mathbb{R}^3\ni\{(x,y,z)\}$. Тогда такое условие следует лучше назвать краевым условием. Но ведь, опять же, никто нам не запретит однну из переменных принять за время. Тогда условие становится каким–то смешанным, «начально–краевым». В общем, назовем условие начальным, подразумевая что в каждой конкретной задаче это условие может иметь свой смысл.

Итак, предположим, что на некоторой гладкой поверхности S в $\mathbb{R}^3$ задана функция f. Очеь важно отметить, что наша теорема будет *локальной* (собственно, как и в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений). То есть мы рассмотрим «маленький кусочек» поверхности и «маленький кусочек» пространства. Тогда, без ограничения общности, можно считать, что поверхность S есть график функции $z=S(x,y)$. Эту функцию мы будем считать непрерывно–дифференцируемой в кружке $V=\{(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$. Действительно, если это не так, то мы всегда можем осуществить поворот в $\mathbb{R}^3$ (линейную замену переменных). Такая замена, очевидно, не меняет вида уравнения, а поворотом можно добиться того, что поверхность придет к виду $z=S(x,y)$. На этой поверхности мы зададим функцию $\varphi:\ (x,y,z)\to\varphi(x,y)$. Поскольку точка (x,y,z) однозначно определяется координатами (x,y), то фактически, мы задаем функцию $\varphi(x,y)$ в кружке V.

Определение 3. *Задачей Коши называется задача о нахождении решения $u(x,y,z)$ уравнения (2), удовлетворяющего на поверхности S условию $u(x,y,z)=\varphi(x,y)$ при всех $(x,y)\in\mathcal{D}$, $z=S(x,y)$.*

Теорема 1. *Пусть $S=\{z=z(x,y)|(x,y)\in V\}$ — наша поверхность. Если*
1. функции α, β, γ, f, S и φ из класса C^1;
2. частная производная $f'_u\neq 0$ нигде на поверхности S;
3. характеристики не касаются поверхности, т.е. векторы $(1,0,S'_x)$, $(0,1,S'_y)$ и (α,β,γ) образуют линейный базис в каждой точке поверхности S,
то в малой окрестности поверхности, т.е. в области

$$\mathcal{D}=\{(x,y,z):\ (x,y)\in V,\ z\in(S(x,y)-\delta,S(x,y)+\delta)\}$$

существует единственная функция u класса C^1 — решение задачи Коши.

Доказательство. **Шаг 1.** Введем в области $\mathcal{D}$ криволинейные координаты. Из каждой точки $(x^0, y^0, z^0) \in S$ выпустим характеристику — кривую $(x(\xi), y(\xi), z(\xi))$, удовлетворяющую системе $\alpha^{-1}dx = \beta^{-1}dy = \gamma^{-1}dz$ и начальным условиям $x(0) = x^0$, $y(0) = y^0$, $z(0) = z^0$. Точнее, мы напишем автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = \alpha(x, y, z), \\ \frac{dy}{d\xi} = \beta(x, y, z), \\ \frac{dz}{d\xi} = \gamma(x, y, z), \end{cases}$$

где $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, а начальные условия даны выше.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений нам известно, что решение такой задачи — кривая $(x(\xi), y(\xi), z(\xi))$ существует, единственна и непрерывно дифференцируема по ξ. А еще была (наверное) теорема о непрерывной зависимости решения системы ОДУ от начальных условий, т.е. функции $x(\xi, x^0, y^0, z^0)$, $y(\xi, x^0, y^0, z^0)$ и $z(\xi, x^0, y^0, z^0)$ непрерывно зависят от x^0, y^0 и z^0. Ну и уж точно не было, но поверим, что это так: если начальные условия зависят от каких–то параметров непрерывно–дифференцируемо, то и решения системы ОДУ зависят от этих параметров непрерывно–дифференцируемо. Вот у нас, начальные условия зависят от параметров x^0 и y^0 именно так (про первые две координаты все и так ясно, а функция $z^0 = S(x^0, y^0)$ непрерывно–дифференцируема по условию). Итак, функции x, y и z зависят от ξ, x^0 и y^0 непрерывно–диффререцируемо. Обозначим $x^0 = \eta$, $y^0 = \zeta$ и получим замену переменных $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y, z)$, определенную в цилиндре $\{|\xi| < \varepsilon,\ (\eta - a)^2 + (\zeta - b)^2 < r^2\}$. Запишем якобиан замены на срезе цилиндра $\xi = 0$

$$J = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta & x'_\zeta \\ y'_\xi & y'_\eta & y'_\zeta \\ z'_\xi & z'_\eta & z'_\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ \gamma & S'_x & S'_y \end{vmatrix} \neq 0$$

(см. условие 3). Поскольку все производные непрерывны, то непрерывен и определитель $J(\xi, \eta, \zeta)$, а значит он отличен от нуля и в некоторой окрестности среза. Вот мы и возьмем число ε настолько малым, чтобы определитель не обращался в ноль во всем цилиндре. Тогда тройка функций (x, y, z) отобразит этот цилиндр в некоторую окрестность поверхности S биективно и однозначно. Выбирая δ достаточно малым, получим, что определена обратная замена из непрерывно–диффререцируемых функций (теорема о системе неявных функций из курса математического анализа). Значит, в каждой точке $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ мы определили тройку непрерывно–дифференцируемых функций $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$ — ввели криволинейные координаты.

Шаг 2. Запишем наше уравнение в новых координатах. По правилу дифференцирования сложной функции (см. курс математического анализа)

$$u_\xi = u_x \cdot x_\xi + u_y \cdot y_\xi + u_z \cdot z_\xi = \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u_z = f(x, y, z, u) = g(\xi, \eta, \zeta, u).$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием $u(0, \eta, \zeta) = \varphi(\eta, \zeta)$, где $(\eta, \zeta) \in V$. При этом $g'_u = f'_u \neq 0$ в точках $(\xi = 0, \eta, \zeta)$ (условие 2). По теореме из курса ОДУ уравнение имеет единственное решение $u(\xi, \eta, \zeta)$ в окрестности точки $\xi = 0$ (если надо, уменьшаем числа ε и δ). Это решение непрерывно–дифференцируемо по переменной ξ и по параметрам η и ζ (опять пользуемся теоремой из ОДУ, которой там не было).

Делаем обратную замену и получаем решение $u(x, y, z)$ исходной задачи (при этом непрерывная дифференцируемость не пропадет — теорема из курса математического анализа о композиции непрерывно–дифференцируемых функций). $\square$

Вывод: доказаывать теоремы об уравнениях в частных производных — штука непростая.

Поговорим теперь о системах уравнений в частных производных. Рассмотрим простейший пример.

Пример 10. *Решите систему*

$$\begin{cases} u_x = 1, \\ u_y = x. \end{cases}$$

Решение. Интегрируя первое уравнение, получим $u(x, y) = x + C(y)$. Дифференцируя это решение, получим $C'(y) = x$, что невозможно.
Ответ: решений нет. $\square$

Почему так произошло? Казалось бы, каждое уравнение отнимает у нас одну степень свободы, а каждая переменная — добавляет. До сих пор этот принцип действовал: уравнения с n переменными приводили к решениям — функциям от $n-1$ первого интеграла. Отсутствие решения в данном примере можно заметить из следующего факта $(u_x)'_y = (1)'_y = 0$, а $(u_y)'_x = (x)'_x = 1$, в то время как смешанная производная не должна зависеть от порядка диффиеренцирования. Таким образом, изучение систем PDE требует исследования нового для вас вопроса — о совместности системы.

Пример 11. *Решите систему*

$$\begin{cases} u_x = u, \\ u_y = u^2. \end{cases}$$

Решение. Имеем $u_{xy} = u_y = u^2 = u_{yx} = 2uu_x = 2u^2$, т.е. $u^2 = 0$.
Ответ: $u(x, y) \equiv 0$. $\square$

Оказывается, что кроме явных уравнений, система содержит еще одно, скрытое уравнение $u^2 = 0$.

Определение 4. *Если система PDE не содержит скрытых уравнений (формально, любоое условие совместности является следствием уравнений системы), то такая система называется замкнутой.*

Утверждение 1. *Система PDE на функцию $u(x, y)$*

$$\begin{cases} u_x = p(x, y), \\ u_y = q(x, y), \end{cases}$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, является замкнутой тогда и только тогда, когда $p'_y = q'_x$. В этом случае система имеет решение, единственное с точностью до константы. В противном случае система не имеет решений.

Доказательство. Случай $p'_y \neq q'_x$ очевиден — к системе добавляется новое равенство, которое и делает систему несовместной. Если же равенство выполнено, то система решается:

$$u(x,y) = \int_0^x p(\xi,y)d\xi + f(y)$$
$$u_y = q(x,y) = \int_0^x p'_y(\xi,y)d\xi + f'(y) = \int_0^x q'_\xi(\xi,y)d\xi + f'(y) = q(x,y) - q(0,y) + f'(y).$$

Отсюда $q(0,y) = f'(y)$, т.е. $f(y) = \int_0^y q(x,\eta)d\eta + C_0$ и окончательно

$$u(x,y) = \int_0^x p(\xi,y)d\xi + \int_0^y q(x,\eta)d\eta + C_0.$$

Общее решение системы получено. Что касается замкнутости, то оно следует из следующего рассуждения. Любое условие согласование должно выполнятся для решения системы. Но поскольку эта функция — решение системы, то оно является следствием системы, а значит, и любое соотношение на эту функцию есть следствие системы. □

Замечание 1. *Как изменятся наши рассуждения, если система, вместо $\mathbb{R}^2$ рассматривается в квадрате $|x|+|y| < 1$? А в круге $x^2+y^2 < 1$? А в проколотом круге $0 < x^2+y^2 < 1$?*

Попробуем обобщить наш результат. Обозначим оператор дифференцирования по переменной x через ∂_x (между прочим, это линейный оператор). Аналогично для ∂_y. Эти операторы коммутируют, т.е. композиции $\partial_x\partial_y$ и $\partial_y\partial_x$ совпадают.

Определение 5. *Коммутатором двух линейных операторов A и B называется оператор $[A,B] = AB - BA$. Два оператора коммутируют в точности тогда, когда их коммутатор равен нулю.*

Из курса линейной алгебры вы помните, что матрицы (т.е. линейные операторы) коммутируют далеко не всегда. Мы будем работать сейчас с дифференциальными операторами. Например, операторы первого порядка имеют вид

$$D = \sum a^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор. Итак, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} D_1 u = f_1, \\ \ldots \\ D_m u = f_m, \end{cases} \tag{3}$$

где D_j — дифференциальные операторы.

Определение 6. *Операторы $D_1, \ldots, D_m$ называют связными, если найдутся такие ненулевые функции $\lambda_j(x)$, что $\lambda_1(x)D_1 + \cdots + \lambda_m(x)D_m = 0$ и это тождество выполняется как операторное равенство в окрестности точки x общего положения. Если же таких функций нет, то операторы называют несвязными, а дифференциальные уравнения $D_1u = 0, \ldots, D_mu = 0$ — независимыми.*

Утверждение 2. *Пусть дана однородная система вида (3) с операторами*

$$D_k = \sum a_k^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Запишем матриц–функцию системы

$$A(x) = (a_k^j(x))$$

с n переменными и m уравнениями. Ранг r этой матрицы в точках общего положения равен числу несвязных операторов в наборе $D_1,\ \ldots,\ D_m$.

В случае $r \geq n$ система имеет лишь тривиальное решение $u \equiv 0$. А вот условие $r < n$ недостаточно для наличия ненулевого решения (см. пример выше). Как мы уже поняли, необходимо найти коммутаторы всех пар уравнений системы. Те коммутаторы, которые независимы с уравнениями системы, надо добавить в систему. Затем процедуру надо повторить и повторять до тех пор, пока на некотором шаге новых независимых уравнений уже не будет получено. Финальная система будет замкнутой, и ее общим решением будет функция $u = f(\cdot)$, где f — произвольная функция $n - r'$ переменных (здесь r' — ранг финальной системы), а аргументами f служат первые интегралы соответствующей системы ODE.

Пример 12. *Совместна ли система*

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + zu_z = x, \\ yu_x - xu_y = y^2 \end{cases}$$

на функцию $u = u(x, y, z)$?

Решение. Имеем $D_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$, $D_2 = y\partial_x - x\partial_y$. Поскольку

$$D_1D_2u = (x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)(yu_x - xu_y) = \\ = xyu_{xx} - xu_y - x^2u_{xy} + yu_x + y^2u_{xy} - xyu_{yy} + yzu_{xz} - xzu_{yz},$$

$$D_2D_1u = (y\partial_x - x\partial_y)(xu_x + yu_y + zu_z) = \\ = yu_x + xyu_{xx} + y^2u_{xy} + yzu_{xz} - x^2u_{xy} - xu_y - xyu_{yy} - xzu_{yz},$$

то $[D_1, D_2] = 0$, и к системе добавляется третье уравнение

$$0 = D_1(y^2) - D_2(x) = 2y^2 - y.$$

Это уравнение не выполнено ни в какой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, т.е. система несовместна. $\square$

Пример 13. *Найдите решение системы*

$$\begin{cases} (x^2 - y^2 - z^2)u_x + 2xyu_y + 2xzu_z = x, \\ yu_x - xu_y = 0 \end{cases}$$

на фукцию $u = u(x, y, z)$.

Доказательство. По аналогии с предыдущим примером, найдем коммутатор операторов $D_1 = (x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + 2xy\partial - y + 2xz\partial_z$ и $D_2 = y\partial_x - x\partial_y$. После некоторых подсчетов получаем

$$[D_2, D_1]u = 2xyu_x + (-x^2 +^2 - z^2)u_y + 2yzu_z = y.$$

Чтобы выяснить, является ли это уравнение (назовем его третьим уравнением системы) новым или оно следует из первых двух, найдем определитель матрицы системы, но сначала упростим ее. Видно, что если второе уравнение умножить на $2y$ и сложить с первым, то получим

$$(x^2 + y^2 - z^2)u_x + 2xzu_z = x$$

(будем его называть новым первым уравнением системы). Если же второе уравнение умножить на $2x$ и вычесть из третьего, то получим

$$(x^2 + y^2 - z^2)u_y + 2yzu_z = y$$

(будем его называть новым третьим уравнением системы). Итак определитель равен

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - z^2 & 0 & 2xz \\ y & -x & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 - z^2 & 2yz \end{vmatrix} \equiv 0,$$

т.е. третье уравнение излишне (начальная система замкнута) Решим второе уравнение системы

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \iff xdx = -ydy \iff d(x^2) = -d(y^2) \iff x^2 + y^2 = const,$$

так что $u = u(r, z)$, где $r^2 = x^2 + y^2$ — полярный радиус в плоскости Oxy. Поскольку $u_x = u_r \cdot r_x = u_r \frac{x}{r}$, а $u_y = u_r \frac{y}{r}$, то новое первое уравнение принимает вид

$$(r^2 - z^2)\frac{x}{r}u_r + 2xzu_z = x \iff (r^2 - z^2)u_r + 2rzu_z = r, \tag{4}$$

$$\frac{dr}{r^2 - z^2} = \frac{dz}{2rz} = \frac{du}{r}. \tag{5}$$

Здесь первое равенство приводит к однородному ODE на функцию $z = z(r)$. Делаем стандартную подстановку $z(r) = rw(r)$ и получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dr}{r} = \frac{1 - w^2}{w(1 + w^2)}dw.$$

После интегрирования, получаем первый интеграл $\frac{z}{z^2+r^2} = const$. Уравнение

$$\frac{dz}{2rz} = \frac{du}{r}$$

дает частное решение $u = \frac{1}{2}\ln z$.
Ответ:

$$u(x, y, z) = f\left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\right) + \frac{1}{2}\ln z,$$

где функция f произвольна. □

Упражнение 3. *Имеют ли решения следующие задачи Коши? Если да, то найдите их.*
1. $u_x + 2u_y = 5$, $u(x, kx) = 0$ *(исследуйте разные значения параметра* $k \in \mathbb{R}$*).*
2. $u_x + 3u_y = 2$, $u(1, y) = y^2$.
3. $u_x + 3u_y = 2$, $u(x, 3x) = 2x$.
4. $yu_x - xu_y = 0$ *в окрестности точки* $(x, y) = (1, 0)$, $u(1, y) = 2y$. *Найдите общее решение систем*
5. $zu_y - yu_z = 0$, $u_x + tu_y + yu_t = 0$, *где* $u = u(x, y, z, t)$.
6. $zu_y - yu_z = 0$, $yu_x + zu_y = 0$, *где* $u = u(x, y, z)$.
7. $zu_y - yu_z = 0$, $xu_z - zu_x = 0$, $yu_x - xu_y = 0$.
8. $tu_t = u_z$, $\sin xu_x - \cos xu_y + 2\cos xu_z = 0$.
9. $u_x + yu_z = 0$, $u_y + xu_z = 0$.

Лекция дополнительная 1. Интеграл Лебега

Начнем с того, что договоримся обозначать интервалы (конечные) на $\mathbb{R}$ через $\mathcal{I}$, а их длину через $|\mathcal{I}|$.

Определение 7. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество. Скажем, что это множество меры нуль (по Лебегу), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая система интервалов (конечная или счетная) $\{\mathcal{I}_n\}$, что $\sum_n |\mathcal{I}_n| < \varepsilon$*

Например, одна точка или конечный набор точек имеют меру нуль. Счетное семейство точек тоже имеет меру нуль: покроем первую точку интервалов длины $\varepsilon/2$, вторую — интервалом длины $\varepsilon/4$ и т.д. Бывают несчетные множества, мера которых, тем не менее нуль, но давайте не уходить от темы лекции. Для сокращения вместо фразы «E — множество меры нуль» будем писать $\mu(E) = 0$ (хотя мы пока не умеем мерить множества ненулевой меры, т.е. равенство $\mu(E) = 1$ смысла еще не имеет).

Утверждение 3. *1. Если $\mu(A) = 0$, а $B \subset A$, то $\mu(B) = 0$.*
2. Если $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 0$, то $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$.
3. Если $\mu(A_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = 0$.

Доказательство. 1. Очевидно. Берем $\varepsilon > 0$. Надо покрыть B интервалами суммарной длины $< \varepsilon$: покрываем A — это покрытие подойдет и для B.
2. Очевидно. Берем $\varepsilon > 0$. Надо покрыть $A_1 \cup A_2$ интервалами суммарной длины $< \varepsilon$: покрываем A_1 системой интервалов суммарной длины $< \varepsilon 2$, покрываем A_2 так же, а потом объединяем покрытия.
3. После свойства 2 тоже очевидно. Первое множество покрываем системой суммарной длины $< \varepsilon/2$, второе — системой суммарной длины $< \varepsilon/4$ и т.д. Объединяем покрытия. $\square$

Вы знаете интеграл Римана. Он позволяет интегрировать ограниченные функции, мера точек разрыва которых равна нулю (критерий Лебега). И вот вопрос — можно ли так обобщить понятие интеграла, чтобы, с одной стороны, он сохранил свои естественные свойства (аддитивность, линейность и т.д.), с другой стороны, обобщал интеграл Римана, а с третьей стороны, позволял проинтегрировать максимально широкий класс функций? Эта задача была суперпроблемой 100 лет назад. Было дано много разных определений интеграла, но самым интересным (для приложений) оказалось понятие интеграла Лебега. Сейчас мы его определим.

Определение 8. *Обозначим через $I_{a,b}(x)$ характеристическую функцию интервала (a, b) (a и b — конечны!). Теперь назовем конечные суммы $\sum_k c_k I_k(x)$, где I_k — индикатор интервала $\mathcal{I}_k = (a_k, b_k)$, ступенчатыми функциями. Класс ступенчатых функций обозначим $\mathcal{L}_0$.*

Интегрировать ступенчатые функции легко:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx := \sum_k c_k |\mathcal{I}_k|,$$

такой ответ дает интеграл Римана, да и здравый смысл тоже.

Утверждение 4. *Интеграл ступенчатых функций обладает свойствами:*
1. $\int_{\mathbb{R}} af(x)+bg(x)\,dx = a\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + b\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$,
2. *если* $f(x)\le g(x)$ *на* $\mathbb{R}$, *то* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$.

Если нам надо проинтегрировать ступенчатую функцию $f(x)$ по интервалу (a,b), а не по всей оси, то мы просто умножаем $f(x)\cdot I_{(a,b)}(x)$ и интегрируем произведение. Тогда появляется свойство
3. $\int_{(a,b)\cup(c,d)} f(x)\,dx = \int_{(a,b)} f(x)\,dx + \int_{(c,d)} f(x)\,dx$.
Посмотрим, нельзя распространить этот интеграл на более широкий класс функций. ИДЕЯ — давайте приближать функции f ступенчатыми f_n, следить за поведением интегралов $\int_{\mathbb{R}} f_n$ и надеяться, что они сойдутся к числу, которое мы назовем $\int_{\mathbb{R}} f$. А теперь вопрос — приближать в каком смысле? ИДЕЯ — интеграл Римана не замечает изменения подынтегральной функции на множестве меры нуль.

Определение 9. *Скажем, что функции* $f_n(x)$ *сходятся к функции* $f(x)$ *почти всюду на* $\mathbb{R}$, *если для всех точек* $x\in\mathbb{R}\setminus E$ *имеет место* $f_n(x)\to f(x)$, *а* $\mu(E)=0$.

Пример 14. *Пусть* $f_n(x)=I_{(n-1,n)}(x)$ *(бегущая ступенька). Тогда* $f_n(x)\to 0$ *п.в.*
Пусть $f_n(x)=|\sin x|^n$. *Тогда* $f_n(x)\to 0$ *п.в.*
Пусть $f_n(x)=|\sin(nx)|^n$. *Тогда* $f_n(x)\to 0$ *п.в.*

Определение 10. *Назовем функцию* $f(x)$ *измеримой (по Лебегу), если найдется такая последовательность* $f_n(x)$ *ступенчатых функций, что* $f_n(x)\to f(x)$ *п.в.*

Вот беда — измеримая функция не обязана интегрироваться. Например, функции $f_n(x)=I_{(-n,n)}(x)$ сходятся п.в. к $f(x)\equiv 1$, а она на $\mathbb{R}$ не интегрируема. Или вот функции $f_n(x)=\frac{1}{x}\cdot I_{(1/n,1)}(x)$ сходятся п.в. к функции $f(x)=\frac{I_{(0,1)}(x)}{x}$, а она тоже неинтегрируема.

ИДЕЯ — давайте п.в. приближать $f(x)$ ступенчатыми $f_n(x)$, но так, чтобы $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ имели предел! Но вот последовательность

$$f_n(x) = -I_{(-n-1,-n)}(x)\ln n + \frac{1}{x}\cdot I_{(1/n,1)}(x)$$

сходится п.в. к $f(x)=\frac{I_{(0,1)}(x)}{x}$, которая неинтрегрируема, хотя $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx=0$. Почему так случилось? Потому, что сократились $+\infty$ и $-\infty$. ИДЕЯ — не дадим им сокращаться — будем брать только неотрицательные функции $f_n(x)$. УСПЕХ — это и есть определение интеграла Лебега! А как теперь проинтегрировать отрицательные функции? Очень просто — положим $\int f(x)\,dx = -\int(-f(x))\,dx$. А знакопеременые? — разложим на положительную и отрицательную часть, проинтегрируем по отдельности и сложим.

Теперь займемся доказательствами. Сначала две леммы.

Лемма 1. *Пусть ступенчатые функции* $f_n(x)$ *неотрицательны и монотонно сходятся к нулю п.в. (т.е. для почти всех* $x\in\mathbb{R}$ *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *составлена из неотрицательных чисел, невозрастает и стремится к нулю). Тогда* $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\to 0$.

Доказательство. Положим $[a,b]$ — отрезок, содержащий носитель функции $f_1(x)$ (тогда носители всех f_n лежат в $[a,b]$), а $M=\max_x f_1(x)$. Пусть B (от слова bad) есть множество всех точек отрезка $[a, b]$, для которых сходимости нет. Добавим еще к B концы интервалов всех ступенек всех функций f_n. Тогда $\mu(B) = 0$ и мы покроем его системой интервалов суммарной длины $< \varepsilon$ (назовем это семейство интервалов $\mathcal{B}$). Пусть $A = [a, b] \setminus B$ (хорошее множество). Для любой точки $x \in A$ имеем $f_n(x) < \varepsilon$, начиная с некоторого N (для каждого x номер N свой). Но $f_n(x)$ ступенчатая, т.е. найдется интервал $(x - \delta, x + \delta)$, на котором $f_n(x)$ постоянна, т.е. $f_n(x) < \varepsilon$ на этом интервале (число δ зависит от x, давайте еще дополнительно договоримся брать $\delta \leq 1$). Мы покрыли множество A интервалами. Добавим к этим интервалам покрытие множества B и выберем конечное подпокрытие (лемма Гейне–Бореля). Отнесем интервалы в этом покрытии к двум семействам — семейство $\mathcal{B}$ и все остальные (назовем их семейством $\mathcal{A}$). Для всех точек интервалов семейства $\mathcal{A}$ найдем номер N, начиная с которого $f_n(x) < \varepsilon$ (выберем максимум среди номеров). Тогда для функций f_n с такими номерам

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \leq \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{B}} \int_{\mathcal{I}} f_n(x)\,dx + \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{A}} \int_{\mathcal{I}} f_n(x)\,dx \leq M\varepsilon + \varepsilon \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{A}} |\mathcal{I}| \leq \varepsilon(M + b - a + 2).$$

Число ε мы с самого начала брали произвольным. Уменьшая его, получаем $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \to 0$. □

Лемма 2. *Пусть теперь последовательность $f_n(x)$ ступенчатых неотрицательных функций неубывает. Пусть при этом последовательность их интегралов ограничена. Тогда $f_n(x)$ имеют конечный предел п.в.*

Доказательство. Для полноты картины будем считать $f_0(x) \equiv 0$. Положим $M = \sup_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$. Рассмотрим множество $B = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to +\infty\}$ (плохое множество). Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и положим $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \geq M/\varepsilon\}$, начиная с какого–то номера. Ясно, что $B = \cap_\varepsilon B_\varepsilon$. Теперь положим $B_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \geq M/\varepsilon,\ f_{n-1}(x) < M/\varepsilon\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $B_\varepsilon = \cup_n B_{n,\varepsilon}$. Кроме того, поскольку f_n ступенчатая функция, то $B_{n,\varepsilon}$ есть конечный набор интервалов (или пустое). Тогда B_ε есть не более, чем счетый набор интервалов (или пустое), т.е. $B_\varepsilon = \cup \mathcal{I}_k$. Тогда

$$M \geq \int_{\mathbb{R}} f_N(x)\,dx \leq \int_{\cup_{n=1}^N B_{n,\varepsilon}} f_N(x)\,dx \geq \frac{M}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} |B_{n,\varepsilon}|,$$

т.е. $\sum_{n=1}^N |B_{n,\varepsilon}| \leq \varepsilon$. Переходим к пределу и получаем $\sum |\mathcal{I}_k| \leq \varepsilon$. Мы покрыли множество B системой интервалов суммарной длины не больше ε, где ε произвольно. Значит, $\mu(B) = 0$. □

Далее договоримся называть монотонно неубывающую последовательность неотрицательных ступенчатых функций f_n с ограниченной последовательностью интегралов $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ фундаментальной последовательостью. Теперь рассмотрим неотрицательные функции на $\mathbb{R}$, причем разрешим им принимать значение $+\infty$.

Определение 11. *Среди неотрицательных функций на $\mathbb{R}$ выделим те f, которые можно представить как п.в. предел фундаментальной последовательности $\{f_n\}$. Назовем эти функции f интегрируемыми по Лебегу, а $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ положим равным $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ (предел монотонно неубывающей ограниченной последовательности чисел). Построенный класс функций обозначим $\mathcal{L}_{1,+}$.*

Из леммы 2 следует, что функции класса $\mathcal{L}_{1,+}$ конечны почти всюду. На оставшемся множестве можно считать эти функции бесконечными или неопределенными — это не важно. Теперь надо проверить корректность нашего определения.

Утверждение 5. *Пусть даны две фундаментальные последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, причем $f_n(x) \to f(x)$ п.в., а $g_n(x) \to g(x)$ п.в., а $f(x) \leq g(x)$ п.в. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Обозначим $J = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx$. Рассмотрим разность $f_m(x) - g_n(x)$ —это ступенчатая (знакопеременная) функция. Положим $\varphi_{n,m}(x) = \max\{f_m(x) - g_n(x), 0\}$ — это ступенчатая неотрицательная функция. Устремим $n \to \infty$. Имеем

$$f_m(x) - g_n(x) \to f_m(x) - g(x) \leq f(x) - g(x) \leq 0 \text{ п.в.},$$

т.е. $\varphi_{n,m}(x) \to 0$ п.в. при $n \to \infty$. Применим к этой последовательности лемму 1 — получим $\int_{\mathbb{R}} \varphi_{n,m}(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\int_{\mathbb{R}}(f_m(x) - g_n(x))\,dx$ стремится при $n \to \infty$ к отрицательному числу, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\,dx \leq J.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу по m и получим требуемое неравенство. □

Следствие 1. *Если в этом утверждении взять $g(x) = f(x)$ п.в., то получим*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx.$$

Значит,
1. Интеграл Лебега функции класса $\mathcal{L}_{1,+}$ не зависит от выбора фундаментальной последовательности $\{f_n\}$ (определен корректнно),
2. Изменение функции класса $\mathcal{L}_{1,+}$ не выводит ее из класса и не меняет ее интеграла.

Приведем еще важные и очевидные свойства:
3. Если f и g лежат в $\mathcal{L}_{1,+}$, то их сумма также интегрируема и $\int_{\mathbb{R}}(f(x) + g(x))\,dx = \int_{bR} f(x)\,dx + \int_{bR} g(x)\,dx$,
4. Если $f \in \mathcal{L}_{1,+}$, (a,b) — произвольный интервал, то $f(x)I_{(a,b)}(x)$ интегрируем, причем интеграл аддитивен по интервалам, т.е. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Лекция дополнительная 2. Предельные теоремы

Определение 12. *Скажем, что произвольная функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу, если $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, где f_+ и $-f_-$ неотрицательны и интегрируемы. Положим*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} (-f_-(x))\,dx,$$

а построенный класс функций обозначим $\mathcal{L}_1$.

Заметим, что такое определение корректно. Действительно, если $f = f_+ + f_- = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$ — два различных разложения, то

$$f_+ - \tilde{f}_- = \tilde{f}_+ - f_- \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_+(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} (-\tilde{f}_-(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_+(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} (-f_-(x))\,dx.$$

Упражнение 4. *Перенесите на класс $\mathcal{L}_1$ свойства 2–4.*

Непосрдественно из определения получаем свойство
5. Функция $f \in \mathcal{L}_1$ тогда и только тогда, когда $|f| \in \mathcal{L}_1$.

Утверждение 6. *Если $h \in \mathcal{L}_1$, то найдется такая последовательность ступенчатых функций $h_n(x)$, что $\int_{\mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)|\,dx \to 0$.*

Доказательство. Разложим $h(x) = f(x) - g(x)$, где f, $g \in \mathcal{L}_{1,+}$. Построим фундаментальные последовательни $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Положим $h_n(x) = f_n(x) - g_n(x)$. Получим

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f_n(x))\,dx + \int_{\mathbb{R}} (g(x) - g_n(x))\,dx.$$

□

Мы выполнили часть поставленной задачи — определили интеграл и проверили его свойства. Посмотрим теперь, как наш интеграл связан с интегралом Римана.

Утверждение 7. *Если неотрицательная функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле, то $f \in \mathcal{L}_{1,+}$ и ее интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана.*

Доказательство. Рассмотрим следующую конструкцию. Вначале разобъем числовую ось $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, +\infty)$. На втором шаге разобъем

$$\mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup [-2, -1) \cup [-1, 0) \cup [0, 1) \cup [1, 2) \cup [2, +\infty).$$

И далее будем разбивать ось на два луча $(-\infty, -2^{n-1})$, $[2^{n-1}, +\infty)$ и полуинтервал $[-2^n, 2^n)$, который будем разбивать на полуинтервалы с диаметром 2^{2-n}. Теперь построим ступенчатую функцию $f_n(x)$ с основаниями ступенек — интервалами нашего разбиения (а n шаге их будет 4^{n-1}). Высоту ступенек возьмем равной $\inf f(x)$ на основаннии ступеньки.

Заметим, что при переходе к каждому следующему шагу мы делим каждый интервал разбиения пополам. Это означает, что всегда $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. С другой стороны, $f_n(x) \leq f_(x)$. Кроме того, если x — точка непрерывности функции $f(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Пусть $x \neq k2^{-p}$. Тогда, начиная с некоторого n, основание ступеньки будет содержать x как внутреннюю точку, а высота ступеньки будет отличаться от $f(x)$ не более, чем на ε. По критерию Лебега, $f(x)$ непрерывна п.в., т.е. $f_n(x) \to f(x)$ п.в. Мы построили фундаментальную последовательность для $f(x)$. При этом $(L)\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ есть нижняя сумма Дарбу для необственного интеграла Римана $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$, т.е. $(L)\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \to (R)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. Значит, $f \in \mathcal{L}_{1,+}$ и ее интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана. □

Для знакопеременных функций ситуация сложнее.

Следствие 2. *Если $f_+(x) = \max\{f(x,0)\}$ и $f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$ интегрируемы по Риману на $\mathbb{R}$, то f интегрируема на $\mathbb{R}$ по Лебегу и интегралы совпадают.*

При этом, функция $\frac{sinx}{x}$ интегрируема на $\mathbb{R}$ по Риману, но не по Лебегу (проверьте!).

Теорема 2 (Теорема Леви)**.** *Пусть $f_n \in \mathcal{L}_{1,+}$, последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ монотонно неубывает при каждом $x \in \mathbb{R}$, а последовательность интегралов $\left\{\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\right\}$ ограничена. Тогда почти всюду на $\mathbb{R}$ есть конечный предел $f_n(x) \to f(x)$, предельная функция $f \in \mathcal{L}_{1,+}$ и $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.*

Доказательство. Для каждой f_n найдем фудаментальную последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_{k,n}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{k,n} \to f_n$ п.в. Теперь определим функции g_n, взяв для каждого $x \in \mathbb{R}$ $g_k(x) = \max_{n\leq k}\{\varphi_{k,n}(x)\}$. Для каждого x и n имеем $\varphi_{k+1,n}(x) \geq \varphi_{k,n}(x)$. Кроме того, при переходе от k к $k+1$ в определении $g_k(x)$ максимум берется по большему множеству индексов, т.е. $g_{k+1}(x) \geq g_k(x)$. Еще заметим, что $g_k \in \mathcal{L}_0$. Кроме того, $\varphi_{k,n}(x) \leq f_n(x)$ при всех k, а значит,

$$g_k(x) = \max_{n\leq k}\{\varphi_{k,n}(x)\} \leq \max_{n\leq k}\{f_n(x)\} \leq \max_{n\leq k}\{f_k(x)\} = f_k(x).$$

Тогда (по определению) $\int_{\mathbb{R}} g_k(x) \leq \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \leq A$ (единая константа). Мы знаем (Лемма Б), что тогда $g_k(x)$ имеет конечный предел почти всюду, который назовем $f(x) \in \mathcal{L}_{1,+}$. С другой стороны, $g_k(x) \geq \varphi_{k,n}(x)$ при всех $k \geq n$. Переходя к пределу по $k \to \infty$, получаем $f(x) \geq f_n(x)$. Оказывается, что $g_n(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$, т.е. $f_n(x) \to f(x)$ п.в. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}} g_k(x) \leq \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} g_k(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx,$$

т.е. $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. □

Следствие 3. *Если монотонная последовательность $\{f_n(x)\}$ суммируемых функций имеет ограниченную последовательность интегралов $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx$, то она сходится п.в. и ее можно инетгрировать почленно.*

Доказательство. Просто перейдем к неотрицательным функциям, взяв $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$. □

Следствие 4. *Ряд суммируемых функций $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, для которого сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx$, сам сходится почти всюду к интегрируемой функции, и его можно интегрировать почленно.*

Доказательство. Разложим каждую функцию f_n на положительную и отрицательную часть и проведем доказательство для каждого из них отдельно. Разберемся с рядом из положительных $f_{n+}(x)$. Рассмотрим последовательность частичных сумм $S_{n+}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_{k+}(x)$ — это функции из $\mathcal{L}_{1,+}$, которые монотонно возрастают. При этом

$$\int_{\mathbb{R}} S_{n+}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_{k+}(x)\,dx < A < \infty.$$

По теореме Леви, последовательность $\{S_{n+}\}$ имеет п.в. предел $\sum_{k=1}^{\infty} f_{k+}(x) = f(x) \in \mathcal{L}_{1,+}$ и $\int_{\mathbb{R}} S_{n+}(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. Аналогично, функции $S_{n-}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_{k-}(x)$ образазют невозрастающую последовательность неположительных функций. Переходим к функциям $-S_{n-}(x)$ и повторяем рассуждения. $\square$

Следствие 5. *Если монотонная последовательность $\{f_n(x)\}$ интегрируемых функций сходится п.в. к конечной суммируемой $f(x)$, то $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$.*

Доказательство. Из утверждения 5 следует оценка $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. Далее очевидно. $\square$

Утверждение 8. *Еще два свойство интеграла:*
5. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна. Если

$$M = \sup\{\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx : \, h \in \mathcal{L}_0, \; 0 \le h(x) \le f(x)\} < \infty,$$

то $f \in \mathcal{L}_{1,+}$, а $M = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.
6. Если $f(x)$ суммируема, а $g(x)$ измерима, но $|g(x)| \le f(x)$, то g тоже суммируема и $\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

Доказательство. Шестое свойство немедленно следует из пятого. Его и будем доказывать. По условию, f измерима, т.е. найдется последовательность функций $h_n \in \mathcal{L}_0$, сходящаяся п.в. к $f(x)$ монотонно неубывая. Тогда $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx \le M$ и применяя теорему Леви получаем $f \in \mathcal{L}_{1,+}$ и $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \le M$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция $h(x)$, для которой $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx \ge M - \varepsilon$ и $0 \le h(x) \le f(x)$. Тогда функция $f(x) - h(x)$ неотрицательна и интегрируема, т.е. $M - \varepsilon \le \int_{\mathbb{R}} h(x) \le \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. $\square$

Утверждение 9. *7. Если $f_1(x)$, $f_2(x) \in \mathcal{L}_1$, то $g(x) = \max\{f_1(x)\, f_2(x)\}$ и $h(x) = \min\{f_1(x),\, f_2(x)\}$ — тоже.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $g(x) = (f_1(x) - f_2(x))_+ + f_2(x)$, а $h(x) = (f_1(x) - f_2(x))_- + f_2(x)$. $\square$

Теорема 3 (Теорма Лебега о мажорируемой сходимости)**.** *Пусть f_n измеримы по Лебегу и $|f_n(x)| \le M(x)$, где $M(x) \in \mathcal{L}_1$. Пусть $f_n \to f$ п.в. Тогда $f \in \mathcal{L}_1$ и $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность интегрируемых функций

$$g_{n,p}(x) = \max\{f_n(x),\, f_{n+1}(x), \dots, f_{n+p}(x)\}, \quad n,\, p \in \mathbb{N}.$$

По индексу n они монотонно неубывают, а $\int_{\mathbb{R}} |g_{n,p}(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}} M(x)\, dx < \infty$. По следствию из теоремы Леви, при $p \to \infty$ они имеют п.в. предел, равный, конечно $g_n(x) = \sup\{f_n(x),\, f_{n+1}(x), \dots\} \in \mathcal{L}_1$. Те же рассуждения (поставить минусы два раза) приводят к интегрируемости функций $h_n(x) = \inf\{f_n(x),\, f_{n+1}(x), \dots\}$. При этом, $h_n(x) \le f_n(x)$, монотонно неубывают и стремятся к $f(x)$ п.в. Значит, $f \in \mathcal{L}_1$ и $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$. Аналогично, функции $g_1(x) - g_n(x)$ монотонно неубывают и стремятся к $g_1(x) - f(x)$ п.в., т.е.

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(x) - \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} g_1(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx - 0,$$

а $\int_{\mathbb{R}} g_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx + 0$. Остается заметить, что $h_n(x) \le f_n(x) \le g_n(x)$, и

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\, dx \le \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \le \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, dx.$$

Переходя к пределу, получаем $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$. □

Следствие 6 (Лемма Фату). *Если функции $f_n \in \mathcal{L}_{1,+}$ и $f_n \to f$ п.в. и последовательность интегралов $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$ ограничена, то f суммируема и $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \le \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$.*

Доказательство. Положим $h_n(x) = \inf\{f_n(x)\, f_{n+1}(x), \dots\}$. Эти функции суммируемы (как и в доказательстве теоремы Лебега, рассмотрим $h_{n,p}(x)$ и заметим, что $\int_{\mathbb{R}} h_{n,p}(x)\, dx \le \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \le A$), неотрицательны и неубывают по n к $f(x)$ п.в. Из теоремы Леви выводим суммируемость функции f и

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\, dx = \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx.$$

□

Следствие 7. *Пусть $f_j(x)$, $1 \le j \le d$, — суммируемые на $\mathbb{R}$ функции. Предположим, что значения вектора $(f_1(x),\, f_2(x), \dots,\, f_d(x))$ лежат в некотором множестве $D \subset \mathbb{R}^d$, а на D определена непрерывная функция g. Тогда сложная функция $g(f_1(x), \dots,\, f_d(x))$ суммируема на $\mathbb{R}$, если только $|g(f_1(x), \dots,\, f_d(x))| \le h(x)$, где h суммируема.*

Доказательство. Устроим последовательности ступенчатых функций $f_{j,n}(x)$, сходящихся п.в. к $f_j(x)$. Положим $g_n(x) = I_{(-n,n)}(x) g(f_{1,n}(x), \dots,\, f_{d,n}(x))$ — ступенчатые функции на $\mathbb{R}$. По непрерывности g, эти функции п.в. на $\mathbb{R}$ сходятся к $g(f_1(x), \dots,\, f_d(x))$. Остается применить теорему Лебега. □

Лекция 4. Уравнение струны (начало)

Представим себе тонкую упругую натяутую струну, закрепленную с обоих концов. Пусть вначале на струну не действуют никакие силы. Силы тяжести тоже нет (либо мы считаем струну невесомой). Тогда струна будет натянута по отрезку. Расположим ее вдоль оси Ox от $x = 0$ до $x = l$. Сейчас струна соответствует у нас графику функции $u(x) = 0$.

Примеим силу к одной точке x струны. Струна примет известную нам из жизненного опыта форму ломаной. Она по–прежнему в равновесии, т.е. силы натяжения уравновесили нашу вннешнюю силу. Запишем равенство сил $T_l + T_r = f$ в точке x, где T_l — сила натяжения, действующая на точку x слева, а T_r — справа (точнее, модули этих сил). Пусть α и β — угловые коэффициенты левого и правого отрезка ломаной. Проектируя силы на координатные оси, получим

$$T_l \cos\alpha = T_r \cos\beta, \qquad T_l \sin\alpha + T_r \sin\beta = f.$$

Заметим еще, что $u'(x_0 - 0) = \operatorname{tg}\alpha$ и $u'(x_0 + 0) = -\operatorname{tg}\beta$ (обозначим первую величину через u'_-, а вторую через u'_+). Тогда

$$T_r = T_l \sqrt{\frac{1 + {u'_+}^2}{1 + {u'_-}^2}}, \qquad T_l \frac{\left(u'_- - u'_+\right)}{\sqrt{1 + {u'_-}^2}} = f.$$

Мы рассмотрели случай силы, приложенной в одной точке. В реальности сила распределена вдоль струны и характеризуется функцией $f(x,t)$ — плотностью силы, т.е. нашу формулу следует воспринимать как силу, приложенную к малому участку $[x, x + \Delta x]$

$$T_l(x) \frac{(u'(x) - u'(x + \Delta x))}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} = \int_x^{x+\Delta x} f(\xi, t) d\xi.$$

Мы рассмотрели случай, когда силы уравновешены. В реальности под действием силы струа начнет двигаться, т.е. разность сил слева и справа нулю не равна. Будем восприимать наш малый участок струны как материальную точку и запишем второй закон Ньютона

$$\Delta m \cdot u(x,t)_{tt} = -T_l(x) \frac{(u'(x) - u'(x + \Delta x))}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} + \int_x^{x+\Delta x} f(\xi, t) d\xi.$$

Разделим обе части равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим нелинейное уравнение колебаий струны

$$\rho(x) u(x,t)_{tt} = \left(\frac{T_l(x) u'_x(x,t)}{\sqrt{1 + u'_x(x,t)^2}} \right)'_x + f(x,t),$$

где $\rho(x)$ — функция плотности струны (мы учли, что масса фрагмента струны равна произведению плотности на длину отрезка струны). Полученное уравнение сложное. Посмотрим, можем ли мы упростить его. Давайте будем считать, что при колебаниях струны величина u'_x мала настолько, что $\sqrt{1+u'(x,t)^2} \approx 1$. Функцию $T_l(x)$ будем считать примерно постоянной. Тогда уравнение становится линейным

$$\rho(x)u_{tt} = Tu_{xx} + f(x,t).$$

Ну а если еще предположить струну однородной, то $\rho(x) = const$ и уравнение приобретает максимально простой вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad a > 0, \ x \in [0,l], \ u(0,t) = u(l,t) = 0$$

(последние условия показывают, что на концах отрезка струна закреплена).

Начнем с решения однородного уравнения, т.е. положим $f(x,t) \equiv 0$. Вам, може быть кажется, что раз нет сил, действующих на струну, то она и двигаться не должна, т.е. решение $u(x,t) \equiv 0$. А вот нет! Вспомните, как Вы дергаете струну гитары. После окончания воздействия струна не испытывает внешних сил (силой тяжести пренебрегаем), но продолжает звучать, т.е. колебаться. Значит, решение однородного уравнения определяется начальным условием $u(x,0) = \varphi(x)$. Теперь представим, что Вы в начальный момент струну не отклоняли от равновесия, но ударили по ней молотком. Струна все равно будет звучать (так работает фортепиано), т.е. даже при $\varphi(x) \equiv 0$ решение может не быть нулем — оно определяется вторым начальным условием $u'_t(0,t) = \psi(x)$. Действительно, удар молотка не отклоняет струну сразу, но сообщает ее частицам начальную скорость. Если подумать, то все логично — уравнение второго порядка должно иметь два начальных условия — начальную координату и начальную скорость (и так для каждой точки x).

Тут полезно прибегнуть к уже известным нам символам. Пусть ∂_t и ∂_x — операторы дифференцирования по t и по x. Тогда мы имеем уравнение $\left((\partial_t)^2 - (\partial_x)^2\right)u = 0$. Но выражение в скобках есть разность квадратов! А поскольку операторы коммутируют, то уравнение можно записать в виде

$$(\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x)u = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} u_t + au_x = v, \\ v_t - av_x = 0. \end{cases}$$

Рещая второе уравнение системы, получаем $v(x,t) = C(x+at)$, где функция C произвольна. Подставляя в первое равенство, получим

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at),$$

где f и g — произвольные (дважды дифференцируемые) функции. Это и есть общее решение волнового уравнения.

Если мы нарисуем график произвольной функции $f(x)$ на числовой оси, а затем нарисуем серию графиков функций $f(x-at)$ при нескольких положительных t, то получится «мультфильм», на котором график функции f как твердое тело «бежит» направо. Поэтому первое слагаемое решения называют правой (или прямой) волной. Аналогично, второе слагаемое дает левую (или отраженную) волну.

Учтем начальные условия. Вместо конечной струны, рассмотрим вначале бесконечную, т.е. предположим, что $u(x,t)$ определена при $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, и удовлетворяет условиям $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$. Тогда

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x).$$

Решая эту систему, получим

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi,$$

а тогда...

Теорема 4. *Общее решение уравнения $u_{tt} = au_{xx}$ с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ имеет вид*

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi.$$

Полученную нами формулу называют *формулой Д'Аламбера* в честь Д'Аламбера.

Обратите внимание, что формула корректно определяет функцию $u(x,t)$ для любых (например, непрерывных функций) φ и ψ, но уравнению эта функция удовлетворяет только в случае $f \in C^2$ и $g \in C^1$. Такое решение называют *классическим*. Однако, начальные условия вполне могут быть недиффиренцируемыми функциями: мы легко можем прдеставить случай, когда $\varphi(x) = 1 - |x|$ (струну оттянули от положения равновесия в точке $x = 0$) или $\psi(x) = I_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0,1]$ (по струне ударили молотком ширины 1). «Решения» в этих случаях формула Д'Аламбера определяет, но такие решения называют *обобщенными*. Причем обобщенные решения бывают разной степени «обобщенности» — мы можем захотеть взять $\psi(x) = \delta_0(x)$ (по струне ударили «точечным» молотком, сообщив общий импульс 1).

Определение 13. *Функцией Дирака $\delta_a(x)$ называют «функцию», которая равна нулю везде, кроме точки $x = a$, в самой точке a равна бесконечности, причем так, что $\int_{\mathbb{R}} \delta_a(x)\,dx = 1$.*

Ясно, что функция Дирака функцией не является — такие функции называют *обобщенными* (английская терминология *distributions* в последнее время побеждает и функции стали назвыать *распределениями*). Подходящая математическая модель вам, однако, уже известна: $\delta_a(x)$ есть вероятностная мера, сосредоточенная в точке a (или случайная величина, которая с вероятностью 1 попадает в точку a). В нашем случае такие начальные данные приводят к разрывным функциям $u(x,t)$, что для струны, конечно, лишено смысла. Это однако еще ни о чем не говорит — волновое уравнение описывает не только колебания струны, но и, например, изменение давления газа в длинной узкой трубке. Каждый, кто слышал хлопок при преодолении самолетом скорости звука, согласится, что здесь разрывные решения смысл уже имеют.

Как же все–таки понимать решения в неклассическом случае? Здесь все зависит от выбора функциональных классов, в которых мы работаем. Выберем, например, класс функций $u(x,t)$, которые при каждом фиксированном t финитны, непрерывны и имеют кусочно–непрерывную производную по переменной x. Расстояние между такими функциями будем измерять по правилу

$$\rho(f,g) = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Тогда сходящимися последовательностями функций станут хорошо вам известные равномерно сходящиеся последовательности. Потребуем, чтобы $\rho(u(\cdot, t+\Delta t), u(\cdot, t)) \to 0$ при $\delta t \to 0$ при каждом $t \geq 0$. Иными словами, мы воспринимаем фукцию $u(x,t)$ не как функцию двух переменных. При каждом фиксированном t это элемент сформированного нами линейного пространства (вектор в бесконечномерном пространстве, которое для краткости обозначим X). А изменение параметра t дает нам непрервную кривую $u(\cdot, t)$ в этом пространстве.
Пусть теперь функция $\varphi(x)$ финитна, непрерывна и имеет кусочно–непрерывную производную, а функция $\psi(x)$ непрерывна и кусочно–непрерывна. Легко видеть, что формула Д'Аламбера определяет при каждом t функцию из пространства X.

Упражнение 5. *Если $\Delta t \to 0$, то $u(\cdot, t+\Delta t) \to u(\cdot, t)$ равномерно на $\mathbb{R}$.*

Итак, функцию $u(x,t)$ мы построили. Но можно ли считать ее решением? Да, можно. Функцию $\varphi(x)$ всегда можно сколь угодно точно приблизить (в смысле метрики пространства X) функциями класса C^2 (то есть взять последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций $\varphi_\varepsilon \leftleftarrows \varphi$ при $\varepsilon \to 0$). Аналогично, функцию $\psi(x)$ можно приблизить функцией класса C^1. Затем остается решить уравнение с гладкими начальными данными (это уже будет классическое решение) и перейти в формуле Д'Аламбера к пределу по $\varepsilon \to 0$.

Ясно, что наш разговор об обобщенных решениях будет продолжен. Пока же вернемся к классическому случаю. Добавим к уравнению правую часть. Оказывается, решение все–равно можно выписать явно (формула Дюамеля), но для того, чтобы это не выглядело фокусом, дадим следующее объяснение. В правой части уравнения стоит сила $f(x,t)$ (точнее плотность сил по переменной x). Силу можно представить как непрерывную цепочку бесконечного числа бесконечно малых ударов $f(x,t) = \int_0^t \psi(x,s)\,ds$. Но с одним ударом мы уже справляться научились (функция $\psi(x)$ в начальных условиях). Значит, достаточно записать формулу Д'Аламбера, добавив к решению одно слагаемое (мы уитываем, что время, прошедшее от удара, сделанного в момент s, до момента t, равно $t-s$)...

Теорема 5. *Общее решение уравнения $u_{tt} = au_{xx} + f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, имеет вид*

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(\xi,s)\,d\xi\,ds.$$

Доказательство. Общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного плюс частное решение. Прямой проверкой убеждаемся, что функция $\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(\xi,s)\,d\xi\,ds$ является частным решением и не меняет начальных условий, поскольку обнуляется вместе со своей производной по переменной t на прямой $t=0$. Остальное очевидно. □

Пример 15. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны нулю вне отрезка $x \in [2,5]$. Что можно сказать о решении однородного волнового уравнения $u(x,t)$? А что если $\varphi(x)$ сосредточена на отрезке $[2,5]$, а $\psi(x) \equiv 0$?*

Решение. Легко видеть, что $u(x,t) \equiv 0$ вне отрезка $[2-at, 5+at]$. Это имеет простую физическую интерпретацию: до точек x левее $2-at$ еще не дошла левая волна, а до точек правее $5+at$ нне дошла правая. Второй вопрос интереснее. Здесь дополнительно можно сказать, что $u(x,t) = 0$ при всех $x \in [5-at, 2+at]$ (если, конечно, $t > 3/(2a)$). Оказывается, эти точки попали в «зону тишины», поскольку обе волны через них уже прошли! $\square$

Вывод: колебания одномерных объектов имеют волны, у которых есть и передний, и задний фронт. Это, впрочем, знает каждый, кто стоял в автомобильной пробке. Вот загорелся зеленый свет (волна пошла), но Вы еще стоите — до Вас волна еще не дошла. Затем движеие начинается, но если пробка длинная, то на светофоре загорается красный свет еще до того, как Вы доехали до перекрестка. Вы, однако, еще некоторое время едите, а затем до Вас доходит задний фронт волны и Вы останавливаетесь.
Поговорим о чуть более общей ситуации. Точно так же, как мы разложили на множители оператор $(\partial_x)^2-(\partial_t)^2$, можно поступить и для общего оператора вида $a(\partial_x)^2+b\partial_x\partial_y+c(\partial_y)^2$. Достаточно найти корни уравнения $a\lambda^2+b\lambda\mu+c\mu^2$.

Пример 16. *Решите уравнение*

$$u_{tt}+5u_{tx}+6u_{xx}=0.$$

Решение. Имеем $\lambda^2+5\lambda\mu+6\mu^2=0$, откуда $(\lambda+2\mu)(\lambda+3\mu)=0$. Сводим уравнение к системе

$$\begin{cases} u_t+3u_x=v, \\ v_t+2v_x=0, \end{cases} \iff \begin{cases} u_t+3u_x=v, \\ v(x,t)=f(x-2t), \end{cases} \iff u(x,t)=f(x-2t)+g(x-3t).$$

$\square$

Интересно, что в этом примере обе волны бегут вправо. Ясно, что речь опять идет о замене переменных. Действительно, если положить $\xi = x-2t$, $\eta = x-3t$, то уравнение примет вид $u_{\xi\eta}=0$.

Определение 14. *Кривые $x-2t = const$ и $x-3t = const$ называются характеристиками уравнения.*

Как мы поняли, уравнения характеристик в этом примере имеют вид $x-2t = const$, $x-3t = const$. В дифференциалах характеристики имеют вид $dx-2dt=0$ и $dx-3dt=0$, а если эти равенства перемножить, то $(dx)^2-5dxdt+6(dt)^2=0$. Получаем следующее формальное правило: для поиска хорошей замены переменных в уравнении вида $au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0$ надо сделать формальную замену $\partial_x \mapsto dy$, $\partial_y \mapsto -dx$. Посмотрим, работает ли наше правило в более сложных случаях.

Пример 17. *Решите уравнение*

$$u_{xx}-2\sin xu_{xy}-\cos^2 xu_{yy}-\cos xu_y=0.$$

Решение. Запишем дифференциальное уравнение для поиска характеристик

$$(dy)^2 + 2\sin x\,(dx)(dy) - \cos^2 x(dx)^2 = 0 \Longleftrightarrow (y')^2 + 2\sin xy' - \cos^2 x = 0.$$

В попытке выразить отсюда производную y' решим квадратное уравнение $\lambda^2 + 2\sin x\lambda - \cos^2 x = 0$, откуда $\lambda_1 = -\sin x + 1$, $\lambda_2 = -\sin x - 1$. Интегрируя, получаем

$$y = \cos x \pm x + C.$$

Итак, надо делать замену

$$\begin{cases} \xi = y - \cos x - x, \\ \eta = y - \cos x + x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_x = u_\xi(\sin x - 1) + u_\eta(\sin x + 1), \\ u_y = u_\xi + u_\eta \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u_{xx} = (\sin x - 1)(u_{\xi\xi}(\sin x - 1) + u_{\xi\eta}(\sin x + 1)) + (\sin x + 1)(u_{\xi\eta}(\sin x - 1) + u_{\eta\eta}(\sin x + 1)) + \\ \qquad + u_\xi \cos x + u_\eta \cos x, \\ u_{xy} = (\sin x - 1)(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (\sin x + 1)(u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}), \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{cases}$$

После замены уравнение примет вид

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi}((\sin x - 1)^2 - 2\sin x(\sin x - 1) - \cos^2 x) + u_{\xi\eta}(2(\sin^2 x - 1) - 4\sin^2 x - 2\cos^2 x) + \\ + u_{\eta\eta}((\sin x + 1)^2 - 2\sin x(\sin x + 1) - \cos^2 x) + u_\xi(\cos x - \cos x) + u_y(\cos x - \cos x) = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow -4u_{\xi\eta} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда $u(x, y) = f(y - \cos x - x) + g(y - \cos x + x)$. □

Упражнение 6. *1. Нарисуйте несколько графиков функции $u(x, t)$ при разных t — решения волнового уравнения с начальными условиями $\varphi(x) = 1 - |x|$ при $x \in [-1, 1]$, $\varphi(x) = 0$ вне $[-1, 1]$ и $\psi(x) \equiv 0$. То же задание для $\varphi(x) = 1 - |x|$ при $x \in [-1, 1]$, $\varphi(x) = 0$ вне $[-1, 1]$ и $\psi(x) \equiv 0$.*
2. То же задание для начальных условий $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) = I_{[0,1]}(x)$. То же задание для $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) = 1 - |x|$ при $x \in [-1, 1]$, $\psi(x) = 0$ вне $[-1, 1]$
3. К моменту $t = 1$ необходимо привести струну к виду $u(x, 1) = 1 - x^2$ при $x \in [-1, 1]$, $u(x, 1) = 0$ вне $[-1, 1]$ и $u_t(x, 1) \equiv 0$. Считая $a = 1$ и не применяя к струне силу (т.е. уравнение струны $u_{tt} = u_{xx}$) подберите соответствующие начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.[2] То же задание для случая $u(x, 1) \equiv 0$, $u_t(x, 1) = I_{[0,1]}(x)$.
4. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — начальные условия для неоднородного уравнения струны $u_{tt} = a^2 u_{xx} + 1$, равны нулю вне отрезка $[-l, l]$ и непрерывны на этом отрезке. Докажите, что $u(x, t) = t^2/2 + O(1)$ при $t \to +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$, т.е., что $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x, t) - t^2/2| < M$ при всех $t > T$ для некоторых $M > 0$ и $T > 0$.[3]
5. Пусть струна удовлетворяет уравнению $u_{tt} = u_{xx} + f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Пусть начальные условия равны $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$. Не применяя слишком большую силу, т.е.

[2] Такие задачи называются задачами с финальными уловиями (сравните с задачами с начальными условиями)

[3] Такие задачи называют задачами об асимптотическом поведении решения

считая, что $|f(x,t)| \leq 1$, *приведите струну к моменту* $t = 1$ *к состоянию* $u(x,1) = 1$, *т.е. найдите подходящую функцию* f.[4]
6. Получите аналоги формулы Д'Аламбера для задачи $u_{tt} = u_{xx}$ *с начальными условиями* $u(x,kx) = \varphi(x)$, $u_t(x,kx) = \psi(x)$. *При каких* k *это возможно?*
7. Решите задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = 3x^2,\ u_y(x,0) = 0.$$

[4]Такие задачи называют задачами управления

Лекция 5. Уравнение струны (продолжение)

Теорема 6. *Пусть в некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ дано уравнение вида*

$$a(x,t)u_{tt} + 2b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{xx} + A(x,t)u_x + B(x,t)u_t = f(x,t,u),$$

причем функции a, b и c достаточно гладкие, функция $a(x,t)$ в области $\mathcal{D}$ не обращается в ноль, а выражение $b^2(x,t) - a(x,t)c(x,t)$ положительно всюду в $\mathcal{D}$ (такие уравнения называют гиперболическими). Тогда пара обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b(x,t) \pm \sqrt{b(x,t)^2 - a(x,t)c(x,t)}}{a(x,t)}$$

удовлетворяет условиями теоремы существования и единственности, т.е. через каждую точку $(x,t) \in \mathcal{D}$ проходит одна интегральная кривая $\xi(x,t) = const$ первого уравнения и одна интегральная кривая $\eta(x,t) = const$ второго. Определенные таким образом кривые задают в $\mathcal{D}$ криволинейные координаты (ξ, η). Уравнение на функцию u в этих координатах имеет вид

$$\beta(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)u_\xi + D(\xi,\eta)u_\eta = g(\xi,\eta,u).$$

Доказательство. Часть доказательства уже прописана в формулировке теоремы. Надо еще проверить, что J — якобиан замены, невырожден для каждой точки (x,t). Для этого заметим, что по, определению,

$$0 = d(\xi(x,t)) = (\xi_x \frac{dx}{dt} + \xi_t)dt = \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\xi_x + \xi_t\right)dt.$$

Аналогично,

$$\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\eta_x + \eta_t = 0.$$

Тогда ξ_x не может обратиться в ноль (это влечет $\xi_t = 0$, что для интегральной кривой невозможно), аналогично, для η_x, а, кроме того,

$$J = \xi_x\eta_t - \xi_t\eta_x = \xi_x\eta_x\left(-\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} + \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right) = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}\xi_x\eta_x \neq 0.$$

Теперь остается найти вид уравнения в новых координатах. Аккуратно проводим вычисления и получаем, что

$$\alpha(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + \beta(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + \gamma(\xi,\eta)u_{\eta\eta} + C(\xi,\eta)u_\xi + D(\xi,\eta)u_\eta = g(\xi,\eta,u),$$

где $\alpha = a(\xi_t)^2 + 2b\xi_t\xi_x + (\xi_x)^2 = 0$, $\gamma = a(\eta_t)^2 + 2b\eta_t\eta_x + (\eta_x)^2 = 0$, а

$$\beta = a\xi_t\eta_t + 2b(\xi_t\eta_x + \xi_x\eta_t) + c\xi_x\eta_x = \left(2c - \frac{4b^2}{a}\right)\xi_x\eta_x \neq 0$$

в $\mathcal{D}$. □

Определение 15. *Если в уравнении*

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = f(x,y,u),$$

заданном в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, выражение $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$ строго отрицательно в $\mathcal{D}$, то такое уравнение называется эллиптическим. Если это выражение тождественно равно нулю в $\mathcal{D}$, то уравнение называется параболическим.

Параболическое уравнение приводится к каноническому виду так же, как и гиперболическое — надо составить характеристическое уравнение, найти его (единственный) корень, решить полученное ОДУ и взять эту функцию за переменную ξ. Вторую переменную при этом можно выбирать произвольно.

Пример 18. *Приведите уравнение $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u$ к каноническому виду и решите его.*

Решение. Заменяем ∂_x на dy, а ∂_y на $-dx$:

$$(dy)^2 - 2(dx)(dy) + (dx)^2 = 0 \iff dy = dx \iff y - x = const.$$

Положим $\xi = y - x$, $\eta = y + x$. Тогда

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = -u_\xi + u_\eta, \quad u_y = u_\xi + u_\eta,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta},\ u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

а уравнение принимает вид $4u_{\eta\eta} = u$, откуда

$$u = C_1(\xi)e^{\eta/2} + C_2(\xi)e^{-\eta/2} = C_1(y-x)e^{(x+y)/2} + C_2(y-x)e^{-(x+y)/2}.$$

□

Эллиптические уравнения тоже можно приводить к каноническому виду, хотя метод немного другой. Мы не будем доказывать здесь общей теоремы — она аналогична, а покажем это на примере.

Пример 19. *Приведите уравнение*

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0, \quad x,\, y > 0,$$

к каноническому виду.

Решение. Уравнение характеристик имеет вид

$$y(dy)^2 + x(dx)^2 = 0 \iff \sqrt{y}dy = \pm i\sqrt{x}dx,$$

корни мнимые, уравнение эллиптическое. Решаем эти ОДУ $y^{3/2} \pm ix^{3/2} = c$. Далее метод таков: надо перейти к новым координатам по правилу $\xi = \mathrm{Re}c$, $\eta = \mathrm{Im}c$ (это общее правило). В нашем случае имеем $\xi = y^{3/2}$, $\eta = x^{3/2}$ (знак выбираем на наше усмотрение). Тогда

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = \frac{3}{2}x^{1/2}u_\eta, \quad u_y = \frac{3}{2}y^{1/2}u_\xi,$$
$$u_{xx} = \frac{3}{4}x^{-1/2}u_\eta + \frac{9}{4}xu_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = \frac{3}{4}y^{-1/2}u_\xi + \frac{9}{4}yu_{\xi\xi},$$

а уравнение принимает вид

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3}y^{-3/2}u_\xi+\frac{1}{3}x^{-3/2}u_\eta=0 \iff u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_\xi+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0.$$

Это и есть его канонический вид (старшие производные формируют оператор Лапласа). $\square$

Надо признать, что пока для нас этот канонический вид не дает ничего, кроме морального удовлетворения — уравнение не решается.

Вернемся к классическому уравнению струны $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $a>0$. Формулы Д'Аламбера и Дюамеля, хотя и являются полными описаниями решений уравнения струны, имеют существенный недостаток: они дают решение уравнения, заданного на всей оси $x\in\mathbb{R}$, в то время, как в реальности струна конечна. Здесь в дело вступают краевые условия (напомню, что начинали мы с условий закрепления $u(0,t)=u(l,t)=0$). Попробуем разобраться. Чтобы не наслаивать сложности, начнем со случая полубесконечной струны.

Итак, пусть

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x,\,t\in[0,+\infty),\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ u(0,t)=0.$$

Общее решение уравнения мы знаем: $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$. Подставляя $t=0$, находим

$$f(x)+g(x)=\varphi(x),\quad -af'(x)+ag'(x)=\psi(x),$$

но соотношения эти справедливы только при $x>0$. Тогда, как и ранее,

$$f(y)=\frac{1}{2}\varphi(y)-\frac{1}{2a}\int_0^y\psi(\xi)\,d\xi,\quad g(y)=\frac{1}{2}\varphi(y)+\frac{1}{2a}\int_0^y\psi(\xi)\,d\xi,$$

но только при $y>0$. Поскольку $t>0$, то с функцией g проблем нет — ее аргумент положителен (эта волна уходит вправо и не замечает краевого условия в точке $x=0$). А вот с функцией f проблемы есть — ее аргумент может оказаться отрицательным. Где же взять значения этой функции $f(y)$ при $y<0$? Используем граничное условие

$$u(0,t)=0 \implies f(-t)+g(t)=0.$$

Отлично, значит значения функции f при отрицательных ее аргументах мы можем вычислить через уже известные нам значения функции g. Итак, при $y<0$

$$f(y)=-g(-y)=-\frac{1}{2}\varphi(-y)-\frac{1}{2a}\int_0^{-y}\psi(\xi)\,d\xi=-\frac{1}{2}\varphi(-y)+\frac{1}{2a}\int_0^{y}\psi(-\xi)\,d\xi.$$

Немного подумав, приходим к выводу — функцию f можно задавать единой формулой

$$f(y)=\frac{1}{2}\varphi(y)-\frac{1}{2a}\int_0^y\psi(\xi)\,d\xi,$$

но предварительно надо продолжить данные нам функции φ и ψ на отрицательную полуось нечетным способом.

Пример 20. *Пусть $\psi(x) \equiv 0$, $\varphi(x) = 1-|x-3|$ при $x \in [2,4]$, а вне этого отрезка $\varphi(x) = 0$. Нарисуйте несколько графиков решения волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ на полуоси $x \geq 0$ с такими начальными условиями и граничным условием $u(0,t) = 0$.*

Мы видим, что левая волна, дойдя до точки $x = 0$ закрепления, отражается (при этом, волна вначале пропадает, а затем переворачивается) и бежит вправо.

Каждый, кто видел морские волны, набегающие на причал, скажет, что там все происходит по–другому. Набегающая волна никуда не пропадает — она наоборот высоко всплескивает, ударяясь о стенку причала. И она не переворачивается — она откатывается назад пусть меньшего размера, но выпуклой вверх, а не вниз. В чем тут дело? Ответ простой — в этой задаче краевое условие другое. Действительно, мы запрещаем волне колебаться на краю моря. Правильное условие здесь — *условие непротекания* $u_x(0,t) = 0$: мы запрещаем волне двигаться сквозь стену причала. Найдем решение этой новой задачи. Имеем

$$u(x,t) = f(x-at)+g(x+at), \quad f(y) = \frac{1}{2}\varphi(y)-\frac{1}{2a}\int_0^y \psi(\xi)\,d\xi, \quad g(y) = \frac{1}{2}\varphi(y)+\frac{1}{2a}\int_0^y \psi(\xi)\,d\xi$$

при $y > 0$. Если же учесть краевое условие, то получим $f'(-at)+g'(at) = 0$ при всех $t > 0$, т.е.

$$f'(-y) = -\frac{1}{2}\varphi'(y) - \frac{1}{2a}\psi(y) \Longrightarrow f(-y) = f(0) - \int_0^y f'(-\xi)\,d\xi.$$

Поскольку $f(0) = \frac{1}{2}\varphi(0)$, то

$$f(-y) = \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^y \varphi'(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^y \psi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\varphi(y) + \frac{1}{2a}\int_0^y \psi(\xi)\,d\xi.$$

Опять же можно заметить, что достаточно воспользоваться стандартной формулой Д'Аламбера в которой функции φ и ψ предварительно надо продолжить четным образом.

Пример 21. *Пусть $\psi(x) \equiv 0$, $\varphi(x) = 1-|x-3|$ при $x \in [2,4]$, а вне этого отрезка $\varphi(x) = 0$. Нарисуйте несколько графиков решения волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ на полуоси $x \geq 0$ с такими начальными условиями и граничным условием $u_x(0,t) = 0$.*

Мы видим, что левая волна, дойдя до точки $x = 0$ закрепления вначале удваивается по высоте, а затем отражается в неизмененном виде и бежит вправо. Вот теперь все верно. Мы даже смогли объяснить тот всплеск, который наблюдается при ударе волны о причал.

Мы разобрали краевое условие $u(0,t) = 0$ (его называют *условие Дирихле*) и условие $u_x(0,t) = 0$ (его называют *условие Неймана*). В жизни встречаются и более хитрые условия, например *условие Робина* (или третья краевая задача) $u_x(0,t) + ku(0,t) = 0$. Согласитесь, каждый раз действовать заново по одной и той же схеме нерационально. Давайте выводить общие формулы

Пример 22. *Решим уравнение $u_{tt} = a^2u_{xx}$ в области $t > 0$, $x > 0$, с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, и краевым условием $u(0,t) = F(t)$.*

Решение. Будем искать решение в виде суммы прямой и обратной волны

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at).$$

Мы уже знаем, что решения распространяются по характеристикам $x = c \pm at$. При $x > at$ информация о функции F не успеет дойти до точки x. Значит, в этих точках решение будет задаваться формулой Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi, \quad x > at.$$

При $x < at$ решение определяется формулой Д'Аламбера с начальными условиями, продолженными нечетно на всю ось, и граничной модуляцией — функцией $F(t)$. Причем волна, порожденная функцией F идет направо, т.е. имеет вид $f(x-at)$. Итак,

$$\begin{aligned}u(x,t) = \frac{-\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0} \psi(-\xi)\,d\xi + f(x-at) = \\ = \frac{-\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi)\,d\xi + f(x-at), \quad x < at.\end{aligned}$$

Функцию f найдем подстановкой $x = 0$. Получим $u(x,0) = F(t) = f(-at)$, т.е. $f(x-at) = F(t - x/a)$. Итак,

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi, & x > at, \\ \frac{-\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi)\,d\xi + F(t-x/a), & x < at. \end{cases}$$

□

Поговорим еще о согласовании условий. Рассмотрим такой пример. Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, с начальными условиями $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$ и краевым условием Дирихле $u(0,t) = 0$. Продолжив начальные данные нечетным образом, по формуле Д'Аламбера получаем

$$u(x,t) = \begin{cases} t, & \text{если } t < x, \\ x, & \text{если } t > x. \end{cases}$$

Сама функция непрерывна, но ее производные имеют разрывы на диагонали $t = x$ (кстати, это ведь характеристика нашего уравнения, так что заодно видим подтверждения принципа — разрывы и изломы решения распространяются по характеристикам). Почему так произошло? Все просто — мы сами заставили решение иметь разрывную производную, поставив несогласованные начальные и граничные условия:

$$u_t(0,0) = u_t(x,0)|_{x=0} = 1 \neq 0 = \frac{d}{dt}u(0,t)|_{t=0}.$$

Всегда ли надо требовать выполнение условий согласования? Нет, мы уже поняли, что кроме классических решений бывают обобщенные. Но, конечно, переходя к обобщенному решению, надо строго формулировать, в каком классе функций мы его ищем, и уже здесь, в рамках этого класса, проверять условия согласования.

Ну и, наконец, вернемся к задаче, с которой мы начинали: $x \in [0, l]$. Теперь мы уже отлично понимаем, что с граничным условием в точке l надо поступить так же, как мы поступали с условием в точке 0. Если условие имеет вид $u(l,t) = 0$, то начальные данные надо продолжить за точку l нечетным относительно l способом. Если $u_x(l,t) = 0$, то продолжить надо четно.

Пример 23. *Найдите решение уравнения* $u_{tt} = 4u_{xx} - \sin t$, *где* $x \in [0,1]$, $t \geq 0$, *с начальными условиями* $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $u_t(x,0) = 1$ *и краевыми условиями* $u(0,t) = \sin t$, $u_x(1,t) = 0$.

Решение. Вначале «обнулим» левое краевое условие — подберем такую функцию $g(x,t)$, что $g(0,t) = \sin t$ и $g_x(1,t) = 1$ (таких функций, конечно, бесконечно много). Для этого можно использовать функцию $p(x) = 1 + \sin(\pi x/2)$ (эта функция равна 1 в нуле и имеет нулевую производную в $x = 1$) . Тогда можно взять

$$g(x,t) = \sin t \cdot p(x) = \left(1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\sin t.$$

Переходя к функции $v(x,t) = u(x,t) - g(x,t)$ получим

$$v_{tt} - 4v_{xx} = -\sin t + \left(1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\sin t - \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin t,$$
$$v(0,t) = v_x(1,t) = 0, \quad v(x,0) = \sin(\pi x),\ v_t(x,0) = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Продолжим функцию $f(x,t) = (1-\pi^2)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin t$ нечетным образом относительно точки $x = 0$ и четным образом относительно $x = 1$, получим то же выражение для $f(x,t)$, но уже для всех $x \in \mathbb{R}$. Функция $\sin(\pi x)$ после такого же продолжения принимает вид $\varphi(x) = \sin(\pi x)\,\mathrm{sign}(\cos(\pi x/2))$, а функция $-\sin(\pi x/2)$ не меняется. Тогда, по формуле Дюамеля,

$$v(x,t) = \frac{\varphi(x-2t) + \varphi(x+2t)}{2} - \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi + \frac{1-\pi^2}{4}\int_0^t \int_{x-2(t-s)}^{x+2(t-s)} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi\, ds =$$
$$= \frac{\varphi(x-2t) + \varphi(x+2t)}{2} - \frac{1}{2}\sin(2\pi t)\sin(\pi x) + \frac{\pi^2 - 1}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)(\cos(\pi t) - 1).$$

Возвращаем назад слагаемое $g(x,t)$, получаем ответ. □

Упражнение 7. *1. Решите уравнение* $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0$.

2. Решите уравнение $2xu_{xx} - 2yu_{yy} + u_x - u_y = 0$.

3. Найдите решение задачи Коши

$$4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = \psi(x).$$

4. Найдите решение задачи Коши

$$(1+x^2)u_{xx} - (1+y^2)u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = \psi(x).$$

5. *Запишите общую формулу для решения задачи*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ u_x(0,t) = F(t).$$

6. *Найдите непрерывное решение задачи*

$$u_{tt} = 9u_{xx},\ x > 0,\ t > 0, \quad u(x,0) = e^{-x},\ u_t(x,0) = \cos 5x,\ u_x(0,t) = u(0,t) + t.$$

7. *Решите задачу*

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = \sin t.$$

8. *Решите задачу*

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = \sin(\pi x/2),\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 0.$$

9. *Решите задачу*

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = -u(1,t).$$

Лекция 6. Уравнение струны (метод Фурье)

Уравнение струны (и на всей оси, и на полуоси, и на отрезке) мы рещать научились. Что дальше? Теперь, наверное, надо бы попробовать усложнить нашу математическую модель. Мы рассматривали совсем простую ситуацию, когда струна одородная и бесконечно тонкая, а колебания малые. Отказавшись от однородности, получим уравнение $u_{tt} = \rho(x)u_{xx}$. Учитывая вязкое трение среды, получим $u_{tt} = \rho(x)u_{xx} + b(x)u_x$. Учитывая упругое трение, получим $u_{tt} = \rho(x)u_{xx} + b(x)u_x + q(x)u$. Учитывая реакцию струны на изгиб (т.е. вспоминая о том, что она имеет толщину), получим $u_{tt} = \varepsilon u_{xxxx} + \rho(x)u_{xx} + b(x)u_x + q(x)u$. Наконец, рассматривая не только малые колебания, мы вернемся к нелинейному уравнению.

Вот последнего делать не будем! Останемся в рамках модели $u_{tt} = Au$, где A — некоторый дифференциальный оператор, действующий по переменной x. Струну будем считать конечной, т.е. $x \in [0, l]$. К сожалению, следует признаться, что ничего мы сказать о таких уравнениях не можем. Решать мы их на данный момент не умеем. Забегая вперед, скажу, что получить их явное решение в стиле $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$ мы не сможем. И тем не менее, мы сейчас предложим *общий метод* решения таких задач. Он позволит нам записывать ответ в виде функционального ряда.

Тренироваться будем на простой, уже известной нам модели. Пусть

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Мы знаем, что ответом является функция

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi,$$

где функции φ и ψ предварительно продолжены нечетным образом через точку 0 и точку l (и далее, на всю ось).

Рассуждать будем так. Фактически, мы ищем функцию вида $u(x,t) = \exp\{\sqrt{A}t\}f + \exp\{-\sqrt{A}t\}g$ — в абстрактной форме именно таковы решения уравнения $u_{tt} = Au$. Лиейный оператор A будем мыслить себе матрицей (бесконечной). Нам адо взять корень из этой матрицы и затем экспоненту. Вспомним, что делать это очень удобно, если матрица диагональна $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Тогда ответ пишется мгновенно: $\exp\{\sqrt{A}t\} = \operatorname{diag}\{e^{\sqrt{\lambda_1}}, e^{\sqrt{\lambda_1}}, \dots\}$. Но ведь матрица по оператору пишется только после того, как в пространстве выбран базис. Диагональной матрица оказывается в базисе из собственных векторов. Вот и результат: **надо искать собственные векторы оператора**. Учитывая, что в нашем случае оператор действует на функции, то термин «собственный вектор» меняется на «собственная функция». Затем надо разложить решение в ряд по собственным функциям — это и даст ответ.

Итак, начнем. В поиске собственных значений и собственных функций, запишем уравнение

$$f_{xx} = \lambda f,\ f(0) = f(1) = 0,$$

где $f = f(x)$, а параметр λ комплексный. Уравнение легко рещается

$$f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x},$$

где ветвь корня в $\mathbb{C}$ надо как–то зафиксировать (например, положив $\arg\lambda \in [0, 2\pi)$). Не забудем, что написанный ответ справедлив только при $\lambda \neq 0$. Случай $\lambda = 0$ особый, решение имет вид $f(x) = A + Bx$ Подставляя сюда краевые условия, получаем $f \equiv 0$, так что далее считаем $\lambda \neq 0$. Учитывая здесь краевые условия, получим систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель

$$\Delta(\lambda) = -\sqrt{\lambda}(e^{-\sqrt{\lambda}} + e^{\sqrt{\lambda}})$$

обращается в ноль. Имеем $\lambda = 0$ или

$$e^{-\sqrt{\lambda}} + e^{\sqrt{\lambda}} = 0 \iff e^{2\sqrt{\lambda}} = -1 \iff 2\sqrt{\lambda} = 2i\pi n \iff \lambda = -\pi^2 n^2,$$

где n пробегает целые числа. Окончательно, $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, где $n \in \mathbb{N}$. Теперь для каждого собственного значения найдем собственнную функцию. Это легко — из системы на A и B берем любое одно уравнение (например, первое), откуда

$$f_n(x) = Ae^{i\pi nx} - Ae^{-i\pi nx} = 2iA\sin(\pi nx).$$

Учитывая, что коэффициент A произволен (собственные векторы всегда определяются с точностью до множителя), положим, например, $A = 1/(2i)$.

Вывод: ответ к нашей исходной задаче надо искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(\pi nx).$$

Теперь понятно, почему этот метод называют методом Фурье. Для поиска коэффициентов ряда заметим, что

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n''(t) + \pi^2 n^2 c_n(t))\sin(\pi nx).$$

К нулевой функции может сходиться только нулевой ряд Фурье, т.е.

$$c_n''(t) = -\pi^2 n^2 c_n(t) \ \Leftrightarrow c_n(t) = a_n \sin(\pi nt) + b_n \cos(\pi nt).$$

Остается определить числа a_n и b_n. Подставляя $t = 0$, получим

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\sin(\pi nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi nx).$$

По формулам Фурье отсюда

$$b_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(\pi nx)\,dx.$$

Аналогично, дифференцируя по t и подставляя $t = 0$, получим

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0)\sin(\pi nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n a_n \sin(\pi nx).$$

Тогда

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \psi(x)\sin(\pi nx)\,dx.$$

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\pi nt)\sin(\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi nt)\sin(\pi nx),$$

где числа a_n и b_n определены выше.

Теорема 7. *Решение, полученное методом Фурье, совпадает с формулой Д'Аламбера.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\pi nt)\sin(\pi nx) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n(x-t)) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n(x+t)) = \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2},$$

где под функцией φ понимается продолженная нечетно на $[-1,0]$, а затем периодически, функция (не забываем, что числа b_n суть коэффициенты Фурье функции φ по системе синусов). Аналогично,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi nt)\sin(\pi nx) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n(x-t)) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n(x+t)).$$

Заметим, что

$$a_n = \frac{2\pi n^{1}}{\int_{\ 0}}\psi(x)\sin(\pi nx)\,dx = -2\int_0^1 \left(\int_0^x \psi(\xi)d\xi\right)\cos(\pi nx)\,dx,$$

а значит ряды выше сходятся к

$$-\frac{1}{2}\int_0^{x-t}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^{x+t}\psi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\,d\xi.$$

□

Обсудим детали решения. Почему решение единственно? Потому, что любая непрерывно дифференцируемая функция раскладывается в ряд Фурье единственным образом. В каком смысле сходится ряд? Заведомо, равномерно.

Определение 16. *Функции $f_n(x)$ не зависят от времени и при этом являются решениями нашей задачи. За это их называют стоячими волнами.*

Итак, мы научились действовать методом Фурье. Но решили мы опять ту же самую простейшую задачу! К счастью, метод вполне общий. В общей ситуации вместо $f_n(x) = \sin(\pi nx)$ будут по–просту другие функции.

Пример 24. *Найдите решение задачи*

$$u_{tt} = 9u_{xx} - bu_t,\ t > 0,\ 0 < x < \pi, \quad u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = \sin(x/2),\ u_t(x,0) = 0,$$

при $b > 0$. Каков смысл коэффициента b?

Решение. Вначале найдем собственные функции оператора $f \mapsto 9f_{xx}$ с краевыми условиями $f(0) = f'(\pi) = 0$. Точка $\lambda = 0$ собственным значением не является, т.к. уравнение $9f'' = 0$ имеет решение $f(x) = Ax + B$, которое удовлетворяет краевым условиям только при $A = B = 0$. При остальных $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$9f'' = \lambda f \ \Leftrightarrow\ f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x/3} + Be^{-\sqrt{\lambda}x/3}.$$

Учитывая краевые условия, получим

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\pi\sqrt{\lambda}/3} - Be^{-\pi\sqrt{\lambda}/3} = 0. \end{cases}$$

Нетривиальные решения существуют при

$$-e^{-\pi\sqrt{\lambda}/3} - e^{\pi\sqrt{\lambda}/3} = 0 \iff e^{2\pi\sqrt{\lambda}/3} = -1 \iff \frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{3} = i\pi(2n+1) \iff \lambda = -9(n+1/2)^2.$$

При таких числах $\lambda = \lambda_n$ имеем $B = -A$, т.е. собственные функции имеют вид

$$f_n(x) = \sin(n + 1/2)x,$$

где мы взяли подходящие нормировочные числа, а $n = 0, 1, 2, \ldots$. Эти функции уже не являются классическим базисом Фурье и требуется пояснение, почему произвольная функция $u(x,t)$ (при фиксированном $t > 0$) разложится в ряд по данной системе функций. Заметим, что все эти функции нечетны относительно точки $x = 0$ и четны относительно $x = \pi$. Возьмем произвольную непрерывную функцию $f(y)$ на отрезке $y \in [0, \pi]$, заменой $y = 2x$ сведем ее на $0 \le x \le \pi/2$, продолжим на отрезок $\pi/2 \le x \le \pi$ четным образом, а затем на отрезок $-\pi \le x \le 0$ нечетным. Тогда коэффициенты Фурье продолженной функции по косинусам обнулятся, равно как и коэффициенты при $\sin(nx)$ с четными n. Значит, $f(y)$ разложится в ряд Фурье по системе $\{\sin((2n+1)x)\}_{n\ge 0}$, т.е. по системе $\{\sin(n+1/2)y\}_{n=0}^{\infty}$.

Итак,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\sin(n+1/2)x, \quad c_n'' = -9c_n(n+1/2)^2 - bc_n'.$$

При этом начальные условия являются нулевыми при всех $n \ne 0$, т.к. функция $\sin(x/2)$ уже разложена в ряд по нашей системе — все коэффициенты, кроме самого первого равны нулю. Значит $c_n = 0$ при всех $n \ge 1$. При $n = 0$ имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + b\lambda + 9/4 = 0 \iff \lambda_n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 9}}{2}.$$

Далее все зависит от величины числа b. Если $b < 3$, то с учетом $c_0(0) = 1$, $c'(0) = 0$,

$$c_0(t) = e^{-b/2t} \left(\cos(\sqrt{9-b^2}t/2) - \frac{b}{\sqrt{9-b^2}} \sin(\sqrt{9-b^2}t/2) \right)$$

Если $b = 3$, то

$$c_0(t) = e^{-3/2t} \left(-\frac{3t}{2} + 1 \right).$$

Наконец, при $b > 3$ имеем

$$c_0(t) = \frac{\sqrt{b^2-9}+b}{2\sqrt{b^2-9}} \exp \frac{-b+\sqrt{b^2-9}}{2} t + \frac{\sqrt{b^2-9}-b}{2\sqrt{b^2-9}} \exp \frac{-b-\sqrt{b^2-9}}{2} t.$$

В любом случае, общий ответ имеет вид

$$u(x,t) = c_0(t) \sin(x/2).$$

□

Мы видим, что решение опять имеет вид волны с постоянным профилем. Это, конечно, связано с тем, что такую форму имеет начальное условие. При этом, амплитуда волны не постоянна — она экспоненциально убывает, поскольку b имеет смысл коэффициента трения.

Пример 25. *Нефтепровод проложен в виде наземной трубы, опирающейся на вертикальные опоры. Расстояние между опорами* 1*. На одном из участков злоумышленники нанесли удар посередине между опорами, придав этой очке скорость v, направленную вверх. Не грозит ли нефтепроводу разрушение? Возьмите простейшую модель, в которой труба считается единым твердым телом.*

Решение. Итак, будем считать трубу твердым телом. Однако толщиной трубы пренебрегать нельзя. С другой стороны, в отличии от струны, труба нерастяжима. Значит труба реагирует не на растяжение (как струна), а на изгиб. Не вдаваясь в подробности, считаем, что сопротивление изгибу описывается величиной $-a^2 u_{xxxx}$. Тогда уравнение колебаний имеет вид $u_{tt} = -a^2 u_{xxxx}$, где $t > 0$, $x \in [0,1]$. Концы участка трубы закреплены на опорах, т.е. смещением не обладают $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Однако уравнение имеет четвертый порядок и двух краевых условий мало! Заметим, что изгибающий момент в свободно опирающемся конце равен нулю (это неочевидно, но примем это как данность). Тогда $u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0$. Ну, и наконец, $u(x,0) = 0$ (трубопровод вначале находится в покое), и $u_t(x,0) = v\delta(x-1/2)$ (нанесен удар в точке $x = 1/2$). Силой тяжести пренебрегаем.

Решить эту задачу мы (на данном этапе) можем только методом Фурье. Найдем собственные функции оператора $Af = a^2 f_{xxxx}$ с краевыми условиями $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$. Имеем

$$a^2 f_{xxxx} = \lambda f \iff f(x) = Ae^{\lambda^{1/4}a^{-1/2}x} + Be^{i\lambda^{1/4}a^{-1/2}x} + Ce^{-\lambda^{1/4}a^{-1/2}x} + De^{-i\lambda^{1/4}a^{-1/2}x}.$$

Учитывая краевые условия, получаем систему (здесь $\mu = e^{\lambda^{1/4}a^{-1/2}}$, а $\nu = e^{i\lambda^{1/4}a^{-1/2}}$)

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ A-B+C-D=0, \\ A\mu+B\nu+C\mu^{-1}+D\nu^{-1}=0, \\ A\mu-B\nu+C\mu^{-1}-D\nu^{-1}=0. \end{cases} \iff \begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ A\mu+C\mu^{-1}=0, \\ B\nu+D\nu^{-1}=0. \end{cases}$$

Легко видеть, что система распалась на две системы размера 2×2, а определитель матрицы системы равен

$$\Delta(\lambda) = (\mu^{-1}-\mu)(\nu^{-1}-\nu).$$

Нетривиальные решения системы возможны только при условии $\Delta(\lambda)=0$, т.е. $\mu=\pm 1$ или $\nu=\pm 1$. Имеем

$$\begin{array}{lclcl} e^{\lambda^{1/4}a^{-1/2}}=1 & \iff & \lambda^{1/4}a^{-1/2}=2\pi i n & \iff & \lambda=\pi^4a^2(2n)^4, \\ e^{\lambda^{1/4}a^{-1/2}}=-1 & \iff & \lambda^{1/4}a^{-1/2}=\pi i(2n+1) & \iff & \lambda=\pi^4a^2(2n+1)^4, \\ e^{i\lambda^{1/4}a^{-1/2}}=1 & \iff & i\lambda^{1/4}a^{-1/2}=2\pi i n & \iff & \lambda=\pi^4a^2(2n)^4, \\ e^{i\lambda^{1/4}a^{-1/2}}=-1 & \iff & i\lambda^{1/4}a^{-1/2}=\pi i(2n+1) & \iff & \lambda=\pi^4a^2(2n+1)^4, \end{array}$$

так что собственные числа равны $\lambda_n=\pi^4a^2n^4$, где $n\in\mathbb{N}$ (случай $n=0$ разберите сами). Собственные функции имеют вид $f_n(x)=\sin(\pi n x)$, так что

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(\pi n x).$$

Подставляя эту функцию в уравнение, получаем уравнения на коэффициенты

$$c_n''=-\pi^4a^2n^4c_n \iff c_n(t)=a_n\cos(\pi^2an^2t)+b_n\sin(\pi^2an^2t).$$

Остается определить числа a_n и b_n при помощи начальных условий. Имеем

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(\pi n x)=0,$$

т.е. все $a_n=0$. При учете второго начального условия получаем равенство

$$u_t(x,0)=v\delta(x-1/2)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi^2an^2b_n\sin(\pi n x).$$

Будем действовать с функцией Дирака как с обычной непрерывной функцией, т.е. домножим равенство на $\sin(\pi k x)$ и проинтегрируем

$$v\sin(\pi k/2)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi^2an^2b_n\int_0^1\sin(\pi n x)\sin(\pi k x)\,dx=\frac{\pi^2ak^2b_k}{2}.$$

Тогда b_n с четными номерами обнулятся, а при $n=2m+1$ имеем $b_n=2v(-1)^m/(\pi^2an^2)$, $m\geq 0$. Ответ:

$$u(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2v(-1)^m}{\pi^2a(2m-1)^2}\sin(\pi^2a(2m-1)^2t)\sin(\pi(2m-1)x).$$

В частности, при всех t и x

$$|u(x,t)| \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2v}{\pi^2 a(2m-1)^2} = \frac{v}{4a}.$$

Вывод: никаких резонансных явлений не возникает, так что если в первый момент разрушение не произошло, то и далее разрушение нефтепроводу не грозит. □

Правильно говорят, что умение решать задачи методом Фурье для математика — то же, что умение строгать для столяра. Так что здесь требуется настоящая тренировка.

Упражнение 8. *Решите методом Фурье задачи*
1. $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $u_x(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.
2. $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(1,t) = 0$.
3. $u_{tt} = -u_{xxxx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $u(0,t) = u_x(0,t) = 0$, $u(1,t) = u_x(1,t) = 0$ *(балка, заделанная с двух сторон).*
4. $u_{tt} = -u_{xxxx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $u(0,t) = u_x(0,t) = 0$, $u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0$ *(балка, заделанная с одной стороны). 5.* $u_{tt} = u_{xx} - 4u$, $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = x^2 - x$, $u_t(x,0) = 0$.
6. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \pi x - x^2$, $u_t(x,0) = 0$.
7. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, $u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x$.

Лекция 7. Уравнение диффузии (конечный отрезок)

Расстанемся с уравнением струны. Точнее, перейдем к другим вопросам, а полученные результаты (а главное, методы и идеи!) положим себе в копилку. Вы конечно понимаете, что вопросы далеко не исчерпаны. Метод Фурье отлично работает на конечном отрезке, но, как правило, сбоит для задач на всей прямой или полупрямой. Что, например, делать с уравнением колебаний $u_{tt} = \rho(x)u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, нам не ясно. Здесь, оказывается, есть свой метод, но разбирать его удобнее на примере другого уравнения.

Займемся одномерным уравнением диффузии. Представим себе такую картину. На длинной прямой улице через равные промежутки h метров расположены магазины дамского белья. Некой даме стало известно, что в одном из этих магазинов продаются эксклюзивные французские фильдеперсовые чулки. Дама в волнении начинает бегать от одного магазина к другому. Она не знает, что информация неверна — искомых чулок нет ни в одном магазине. Подбежав к очередному магазину и узнав, что чулок там нет, дама бежит к следующему. Но поскольку она находится в ажитации, то каждый раз забывает, с какой стороны (слева или справа) она подбежала к магазину и выбирает направление к новому магазину (влево или вправо) наугад.

Несложно видеть, что поведение дамы описывается марковским процессом с бесконечным числом состояний (магазины) и простейшей матрицей перехода (все нули, а по двум смежным с главной диагоналям 1/2). Представим себе, что таких дам на прямой много, очень много. И все они мечутся от магазина к магазину, не взаимодействуя луг с другом. Это и есть описание одномерной диффузии молекул вещества. Перейдем однако к формульным выражениям.

Занумеруем магазины целыми числами j, а такты времени (мы считаем скорость всех дам одинаковой, т.е. за один такт времени каждая из них пробегает расстояние h) обозначим $n = 0, 1, 2, \ldots$. Будем считать, что один такт длится ровно τ секунд. Число дам, находящихся в момент времени n в магазине j, обозначим $N_{j,n}$. Потоком $q_{j,n}$ в точке j в момент n назовем разность между числом дам, пробегающих вправо и числом, пробегающих влево за единицу времени. Поскольку число дам, бегущих влево и вправо в среднем равно половине всех дам, находящихся в данной точке, то $q_{j,n} \approx \frac{1}{2\tau}(N_{j-1,n} - N_{j+1,n})$. Теперь перейдем к непрерывной модели, положив $x = jh$, $t = n\tau$ и устремив $h \to 0$, $\tau \to 0$. Введем плотность вещества $\rho(x,t) = N_{j,n}/h$, $h \to 0$ (массу частиц, т.е. дам, мы считаем единичной). Тогда

$$q(x,t) = \frac{h}{2\tau}(\rho(x-h,t) - \rho(x+h,t)) \approx -\frac{h^2}{\tau}\rho_x(x,t).$$

Будем считать, что величина $h^2\tau^{-1}$ имеет конечный предел $\varkappa$ при $h \to 0$, $\tau \to 0$ (это скорость диффузии и она, действительно, конечна, как показывает эксперимент).

Теперь зафиксируем некоторый участок прямой $[x, x+\Delta x]$. За время Δt через левую границу перейдет $q(x,t)\Delta t$ частиц, а через правую $q(x+\Delta x,t)\Delta t$ частиц. Тогда изменение плотности равно

$$\Delta\rho(x,t)\Delta x \approx -q'_x(x,t)\Delta x\Delta t.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\rho_t(x,t) = -q_x(x,t) \implies \rho_t(x,t) = \varkappa\rho_{xx}(x,t).$$

Ясно, что кроме самого уравнения, нужны граничные условия и начальное распределение частиц на отрезке. Граничные условия здесь могут быть разными. Условие $\rho(0,t) = f(t)$ можно интерпретировать так: на границе отрезка поддерживается заданное число частиц $f(t)$ (возможно, меяющееся со временем). Условие $\rho_x(0,t) = f(t)$ имеет другую трактовку: на границе поддерживается заданный поток частиц (не забываем, что $q(x,t) = -\varkappa\rho_x(x,t)$). В частности, условие $\rho_x(0,t) = 0$ означает, что «граница на замке» и частицы через нее не проходят. Возможны и промежуточные условия типа $\alpha(t)\rho_x(0,t) + \beta(t)\rho(0,t) = 0$, которые увязывают величину потока и плотность на границе. Ну и конечно, возможен неоднородный случай, когда число частиц увеличивается или уменьшается внешним воздействием. Таким образом, задача выглядит так

$$u_t(x,t) = -\varkappa u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \quad V_0(u(x,t)) = V_l(u(x,t)) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),$$

где V_0 и V_l — те или иные краевые условия (мы перешли к привычному для нас обозначению неизвестной функции $u(x,t)$).

Остается заметить, что перенос тепла полностью аналогичен разобранной выше задаче о диффузии. Действительно, вернемся к нашей задаче о бегающих барышнях. Представим, что у каждой из них в кошельке находится несколько монет. В физической трактовке, температура — это мера движения частиц вещества. Так вот каждая дама (частица) несет с собой какую–то меру движения (монетки). В каждый такт времени происходит следующее — дамы перемещаются в новый магазин, а затем обмениваются монетами со всеми своими спутницами, оказавшимися в данный такт времени в одном магазине (монеты они делят поровну). Тогда можно следить не за барышнями, а за монетками и выводы будет сделаны такие же, как выше. Вообще–то, надо еще учесть, что барышни с большим числом монеток и бегают быстрее, но додумать это предлагается вам самим.

Приступим к решению задач теплопроводности=диффузии. Первое, что приходит в голову — метод Фурье.

Пример 26. *Решим задачу $u_t = u_{xx}$ на отрезке $0 \le x \le 1$ с граничными условиями $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ (концы отрезка изолированы от внешнего мира) и начальным условием $u(0,t) = \varphi(x)$.*

Решение. Применим метод Фурье. Найдем собственные значения и собственные функции оператора $f \mapsto f''$ с краевыми условиями $f'(0) = f'(1) = 0$. Прежде всего, заметим, что у этого оператора есть собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственной функцией $f_0(x) = 1$. Другие $\lambda \in \mathbb{C}$ обрабатываются стандартно

$$f_{xx} = \lambda f \;\Leftrightarrow\; f(x,\lambda) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Учитывая краевые условия, имеем

$$\begin{cases} A - B = 0, \\ Ae^{\sqrt{\lambda}} - Be^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Характеристический определитель равен $\Delta(\lambda) = -e^{-\sqrt{\lambda}} + e^{\sqrt{\lambda}}$, его нули $\lambda_n = -\pi^2 n^2$. Собственные функции $f_n(x) = \cos(\pi n x)$, $n \ge 1$.

Проведем разложение по собственным функциям

$$u(x,t) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\cos(\pi n x).$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$c_0'(t) = 0, \quad c_n'(t) = -\pi^2 n^2 c_n(t),$$

т.е. $c_0(t) = const = a_0$, $c_n(t) = a_n e^{-\pi^2 n^2 t}$. Остается найти числа a_n, учтя начальное условие

$$u(x,0) = \varphi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x).$$

Это обычный ряд Фурье по косинусам, т.е.

$$a_0 = \int_0^1 \varphi(x)\,dx, \quad a_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\cos(\pi n x)\,dx.$$

□

Обратите внимание, что все коэффициенты $c_n(t) \to 0$ экспоненциально, кроме клэффициета c_0. Таким образом, $u(x,t) \to c_0 = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$, т.е. температура с течением времени уравнивается и стремится к среднему значению исходной функции.

До сих пор мы решали методом Фурье толькооднородные задачи. Добавим правую часть.

Пример 27. *В условиях предыдущего примера заменим уравнение на* $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t)$.

Решение. Разложим функцию $f(x,t)$ (при фиксированном t и переменном x) в ряд Фурье по системе косинусов

$$f(t,x) = f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cos(\pi n x), \quad f_0(t) = \int_0^1 f(x,t)\,dx,\ f_n(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\cos(\pi n x)\,dx.$$

Тогда уравнения на $c_n(t)$ примут вид

$$c_0'(t) = f_0(t), \quad c_n'(t) = -\pi^2 n^2 c_n(t) + f_n(t),$$

а их решения

$$c_0(t) = a_0 + \int_0^t f_0(s)\,ds, \quad c_n(t) = e^{-\pi^2 n^2 t}\left(a_n + \int_0^t f_n(s) e^{\pi^2 n^2 s}\,ds\right).$$

Тогда решение имеет вид

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi^2 n^2 t}\cos(\pi n x) + \int_0^t f_0(s)\,ds + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t f_n(s) e^{\pi^2 n^2 (s-t)}\,ds\cos(\pi n x),$$

где числа a_n определяются в точности так же, как и раньше. □

Обратите внимание, что решение есть сумма решения однородного уравнения и частного решения.

Вернемся к уравнению струны. Что если мы добавим правую часть туда?

Пример 28. *Решим уравнение*

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Решение. Мы уже знаем, что раскладывать здесь надо по системе синусов $\{\sin(\pi n x)\}_1^\infty$. Так и сделаем. Получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(\pi n x), \quad f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(\pi n x),$$

где $f_n(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin(\pi n x)\,dx$. Тогда

$$c_n''(t) = -\pi^2 n^2 c_n(t) + f_n(t) \implies c_n(t) = a_n\sin(\pi n t) + b_n\cos(\pi n t) + \gamma_n(t),$$

где γ_n — частное решение нашего ОДУ (кто–нибудь помнит, как его искать?!). Ладно, напомню: оно выражается через фундаментальное решение $\sin(\pi n\xi))$ в виде

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{\pi n}\int_0^t \sin(\pi n(t-s))f_n(s)\,ds.$$

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin(\pi n t) + b_n\cos(\pi n t))\sin(\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\int_0^t \sin(\pi n(t-s))f_n(s)\,ds\sin(\pi n x),$$

где числа a_n и b_n определяются так же, как и раньше. □

Теперь попробуем добавить неоднородность в краевые условия.

Пример 29. *Однородный стержень $x \in [0,1]$ изолирован со всех сторон, кроме точке $x = 1$, где к нему подается постоянный тепловой поток $q(t) = e^{-t}$. В начальный момент времени температура всех точек стержня равна нулю. Считая скорость распространения тепла в стержне равной 1, найдите распределение температуры со временем.*

Решение. Для температуры $u(x,t)$ имеем

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = u_x(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = e^{-t}.$$

(в последнем условии поток надо брать с обратным знаком, но надо еще учесть, что он направлен внутрь стержня, т.е. справа налево). Подберем функцию $v(x,t) = -x^2e^{-t}/2$, которая имеет нулевую производную в точке $x = 0$ и $v_x(1,t) = -e^{-t}$, и положим $w = u + v$. Тогда $w_x(0,t) = 0$ и $w_x(1,t) = u_x(1,t) + v_x(1,t) = 0$. Так как

$$v_t = \frac{x^2}{2}e^{-t}, \quad v_{xx} = -e^{-t},\ \text{то}$$

$$w_t = w_{xx} + v_t - v_{xx} = w_{xx} + \frac{x^2+2}{2}e^{-t}.$$

Далее действуем по отработанной схеме

$$f_0(t) = \int_0^1 f(x,t)\,dx = \frac{7}{6}e^{-t}, \quad f_n(t) = 2\int_0^t f(x,t)\cos(\pi n x)\,dx = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}e^{-t}.$$

Раскладываем $w(x,t)$ в ряд $w(x,t) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\cos(\pi n x)$ и для коэффициентов ряда получаем

$$c_0'(t) = \frac{7}{6}e^{-t}, \quad c_n'(t) = -\pi^2 n^2 c_n(t) + \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}e^{-t},$$

откуда

$$c_0(t) = a_0 - \frac{7}{6}e^{-t}, \quad c_n(t) = a_n e^{-\pi^2 n^2 t} + \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\int_0^t e^{-\pi^2 n^2 (t-s)} e^{-s}\,ds =$$

$$= a_n e^{-\pi^2 n^2 t} + \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2(\pi^2 n^2 - 1)}\left(e^{-t} - e^{-\pi^2 n^2 t}\right).$$

Остается определить числа a_n. Заметим, что начальное условие поменялось, т.к.

$$w(x,0) = u(x,0) + v(x,0) = 0 - \frac{x^2}{2}.$$

Значит,

$$a_0 - \frac{7}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) = -\frac{x^2}{2},$$

т.е. $a_0 = -\int_0^1 x^2/2\,dx + 7/6 = 1$,

$$a_n = 2\int_0^1 \frac{-x^2}{2}\cos(\pi n x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}.$$

После небольших упрощений, получаем

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{7}{6}e^{-t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2 - 1}\left(\frac{e^{-t}}{\pi^2 n^2} - e^{-\pi^2 n^2 t}\right)\cos(\pi n x).$$

Остается «вернуть» функцию v, т.е. написать ответ в виде $u = w - v$. Для полноты картины, разложим функцию $v(x,t)$ в ряд по системе $\{1, \cos(\pi n x)\}_1^{\infty}$

$$v(x,t) = -\frac{1}{6}e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}e^{-t}\cos(\pi n x).$$

Отсюда получаем окончательнй ответ

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{7}{6}e^{-t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2 - 1}\left(\frac{e^{-t}}{\pi^2 n^2} - e^{-\pi^2 n^2 t}\right)\cos(\pi n x) + \frac{x^2}{2}e^{-t} =$$

$$= 1 - e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2 - 1}\left(e^{-t} - e^{-\pi^2 n^2 t}\right)\cos(\pi n x).$$

□

Как и следовало ожидать, с течением времени стержень нагревается. Суммарный поток тепла равен $\int_0^\infty q(t)\,dt = 1$ и в результате это тепло распределяется по стержню равномерно, так что $u(x,t) \to 1$ при $t \to +\infty$. Интересен слеующий момент: если проверить правое краевое условие, пользуясь первой формулой для $u(x,t)$, то получим

$$u_x(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2 - 1} \left(\frac{e^{-t}}{\pi^2 n^2} - e^{-\pi^2 n^2 t} \right) \sin(\pi n) + e^{-t} = e^{-t},$$

как и должно быть. Если воспользоваться вторым представлением, то

$$u_x(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2 - 1} \left(e^{-t} - e^{-\pi^2 n^2 t} \right) \sin(\pi n) = 0.$$

Почему не работает второе представление? Все просто — функция $x^2/2$ при ее продолжении четным образом на отрезок $[-1,0]$, а затем переодическим образом на всю числовую ось превращается в непрерывную, но не дифференцируемую функцию. Ее производная в точках $2k+1$ имеет разрыв первого рода (предел слева равен 1, а справа -1). Поэтому ряд Фурье ее производной сходится к полусумме этих пределов, т.е. к нулю. Это показывает, что пользуясь методом Фурье, желательно понимать, в каком смысле сходится ряд! Запомним эту сложность и отложим обсуждение до лучших времен.

Упражнение 9. *Решите методом Фурье следующие задачи*
1. $u_{tt} = u_{xx} + x$, $0 < x < \pi$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin 2x$, $u_t(x,0) = 0$;
2. $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1$, $0 < x < 1$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$;
3. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x$, $0 < x < \pi/2$, $u_x(0,t) = 2t$, $u_x(\pi/2,t) = \pi t$, $u(x,0) = \cos x$, $u_t(x,0) = 2x$;
4. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4+t) + \cos(3x/2)$, $0 < x < \pi$, $u_x(0,t) = t+1$, $u(\pi,t) = \pi(t+1)$, $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = x$;
5. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \ell$, $u(0,t) = 1$, $u(\ell,t) = 0$, $u(x,0) = 0$;
6. $u_t = u_{xx} + u + 2\sin(2x)\sin x$, $0 < x < \pi/2$, $u_x(0,t) = u(\pi/2,t) = u(x,0) = 0$;
7. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$, $0 < x < 1$, $u(0,t) = u(1,t) = t$, $u(x,0) = e^x \sin(\pi x)$;
8. $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x \cos(2x)$, $0 < x < \pi/2$, $u_x(0,t) = 1$, $u(\pi/2,t) = t^2 + \pi/2$, $u(x,0) = x$.

Лекция 8. Уравнение теплопроводности (продолжение)

Теорема 8. *Пусть $\varphi \in L_2[0,\pi]$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx), \quad \text{где } u_n(t) = \varphi_n e^{-n^2 t}, \quad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(nx)\,dx,$$

1. равномерно по $x \in [0,\pi]$ и по $t \in [t_0,+\infty)$ сходится к некоторой функции $u(x,t)$, которая
2. бесконечно дифференцируема по обеим переменнным при $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,+\infty)$;
3. удовлетворяет уравнению $u_t = u_{xx}$; 4. удовлетворяет граничным условиям $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$; 5. удовлетворяет начальному условию, в том смысле, что $u(x,t) \to \varphi(x)$ по метрике $L_2[0,\pi]$ при $t \to +0$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Рисса–Фишера. *Для любой функции $f \in L_2[0,\pi]$ ее коэффициенты Фурье $f_n = \sqrt{2/\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$ суммируются в квадратах, а сумма $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ сходится к числу $\|f\|^2 = \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$. Обратно, если последовательность чисел $\{f_n\}_1^{\infty}$ суммируема в квадратах, то ряд $\sqrt{2/\pi}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin(nx)$ сходится в $L_2[0,\pi]$ к некоторой функции $f \in L_2$ (в том смысле, что $\int_0^{\pi}|f(x) - \sqrt{2/\pi}\sum_{n=1}^{N} f_n\sin(nx)|^2\,dx \to 0$ при $N \to \infty$), причем $\sqrt{2/\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = f_n$. Таким образом, для любой $f \in L_2[0,\pi]$ ее ряд Фурье сходится к ней в L_2.* Согласно этой теореме, числа φ_n суммируемы в квадрате. Отсюда следует не только равномерная сходимость самого ряда, но и равномерная сходимость всех его формальных производных. Действительно, продифференцируем ряд α раз по x и β раз по t. Получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(-n^2)^{\beta}e^{-n^2t}(-1)^{[\alpha/2]}n^{\alpha}e_n(x),$$

где $e_n(x) = \sin(nx)$ при четных α и $\cos(nx)$ при нечетных. Теперь заметим, что коэффициенты ряда допускают оценку при $x \in [0,\pi]$, $t \geq t_0$ числами $\varphi_n n^{2\beta+\alpha}e^{-n^2t_0}$, которые суммируются. Значит, ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Отсюда по индукции выводим равномерную его сходимость именно к соответствующей производной функции $u(x,t)$. Итак, утверждения 1 и 2 доказаны. Равенство $u_t = u_{xx}$ проверяется непосредственно (мы уже знаем, что ряд можно дифференцировать почленно). Равенство $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ очевидно.

Для вывода последнего свойства снова применим теорему Рисса–Фишера. Пусть дано число $\varepsilon > 0$. Найдем такой номер N, что $\sum_{n=N}^{\infty}|\varphi_n|^2 < \varepsilon$. Теперь уменьшим $t \to +0$ так, чтобы все числа $|\varphi_n||e^{-n^2t} - 1|$ при $n < N$ стали меньше, чем $\sqrt{\varepsilon/N}$. Тогда

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t) - u_n(0)|^2 = \sum_{n=1}^{N-1}|\varphi_n|^2|e^{-n^2t} - 1|^2 + \sum_{n=N}|\varphi_n|^2|e^{-n^2t} - 1|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{\varepsilon}{N} + \sum_{n=N}^{\infty}|\varphi_n|^2 \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

Теорема 9. *Пусть $\varphi \in C[0,\pi]$, а ее коэффициенты Фурье суммируемы по модулю, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| < \infty$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx), \quad \text{где } u_n(t) = \varphi_n e^{-n^2 t}, \quad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,dx,$$

1. равномерно по $x \in [0,\pi]$ и по $t \in [t_0,+\infty)$ сходится к некоторой функции $u(x,t)$, которая
2. бесконечно дифференцируема по обеим переменнным при $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,+\infty)$;
3. удовлетворяет уравнению $u_t = u_{xx}$; 4. удовлетворяет граничным условиям $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$; 5. удовлетворяет начальному условию, в том смысле, что $u(x,t) \to \varphi(x)$ по метрике $C[0,\pi]$ при $t \to +0$.

Доказательство. Доказательство первых четырех утверждений проводится так же. В доказательстве последнего утверждения оценка меняется на

$$\|u(x,t)-\varphi(x)\|_C = \sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t)-u_n(0)| = \sum_{n=1}^{N-1}|\varphi_n||e^{-n^2t}-1| + \sum_{n=N}^{\infty}|\varphi_n||e^{-n^2t}-1| \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{N-1}\frac{\varepsilon}{N} + \sum_{n=N}^{\infty}|\varphi_n| \le \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

Изучим теперь уравнение теплопроводности на всей оси. Краевых условий здесь нет, а начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$ остается. Ряд Фурье здесь нам не поможет, но поможет его непрерывный аналог — преобразование Фурье. Вначале напомним, что для любой суммируемой на $\mathbb{R}$ по Лебегу функции $f(x)$ определено преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

с произвольным вещественным λ. Действительно, достаточно заметить, что $|f(x)e^{-i\lambda x}| \le |f(x)|$, а f по условию суммируема. Более того, из этой же оценки следует, что $|\hat{f}(\lambda)| \le \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx = \|f\|_{L_1}$, т.е. преобразование Фурье есть ограниченнная функция.

Заметим, что $\hat{f}(\lambda)$ непрерывна. Зафиксируем $\lambda = a$ и $\varepsilon > 0$. Вначале найдем такое число N, что $\int_{-\infty}^{-N}|f(x)|\,dx + \int_{N}^{+\infty}|f(x)|\,dx < \varepsilon$. Теперь оценим

$$\sqrt{2\pi}|\hat{f}(\lambda)-\hat{f}(a)| \le \int_{\mathbb{R}}|f(x)||e^{-i\lambda x}-e^{-iax}|\,dx \le 2\varepsilon + \int_{-N}^{N}|f(x)||e^{i(\lambda-a)x}-1|\,dx.$$

Пользуясь непрерывностью экспоненты в нуле подберем такое δ, что $|e^z-1| < \varepsilon$ при $|z| < \delta$. Приблизим число $\lambda-a$ к нулю так, что $|(\lambda-a)|N < \delta$. Тогда оставшийся интеграл получит оценку величиной $\varepsilon\int_{-N}^{N}|f(x)|\,dx \le \varepsilon\|f\|_{L_1}$.

Еще можо доказать, что $\hat{f}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$, но, к сожалению, нельзя утверждать, что $\hat{f}(\lambda)$ суммируема на $\mathbb{R}$. Однако если это так, то обратное преобразование Фурье корректно определено и возвращает нас к функции f. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ вместе со своим преобразованием Фурье $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ (тогда, кстати, обе эти функции непрерывны). Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}\, dx = f(x).$$

В пространстве L_2 ситуация опять проще. *Пусть $f \in L_2$. Тогда последовательность функций*

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx$$

сходится по норме $L_2(\mathbb{R})$ при $N \to \infty$ к некоторой функции $\hat{f}(\lambda)$, которую и называют преобразованием Фурье функции f. Эта функция, в свою очередь, лежит в $L_2(\mathbb{R})$, а ее обратное преобразование Фурье (вычисленное в таком же смысле) возвращает нас к $f(x)$, т.е.

$$(L_2) \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = f(x)$$

в смысле сходимости в L_2. Кроме того, $\|u\|_{L_2} = \|\hat{u}\|_{L_2}$.

Чем нам может пригодиться преобразование Фурье? Будем вначале действовать формально. Вспомним, что преобразование Фурье производной связано с преобразованием Фурье самой функции $\hat{f'} = i\lambda \hat{f}$. Тогда $\hat{u_{xx}} = -\lambda^2 \hat{u}$ и уравнение теплопроводности принимает вид $\hat{u}(\lambda, t)'_t = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t)$. Это уравнение легко решается

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{u}(\lambda, 0) e^{-\lambda^2 t},$$

а подставляя $t = 0$, получим $\hat{\varphi}(\lambda) = \hat{u}(\lambda, 0)$. Мы нашли явный вид функции $\hat{u}(\lambda, t)$. Остается восстановить функцию $u(x, t)$ по формуле

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda, \quad \text{где } \hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{6}$$

Теперь придадим нашим рассуждениям строгость.

Теорема 10. *Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда*
1. интеграл для $u(x,t)$ в (6) сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$;
2. функция $u(x,t)$ бесконечно дифференцируема по x и $t > 0$;
3. функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = u_{xx}$;
4. выполнено начальное условие в том смысле, что $u(x,t) \to \varphi(x)$ по метрике $L_2(\mathbb{R})$ при $t \to +0$.

Доказательство. Проведем формальное дифференцирование по x и по t под знаком интеграла — получим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda) (-\lambda^2)^{\beta} (i\lambda)^{\alpha} e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda.$$

Оценим модуль подынтегральной функции величиной $|\hat\varphi(\lambda)||\lambda|^{2\beta+\alpha}e^{-\lambda^2 t_0}$ — эта функция интегрируема по λ. Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\lambda)||\lambda|^{2\beta+\alpha}e^{-\lambda^2 t_0}\,d\lambda \le \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\lambda)|^2\,d\lambda}\cdot\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{4\beta+2\alpha}e^{-2\lambda^2 t_0}\,d\lambda} < \infty \tag{7}$$

(неравенство Коши–Буняковского и факт принадлежности $\varphi \in L_2$). Тогда, по признаку Вейерштрасса, имеем равномерную сходимость интеграла по параметрам $x \in \mathbb{R}$ и $t \ge t_0$. Тогда по индукции выводим бесконечную дифференцируемость функции $u(x,t)$. Равенство $u_t = u_{xx}$ проверяется непосредственно. Для доказательства пункта 4 заметим, что $\|u(x,t)-\varphi(x)\|_{L_2} = \|\hat u(\lambda,t)-\hat\varphi(\lambda)\|_{L_2}$. Последняя величина имеет вид

$$\|\hat u(\lambda,t)-\hat\varphi(\lambda)\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\lambda)|^2|e^{-\lambda^2 t}-1|^2\,d\lambda$$

и оценивается уже отработанным приемом. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Вначале, пользуясь сходимостью интеграла $\int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\lambda)|^2\,d\lambda$, подберем такое число N, что $\int_{|\lambda|>N} |\hat\varphi(\lambda)|^2\,d\lambda < \varepsilon$. Теперь, пользуясь непрерывностью функции e^z в нуле, найдем такое δ, что $|e^z-1|^2 < \varepsilon$ при $|z|<\delta$. Теперь уменьшим число t так, что $N^2 t < \delta$. Тогда

$$\int_{|\lambda|>N} + \int_{|\lambda|<N} |\hat\varphi(\lambda)|^2|e^{-\lambda^2 t}-1|^2\,d\lambda \le \varepsilon + \varepsilon\int_{|\lambda|<N} |\hat\varphi(\lambda)|^2\,d\lambda \le \varepsilon(1+\|\varphi\|_{L_2}^2).$$

□

Теорема 11. *Пусть непрерывная функция $\varphi(x)$ задана своим преобразованием Фурье, т.е. $\varphi(x) = \sqrt{2/\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat\varphi(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$, где $\hat\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда*
1. интеграл для $u(x,t)$ в (6) сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $t \ge t_0$;
2. функция $u(x,t)$ бесконечно дифференцируема по x и $t > 0$;
3. функция удовлетворяет уравнению $u_t = u_{xx}$;
4. выполнено начальное условие в том смысле, что $u(x,t) \to \varphi(x)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ при $t \to +0$.

Доказательство. Доказательство проводится абсолютно так же, с очевидными изменениями. Оценка (7) меняется на

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\lambda)||\lambda|^{2\beta+\alpha}e^{-\lambda^2 t_0}\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\lambda)|\,d\lambda\cdot\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\lambda|^{2\beta+\alpha}e^{-\lambda^2 t_0}\,d\lambda < \infty.$$

Пункт 4 выводится из оценки

$$\sqrt{2\pi}\|u(x,t)-\varphi(x)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}(\hat u(\lambda,t)-\hat\varphi(\lambda))\,d\lambda\right| \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}} |\hat u(\lambda,t)-\hat\varphi(\lambda)|\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\lambda)||e^{-\lambda^2 t}-1|\,d\lambda$$

и уже обычного для нас рассуждения. Для заданного $\varepsilon > 0$ вначале найдем такое число N, что $\int_{|\lambda|>N} |\hat{\varphi}(\lambda)|\, d\lambda < \varepsilon$. Теперь найдем число δ так, что $|e^{-N^2 t} - 1| < \varepsilon$ при $0 < t < \delta$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\lambda)||e^{-\lambda^2 t}-1|\, d\lambda = \int_{|\lambda|>N} + \int_{|\lambda|<N} |\hat{\varphi}(\lambda)||e^{-\lambda^2 t}-1|\, d\lambda \le \varepsilon+\varepsilon \int_{|\lambda|<N} |\hat{\varphi}(\lambda)|\, d\lambda = \varepsilon(1+\|\hat{\varphi}\|_{L_1}).$$

$\square$

Пример 30. *Найдем решение задачи теплопроводности для начальной функции* $\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Заметим, что

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2-i\lambda x}\, dx = \frac{e^{-\lambda^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\lambda)^2/2}\, dx = \frac{e^{-\lambda^2/2}}{2\pi} \int_{i\lambda-\infty}^{i\lambda+\infty} e^{-y^2/2}\, dy =$$
$$= \frac{e^{-\lambda^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy = \frac{e^{-\lambda^2/2}}{2\pi}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda^2/2}$$

(упражнение: замыканием контура обоснуйте равенство $\int_{i\lambda-\infty}^{i\lambda+\infty} e^{-y^2/2}\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy$). Итак, $\hat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$, так что можно применить предыдущую теорему и записать ответ в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2(t+1/2)+i\lambda x}\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/(4t+2)} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda\sqrt{t+1/2}-ix/\sqrt{4t+2})^2}\, d\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{4t+2}} e^{-x^2/(4t+2)} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(2t+1)}} e^{-x^2/(4t+2)}.$$

$\square$

Обратите внимание, что для каждой фиксированной точки $x \in \mathbb{R}$ температура $u(x,t)$ стабилизируется при $t \to +\infty$ к нулю. При этом общая энергия

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy = 1$$

остается неизменной.

Пример 31. *Найдем решение задачи теплопроводности для начальной функции* $\varphi(x) = 1$.

Решение. Ответ угадывается: $u(x,t) \equiv 1$. При этом доказанные нами теоремы не помогают: $\varphi \notin L_2(\mathbb{R})$ (не работает первая теорема) и $\hat{\varphi} \notin L_1(\mathbb{R})$ (иначе, $\varphi(x)$ стремилось бы к нулю при $x \to \pm\infty$; не работает вторая теорема). Однако получить ответ из нашей формулы все–таки можно. Заметим, что $\hat{\varphi}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\cdot\delta_0(\lambda)$ (дельта–функция Дирака). Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_0(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = 1.$$

Тогда

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda \equiv 1.$$

□

Последний пример наводит на мысли о модернизации формулы (6). Подставим выражение для $\hat{\varphi}$ в формулу для $u(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2 t + i\lambda x} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-i\lambda y}\, dy\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-y)} d\lambda\right) dy.$$

Теперь вычислим внутренний интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-y)} d\lambda = e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\lambda\sqrt{t} - \frac{i(x-y)}{2\sqrt{t}}\right)^2} d\lambda = e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R} - \frac{i(x-y)}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}.$$

Отсюда получаем тот же ответ, но в более простой форме

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}\, dy. \tag{8}$$

Полученный нами ответ назвыается *Формулой Пуассона.* Мы получили ее незаконным методом — в процессе упрощений переставили местами интегралы, что требует аккуратного обоснования. Однако вместо того, чтобы это обосновывать проще доказать теоремы заново, поскольку явный вид решения открывает возможность ослаблять условия в теоремах. Делать это сейчас мы не будем просто потому, что это требует определенных знаний по функциональному анализу. Сформулируем теорему без доказательства, отложив его на следующий семестр

Теорема 12. *Пусть функция $\varphi(x)$ лежит в одном из следующих классов*
а) $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$;
б) φ *непрерывна и ограничена* $\mathbb{R}$;
в) φ *непрерывна на* $\mathbb{R}$, *а функции* $|\varphi(x)|e^{-\varepsilon x^2}$ *интегрируемы на* $\mathbb{R}$ *при любом* $\varepsilon > 0$.
Тогда
1. *функция* (8) *определена при всех* $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ *и бесконечно дифференцируема на этой области;*
2. *выполнено равенство* $u_t = u_{xx}$;
3. *при* $t \to +0$ *выполнено* $\|u(\cdot,t) - \varphi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0$ *в случае а),*
$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t) - \varphi(x)| \to 0$ *в случае б),*
$\sup_{|x|<A} |u(x,t) - \varphi(x)| \to 0$ *при любом A в случае в).*

Пример 32. *Найдем решение задачи теплопроводности $u_t = u_{xx}$ на полуоси $x \geq 0$ для начальной функции $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)$ (индикатор отрезка $[0,1]$) и краевого условия $u_x(0,t) = 0$ (изолированный конец).*

Решение. Натренированные на волновом уравнении догадаемся продолжить начальное условие четным образом на левую полуось до функции $\varphi(x) = I_{[-1,1]}(x)$. Теперь запишем ответ для уравнения на всей оси

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}\, dy.$$

Он, естественно, годится и для полуоси. Надо только проверить краевое условие

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} \frac{y-x}{2t} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}\, dy\Big|_{x=0} = \frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} y y e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}\, dy = 0$$

в силу нечетности. Начальное условие выполнено в любом из перечисленных в теореме смыслах, поскольку функция $I_{[-1,1]}(x)$ непрерывна, ограничена и лежит в $L_2(\mathbb{R})$. Ответ можно еще свести к табличной функции, сделав замену $z = (y-x)/\sqrt{2t}$

$$u(x,t) = \Phi\left(\frac{-x+1}{\sqrt{2t}}\right) - \Phi\left(\frac{-x-1}{\sqrt{2t}}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\xi^2/2}\, d\xi$ — функция Лапласа. □

Обратимся в конце к неоднородному уравнению

$$u_t = u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

Повторяя наши рассуждения из неоднородной задачи для струны, приходим к ответу

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} dy + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} f(y,s) e^{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}}\, dy\, ds.$$

Для оправдания надо лишь проверить, что вторая функция удовлетворяет нулевым начальным условиям (это очевидно) и является частным решением (проверяется непосредственно).

Упражнение 10. *Решити следующие задачи*

1. $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = \sin x$;
2. $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = I_{[0+\infty)}(x)$;
3. $u_t = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = \sin t$;
4. $u_t = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u'_x(0,t) = \sin t$;
5. $u_t = u_{xx} - 2u_x$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = e^x \sin x$;[5]
6. $u_t = u_{xx} + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = 0$;
7. $u_t = u_{xx} + x$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = x$.

[5]Подсказка: не забывайте про замену Лиувилля $v(x,t) = u(x,t)e^{ax+bt}$

Лекция 9. Обобщенные функции

Наша удача с формулой Пуассона выглядит пока случайностью — так уж повезло, что после преобразования Фурье уравнение упростилось. На самом деле, случайностью является только явный вид ответа. Структура ответа является общим местом!

Давайте получим формулу Пуассона из следующих физических соображений. Начальное распределение тепла можно трактовать так: каждая точка числовой оси стала источником тепла. Потом эти источники сложились и породили распределение температуры $u(x,t)$. Но ответ линеен по фукции φ. Значит можно сказать по другому: каждый источник породил распределение температуры, а затем эти функции сложились. А какое распределение температуры порождает один точечный источник? Ясно, что моделью такого источника должна быть δ–функция Дирака (везде ноль, только в одной точке не ноль, а суммарно 1 единица тепла). Попробуем решить задачу

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = \delta_y(x),$$

где $\delta_y(x)$ — дельта–функция, сосредоточеная в точке $y \in \mathbb{R}$. Напомню, что $\int_{\mathbb{R}} \delta_y(x)\,dx = 1$ и вообще $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_y(x)\,dx = f(y)$ для любой непрерывной функции f. Тогда переходя к преобразованию Фурье, получим

$$\hat{u}_t = \hat{u}_{xx}, \quad \hat{u}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \delta_y(x) e^{-i\lambda x}\,dx = e^{-i\lambda y}.$$

Это уравнение легко решается $\hat{u}(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t - i\lambda y}$, а после обратного преобразования, получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\lambda,t) e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-y)}\,d\lambda = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{2\pi\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\,dz = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Теперь общий ответ собирается суммой ответов по всем источникам. Поскольку $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\delta_y(x)\,dx$, то

$$U(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) u(x,t)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy.$$

Получили формулу Пуассона. Значит, наша удача лишь частично связана с преобразованием Фурье — в другой задаче, например $u_t = a(x)u_{xx}$ или $u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u$ с начальным условием $u(x,0) = \varphi(x)$, следует тоже ожидать ответа вида

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \mathcal{E}(x,y,t)\,dy$$

с некоторой функцией $\mathcal{E}$, которую называют *фундаментальным решением*, *функцией Грина* и *интегральным ядром*. Эта функция вычисляется как решение задачи для начального условия, равного $\delta_y(x)$.

Пример 33. *Найдем функцию Грина для задачи $u_t = u_{xx}$ на отрезке $x \in [0, 1]$ с краевыми условиями Дирихле.*
Ответ к задаче с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ мы уже знаем

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) e^{-n^2 t} \sin(nx), \qquad u_n(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \varphi(y) \sin(ny)\, dy.$$

Преобразуем его к виду

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(y) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\sin(ny) e^{-n^2 t}\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n(x-y) - \cos n(x+y)) e^{-n^2 t}\, dy.$$

Для красоты продолжим еще функцию $\varphi(y)$ нечетным образом до функции $\tilde{\varphi}(y)$ на отрезок $[-\pi, \pi]$ и ответ примет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x-y) e^{-n^2 t}\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}(y) \mathcal{E}(x-y, t)\, dy,$$

где $\mathcal{E}(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\xi) e^{-n^2 t}$.

Вспомним, что интеграл вида $\int_{\mathbb{R}} f(x) g(x-y)\, dy$ называется сверткой двух функций и обозначается $f * g$. Итак, уже в двух задачах мы получили вид в виде свертки начального условия с фундаментальным решением.

Перед тем, как двигать дальше, поговорим подробнее о дельта–функции Дирака и вообще об обобщенных функциях.

Определение 17. *Рассмотрим класс бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{S}$ на $\mathbb{R}$, убывающих вместе со всеми своими производными при $|x| \to \pm\infty$ быстрее любой степени*

$$\forall k,\ j \geq 0: \quad \lim_{|x| \to \infty} (1 + |x|)^k |\varphi^{(j)}(x)| = 0$$

Ясно, что это линейное пространство. Назовем его $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и снабдим сходимостью

$$\varphi_n \to \varphi_0 \iff \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^k) |\varphi_n^{(j)}(x) - \varphi_0^{(j)}(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В пространстве $\mathcal{S}$ достаточно много функций. Например, там лежит функция $\varphi(x) = e^{-x^2}$, поскольку ее j–ая производная имеет вид $P_j(x) e^{-x^2}$, где P_j — многочлен степени j, так что $(1+|x|^k)|P_j(x)| e^{-x^2} \to 0$ при $|x| \to \infty$. Кроме того, в $\mathcal{S}$ лежит много функций с компактным носителем, т.е. $\varphi \in \mathcal{D} \Longleftarrow \exists A: \ \varphi(x) \equiv 0$ при $|x| > A$ (такое свйоство называют финитностью функции φ). Например, там лежит «шапочка» $\varphi(x) = \exp\{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}\}$, где $x \in (a, b)$, $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \notin (a, b)$. Мы будем обозначать ее $\varphi_{a,b}(x)$.

Пример 34. *Докажем, что $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема.*
Под вопросом только точки $x = a$ и $x = b$ — в остальных точках проводим обычное

формульное дифференцирование. Разберем точку a (точка b разбирается аналогично). Докажем непрерывность:

$$\lim_{x\to a-0}\varphi(x)=\lim_{x\to a-0}0=0,\qquad \lim_{x\to a+0}\varphi(x)=\lim_{x\to a+0}e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}}=0,$$

т.к. аргумент экспоненты стремится к $-\infty$. Теперь докажем дифференцируемость

$$\lim_{x\to a-0}\frac{\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}0=0,\qquad \lim_{x\to a+0}\frac{\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}}}{x-a}=0,$$

т.к. экспоненциальное стремление к нулю числителя по порядку выше стремления к нулю знаменателя. Далее действуем по индукции. Пусть уже доказано существование $n-1$ производной и равенство их нулю. Тогда n–ая производная может быть найдена как предел (это следует из формулы Тейлора)

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=0,$$

т.к. предел слева тождественно нулевой, а справа вновь говорим про экспоненциальное стремление к нулю числителя.

Взяв любую бесконечно дифференцируемую функцию $f(x)$ и умножив на $\varphi(x)$, получим бесконечно дифференцируемую функцию с носителем в $[a,b]$. По аналогии с «шапочкой», можно построить функцию $\omega(x)\in\mathcal{S}$, которая равна 1 на заданном отрезке $[b,c]$, равна 0 вне заданного отрезка $[a,d]$ (естественно, $a<b<c<d$), между точками a и b монотонно растет от 0 до 1, а от c до d монотонно убывает от 1 к 0. Эту функцию называют «шляпой». Мы будем далее ее использовать, обозначая $\omega_{a,b,c,d}(x)$.

Определение 18. *Выражения $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^k)|\varphi^{(j)}(x)|$ называют нормами на $\mathcal{S}$ и обозначают $\|\cdot\|_{j,k}$.*

Это, действительно, нормы, хотя на первый взгляд вызывает сомнение первая аксиома: $\|P\|_{j,k}=0$ для любого многочлена степени $<j$. Дело в том, что ни один многочлен в $\mathcal{S}$ не лежит.

Пример 35. *Найдите предел $\lim_{n\to\infty}xe^{-xt^2}$ в пространстве $\mathcal{S}$.*
Так как в каждой точке x выполнено $f_n(x)=xe^{-xt^2}\to 0$, то если предел последовательности существует в пространстве $\mathcal{S}$, то он равен нулю. Однако $\|f_n\|_{1,0}=\max_{x\in\mathbb{R}}|f_n'(x)|\geq f_n'(0)=1$ т.е. последовательность $\{f_n\}$ не имеет предела в пространстве $\mathcal{S}$.

Пример 36. *Пусть $\varphi_0(x)$ — «шляпа» на отрезке $[-1,1]$, определенная выше. Найдите предел в $\mathcal{S}$ последовательности функций*

$$f_n(x)=\varphi_0(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}.$$

Видим, что ряд сходится (поточечно) к e^x, так что предполагаемый предел есть $f(x)=\varphi_0(x)e^x$. Эта функция лежит в $\mathcal{S}$, т.к. имеет компактный носитель (отрезок

$[-1,1]$) *и бесконечно дифференцируема (как произведение двух функций из C^∞). Проверим сходимость $f_n \to f$ в смысле $\mathcal{S}$. Во–первых, множители $(1+|x|^k)$ во всех нормах можно оценить сверху 2. Далее заметим, что*

$$f^{(j)}(x) - f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right)^{(i)} \varphi^{(k-i)}(x).$$

При каждом фиксированном k здесь конечное чиисло слагаемых во внешней сумме и достаточно проверить равномерную сходимость к нулю каждого из них по отдельности. Множитель $\varphi^{(k-i)}(x)$ не зависит от n и не влияет тогда на равномерную сходимость. Оставшийся множитель

$$\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right)^{(i)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^{j-i}}{(j-i)!} \rightleftarrows 0$$

при $n \to \infty$ (ряд Тейлора для экспоненты сходится равномерно на любом конечном отрезке).

Определение 19. *На пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ введем линейный непрерывный функционал δ_c, который каждой функции φ сопоставляет число $\varphi(c)$. Этот функционал называют дельта–функцией Дирака, сосредоченной в точке c.*

Функционал действительно непрерывен (в смысле Гейне). Действительно, если функции $\varphi_n \to \varphi_0$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $\varphi_n(x) \rightleftarrows \varphi_0(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$ и, в частности, в точке c. Это означает, что $\delta_c(\varphi_n) \to \delta_c(\varphi_0)$.

Определение 20. *В целом, множество всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{S}$ обозначим через $\mathcal{S}'$ и назовем обобщенными функциями или распределениями.*

Распределения можно складывать и умножать на число (функционал $\alpha F + \beta G$ на функции φ принимает значение $\alpha F(\varphi) + \beta G(\varphi)$).

Определение 21. *Каждая локально интегрируемая по Лебегу (интегрируемая на каждом отрезке) функция $f(x)$, растущая на $\pm\infty$ не быстрее некоторого многочлена, порождает функционал для $\varphi \in \mathcal{S}$ по правилу*

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$$

(интеграл на бесконечности сходится, т.к. $f(x)\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени). Такие функционалы называют регулярными и отождествляют их с порождающими функциями $F \sim f$. Остальные обобщнные фуннкции называют сингулярыми. Действие функционала на функцию $\varphi \in \mathcal{S}$ обозначают $\langle f, \varphi \rangle$. Сами функции $\varphi \in \mathcal{S}$ называют тестовыми.

Например, функции x, $\sin x$, e^{-x^2} регулярны, а $\delta_a(x)$ сингулярна. При этом, например, функция e^{x^2} не лежит в $\mathcal{S}'$, т.к. «не умеет» действовать на e^{-x^2}.
Есть общий принцип — если какая–то операция корректно определяется для регулярных функций, то ее переносят на сингулярные функции с тем же определением.

Определение 22. *Пусть $f(x)$ локально суммируема и растет на $\pm\infty$ не быстрее некоторого многочлена, а $\varphi(x) \in \mathcal{S}$. Тогда определено поточечное произведение $f(x)\varphi(x)$, которое тоже локально суммируемо. Если этой функцией породить функционал, то для каждой $\psi \in \mathcal{S}$ имеем*

$$\langle f\varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\varphi(x)\big)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\big(\varphi(x)\psi(x)\big)\,dx = \langle f, \varphi\psi\rangle.$$

Тогда определим уже для любой $f \in \mathcal{S}'$ и любой $\varphi \in \mathcal{S}$ их произведение как функционал, который на каждой тестовой функции ψ принимает значение

$$\langle f\varphi, \psi\rangle := \langle f, \varphi\psi\rangle.$$

Определенние корректно, т.к. произведение любых двух функций из $\mathcal{S}$ лежит в $\mathcal{S}$.

Пример 37. *Для произвольной $\varphi \in \mathcal{S}$ найдите произведение $\delta_c(x)\varphi(x)$.*
По определению, для любой $\psi \in \mathcal{S}$

$$\langle \delta_c\varphi, \psi\rangle := \langle \delta_c, \varphi\psi\rangle = \varphi(c)\psi(c) = \varphi(c)\langle \delta_c, \psi\rangle.$$

Значит, $\delta_c(x)\varphi(x) = \varphi(c)\delta_c(x)$.

Определение 23. *Для любой гладкой регулярной функции $f \in C^1(\mathbb{R})$, которая растет на $\pm\infty$ не быстрее некоторого многочлена, определена операция дифференцирования. При этом*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}: \quad \langle f', \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\langle f, \varphi'\rangle$$

(мы провели интегрирование по частям и воспользовались убыванием к нулю $f\varphi$). Теперь уже для любой $f \in \mathcal{S}'$ положим по определению

$$\langle f', \varphi\rangle := -\langle f, \varphi'\rangle$$

Утверждение 10. *Мы построили линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$, т.е. для любой $f \in \mathcal{S}'$ производная f' вновь лежит в $\mathcal{S}'$.*

Доказательство. 1. Функционал определен корректно, т.к. для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ ее производная φ' определена, бесконечно дифференцируема и $\|\varphi'\|_{j,k} = \|\varphi\|_{j+1,k} < \infty$.
2. Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}$, то и $\varphi_n' \to \varphi_n$ в $\mathcal{S}$, т.к. $\|\varphi_n' - \varphi'\|_{j,k} = \|\varphi_n - \varphi\|_{j+1,j} \to 0$. □

Мы получили способ конструировать новые обобщенные функции: берем обычную локально интегрируемую, но не дифференцируемую функцию f и находим ее обобщенную производную — получаем обобщенную функцию f'.

Пример 38. *Найдем три первые обобщеннные производные функции $x_+ = x\theta(x)$ (здесь и далее мы обозначаем через $\theta(x)$ индикатор полуоси $x > 0$, эту функцию называют функцией Хевисайда).*
Для произвольной $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle x_+', \varphi\rangle = -\langle x_+, \varphi'\rangle = -\int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} x\,d\varphi(x) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx - x\varphi(x)\big|_0^{+\infty} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle \theta(x), \varphi(x)\rangle,$$

т.е. $x'_+ = \theta(x)$. *Вторая производная равна первой производной функции* $\theta(x)$. *Аналогично, для произвольной* $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle \theta'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle \theta(x), \varphi'(x)\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta_0(x), \varphi\rangle,$$

т.е. $\theta'(x) = \delta_0(x)$. *Третья производная равна производной функции* $\delta_0(x)$. *Опять для произвольной* $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle \delta_0', \varphi\rangle = -\langle \delta_0, \varphi'\rangle = -\varphi'(0).$$

Это новый для нас функционал — так и назовем его δ_0'.

Определение 24. *Пусть* $\xi(x) = ax + b$ *— линейная замена переменной с* $a \neq 0$. *Для любой локально суммируемой функции* f, *растущей не быстрее многочлена, композиция* $f(\xi(x))$ *определена и локально суммируема. При этом*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}: \quad \langle f(\xi(x)), \varphi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi((y-b)/a)\,dy = \frac{1}{a}\langle f, \varphi(\xi^{-1})\rangle.$$

Для произвольной $f \in \mathcal{S}'$ *определим теперь этим равенством композицию* $f(\xi)$ *— вновь функционал из* $\mathcal{S}'$.

Упражнение 11. *Найти предел или доказать расходимость в* $\mathcal{S}$ *следующих последовательностей* ($\varphi_0 \in \mathcal{S}$ *— ненулевая функция)*
1) $f_n(t) = \frac{1}{n}\varphi_0(t/n)$;
2) $f_n(t) = \frac{1}{n^2}\varphi_0(nt)$.
3) Возьмем шапочку $\varphi_{-2,-1}(x)$ *и умножим ее на коэффициент* k *так, чтобы ее полный интеграл стал* 1. *Докажите, что функция* $\int_{-\infty}^x k\varphi_{-2,-1}(y)\,dy$ *бесконечно дифференцируема, равна нулю при* $x \le -2$, *равна* 1 *при* $x \ge -1$ *и монотонно растет от* -2 *до* -1.
4) Докажите, что

$$\int_{-\infty}^x k\varphi_{-2,-1}(y)\,dy \cdot \left(1 - \int_x^{+\infty} k\varphi_{1,2}(y)\,dy\right)$$

— та самая «шляпа» $\omega_{-2,-1,1,2}(x)$, *которая описана в тексте лекции.*
5) Докажите, что любую функцию $\varphi \in \mathcal{S}$ *можно записать в виде* $\varphi(x) = \varphi(0)\omega_{-2,-1,1,2}(x) + x\psi(x)$ *для некоторой* $\psi \in \mathcal{S}$.
6) Докажите, что обобщенная функция $v.p.\frac{1}{x}$, *определенная равенством*

$$\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi\rangle = v.p.\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(x)}{x}\,dx,$$

где ψ *построенна в п.5), лежит в* $\mathcal{S}'$.
7) Докажите, что $(\ln|x|)' = v.p.\frac{1}{x}$.
8) Найдите произведение $x \cdot v.p.\frac{1}{x}$;
9) Докажите, что определение композиции $f(\xi)$ *корректно, т.е. действительно ззадает линейный непрерывный функционал на* $\mathcal{S}$.
10) Докажите, что $\delta_0(x-a) = \delta_a(x)$ *— дельта–функция, сосредоточенная в точке* a, *т.е.* $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$.

Лекция 10. Работа с обобщенными функциями: тренировка

Пример 39. *Найдите предел в $\mathcal{S}'$ последовательности $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} I_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)$.*

Доказательство. Для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle f_\varepsilon, \varphi(x) - \varphi(0)\omega_{-2,-1,1,2} \rangle + \varphi(0)\langle f_\varepsilon, \omega_{-2,-1,1,2} \rangle.$$

В первом интеграле получим

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} o(1)\,dx = o(1).$$

Второй интеграл равен

$$\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = 2\varphi(0).$$

Ответ: предел равен $2\delta_0(x)$. □

Определим новые обобщенные функции

$$\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\,dx$$

Пример 40. *Докажите формулы Сохоцкого*

$$\frac{1}{x \pm i0} = v.p.\frac{1}{x} \mp i\pi\delta_0(x).$$

Решение. По одному из предыдущих упражнений, $\varphi(x) = x\psi(x) + \varphi(0)\omega_{-2,-1,1,2}(x)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\,dx = \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{x}{x + i\varepsilon}\psi(x)\,dx + \varphi(0)\int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{x + i\varepsilon}\,dx.$$

В первом интеграле дробь ограничена и можно устремить ε к нулю. Получим $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) = \langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi \rangle$ (см. упражнение 11.6). Так же можно рассуждать и во втором интеграле, но только вне точки $x = 0$. Тогда в пределе можно отбросить интегрирование по $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$. Останется

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x + i\varepsilon} = \ln(1 + i\varepsilon) - \ln(1 - i\varepsilon) \to -i\pi$$

(выбираем ветвь логарифма в верхней полуплоскости). □

Пример 41. *Найдите предел в $\mathcal{S}'$ последовательности $\frac{e^{inx}}{x - i0}$ при $n \to +\infty$.*

Решение. По правилу умножения обобщенной функции на гладкую,

$$\langle\frac{e^{inx}}{x-i0},\varphi\rangle = \langle\frac{1}{x-i0}, e^{inx}\varphi(x)\rangle = \langle v.p.\frac{1}{x}, e^{inx}\varphi(x)\rangle + i\pi\varphi(0).$$

Разложим $\varphi(x) = \varphi(0)\omega_{-2,-1,1,2}(x) + x\psi(x)$. Получим

$$\langle v.p.\frac{1}{x}, e^{inx}\varphi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{inx}\psi(x)\,dx + \varphi(0)\,v.p.\int_{-2}^{2}\frac{\omega_{-2,-1,1,2}(x)e^{inx}}{x}\,dx.$$

В первом интеграле проинтегрируем по частям и, поскольку $\psi \in \mathcal{S}$, $\psi(\pm\infty) = 0$, то получим

$$\frac{i}{n}\int_{\mathbb{R}} e^{inx}\psi'(x)\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Во втором интеграле разложим экспоненту по формуле Эйлера и сократим интеграл нечетной функции. Останется

$$i\varphi(0)\int_{-2}^{2}\frac{\omega_{-2,-1,1,2}(x)\sin(nx)}{x}\,dx.$$

На отрезках $[-2,-1]$ и $[1,2]$ можно интегрировать по частям:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{\cos(nx)}{n}\left(\frac{\omega_{-2,-1,1,2}}{x}\right)'\,dx \to 0.$$

Остается интеграл

$$i\varphi(0)\int_{-1}^{1}\frac{\sin nx}{x}\,dx = i\varphi(0)\int_{-n}^{n}\frac{\sin y}{y}\,dy \to i\pi\varphi(0).$$

Ответ: предел равен $2i\pi\delta_0(x)$. □

Пример 42. *Найдите все производные функции $f(x) = \sin x\theta(x)$.*

Доказательство. Для любой тестовой $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle = -\int_0^\infty \sin x\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -\sin x\varphi(x)|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\cos x\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\cos x\varphi(x)\,dx.$$

т.е. $f'(x) = g(x) = \cos x\theta(x)$. Далее,

$$\langle g',\varphi\rangle = -\langle g,\varphi'\rangle = -\int_0^\infty \cos x\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -\cos x\varphi(x)|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\sin x\varphi(x)\,dx = \varphi(0) - \int_0^{+\infty}\sin x\varphi(x)\,dx,$$

т.е. $g'(x) = \delta_0(x) - \sin x\theta(x)$. Далее процесс понятен. □

Решая уравнения в обобщенных функциях, важно помнить два принципа:
уравнение $y'(x) = 0$ имеет общее решение $y(x) = C$,
уравенение $xy(x) = 0$ имеет общее решение $y(x) = C\delta_0(x)$.

Пример 43. *Найдите общее решение уравнения $xy' = 1$ в обобщенных функциях.*

Решение. Решение линейного неоднородного уравнения — это сумма общего решения однородного уравнения и частного решения. Частное решение находим из предыдущих упражнений: вспоминаем, что $x \cdot v.p.\frac{1}{x} = 1$, т.е. $y = \ln|x|$. Однородное уравнение решаем так: $xy' = 0$, значит везде, кроме точки ноль $y' = 0$. Значит $y = C_1 + C_2\theta(x)$. Подставляем и видим, что все эти функции подходят. □

Мы научились некоторым операциям с обобщенными функциями (сложение, умножение на гладкие функции, дифференцирование и замена переменной). Нам потребуются еще преобразование Фурье, свертка и умножение функций разных переменных.

Определение 25. *Если f суммируема на $\mathbb{R}$, то определено ее преобразование Фурье $\hat{f}$ — непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция. Тогда*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}: \quad \langle \hat{f}(\lambda), \varphi(\lambda)\rangle = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\varphi(\lambda)\,d\lambda = \\ = \int_{\mathbb{R}} f(x)\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x}\varphi(\lambda)\,d\lambda\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \langle f, \hat{\varphi}\rangle.$$

Тогда уже для произвольной функции f определим ее преобразование Фурье как функционал, который каждой тестовой функции φ ставит в соответствие число

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle := \langle f, \hat{\varphi}\rangle.$$

Здесь возникает, однако, следующая проблема: надо вначале показать, что для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ преобразование Фурье $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, причем сходимость $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}$ влечет сходимость $\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ в $\mathcal{S}$.

Теорема 13. *Преобразование Фурье — это иозоморфизм пространства $\mathcal{S}$ на себя.*

Доказательство. Мы знаем, что преобразование Фурье переводит $xf(x)$ в $i\hat{f}'(\lambda)$. Мы знаем, что преобразование Фурье переводит $f'(x)$ в $i\lambda\hat{f}(\lambda)$. Тогда

$$\|\hat{\varphi}\|_{j,k} \leq \|\varphi\|_{0,j} + \|\varphi\|_{k,j}.$$

Мы проверили, что преобразование переводит $f \in \mathcal{S}$ в $\hat{f} \in \mathcal{S}$ и сохраняет сходимость. Теперь вспомним теорему об обратном преобразовании Фурье (функции из $\mathcal{S}$, конечно, гельдеровы). Теорема утверждает, что «обратное преобразование Фурье, взятое от прямого, дает начальную функцию». Это означает инъективность преобразования Фурье. Но обратное и прямое преобразования отличаются всего лишь заменой x на $-x$. Значит «прямое преобразование Фурье, взятое от обратного, дает начальную функцию». Это означает сюръективность. □

Пример 44. *Найдем преобразование Фурье функции $\delta_a(x)$.*
По определению

$$\langle \hat{\delta}_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-iax}\, dx = \langle e^{-iax}, \varphi \rangle,$$

т.е. $\hat{\delta}_a = e^{-iax}$.

Определение 26. *Если f суммируема на $\mathbb{R}$, а $\varphi \in \mathcal{S}$, то определена свертка*

$$g(x) = (f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(x-y)\, dy$$

Эта функция суммируема на $\mathbb{R}$, так как

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)||\varphi(x-y)|\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy \int_{\mathbb{R}} |\varphi(z)|\, dz.$$

Если породить функционал функцией g, то получим

$$\langle g, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)\psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\varphi(x-y)\, dx\, dy = \langle f(x), \psi(x) * \varphi(-x) \rangle.$$

Определим теперь свертку любых $g \in \mathcal{S}'$ и $\varphi \in \mathcal{S}$ как функционал из $\mathcal{S}'$, которой каждой тестовой функции ψ сопоставляет число $\langle f, \psi(x) * \varphi(-x) \rangle$.

Для корректности надо проверить, что свертка $\psi(x) * \varphi(-x)$ лежит в $\mathcal{S}$ и не нарушает сходимость: если $\psi_n \to \psi$ в $\mathcal{S}$, то $\psi_n * \varphi(-x) \to \psi * \varphi(-x)$ в $\mathcal{S}$. Вспомним факт из математического анализа: преобразование Фурье от свертки — это произведение преобразований Фурье. Зная уже, что преобразование Фурье есть изоморфзим пространства $\mathcal{S}$, приходим к следующему вопросу.

Пример 45. *Найдем свертку $\delta_0(x)$ с произвольной функцией $\varphi \in \mathcal{S}$.*
По определению

$$\begin{aligned} \forall \psi \in \mathcal{S}: \quad \langle \delta_0 * \varphi, \psi \rangle = \langle \delta_0, \psi(x) * \varphi(-x) \rangle = \psi(x) * \varphi(-x)|_{x=0} = \\ = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\varphi(y-x)\, dy|_{x=0} = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\varphi(y)\, dy = \langle \varphi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

т.е. $\delta_0(x) * \varphi(x) = \varphi(x)$. За это свойство функцию δ_0 называют сверточной единицей.

Чтобы искать преобразование Фурье обобщенных функций полезно помнить несколько простых правил:

1) Преобразование Фурье от производной $\widehat{f'(x)}(\lambda)$ равно $i\lambda \hat{f}(\lambda)$
2) Преобразование Фурье $\widehat{(}xf(x))(\lambda)$ равно $i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)$
3) Преобразование Фурье от сдвига $\widehat{f(x+a)}(\lambda)$ равно $e^{ia\lambda}\hat{f}(\lambda)$
4) Преобразование Фурье $\widehat{f(x)e^{iax}}(\lambda)$ есть $\hat{f}(\lambda - a)$
5) Преобразование Фурье четной функции четно, а нечетной — нечетно
6) Преобразование Фурье произведения есть свертка преобразований Фурье.

Еще полезно помнить таблицу преобразований Фурье, которые встречаются часто. Мы уже значем, что $\hat{\delta}_0 = 1$.

Пример 46. *Найдите преобразование Фурье функций* 1, e^{iax}, $\theta(x)$, $\sin x$ *и* $\theta(x)\cdot\sin x$.

Решение. Раз $\hat{\delta}_0 = 1$, то $\check{1} = \delta_0$. Но обратное преобразование Фурье отличается от прямого коэффициентом $(2\pi)^{-1}$ и сменой знака функции: $\check{f(x)} = (2\pi)^{-1}\hat{f(-x)}$. Поскольку $1(-x) = 1$, то $\hat{1} = 2\pi\delta_0(\lambda)$.

Умножим 1 на e^{iax}. Получим $\widehat{e^{iax}} = 2\pi\delta_0(\lambda - a) = 2\pi\delta_a(\lambda)$.

Возьмем производную $\theta'(x) = \delta_0(x)$. Значит, $\widehat{\theta'(x)} = 1 = i\lambda\widehat{\theta(x)}$. Остается решить это уравнение. Частное решение $-i\,v.p.\frac{1}{\lambda}$ угадывается сразу. Однородное уравнение, как мы знаем, имеет решение $C\delta_0(\lambda)$. Итак, $\widehat{\theta(x)} = -i\,v.p.\frac{1}{\lambda} + C\delta_0(\lambda)$. Константу, однако, надо найти — неопределенность возникла с самого начала, после взятия производной. Заметим, что функция $\theta(x) - \frac{1}{2}$ нечетна. Тогда и ее преобразование Фурье $\widehat{\theta(x) - \frac{1}{2}} = -i\,v.p.\frac{1}{\lambda} + (C - \pi)\delta_0(\lambda)$ нечетно, т.е. $C = \pi$. Итак, применяя еще формулу Сохоцкого,

$$\widehat{\theta(x)} = -i\,v.p.\frac{1}{\lambda} + \pi\delta_0(\lambda) = \frac{-i}{\lambda - i0}.$$

Представим $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Тогда

$$\widehat{\sin x} = \frac{1}{2i}\left(\widehat{e^{ix}} - \widehat{e^{-ix}}\right) = i\pi\left(\delta_{-1}(\lambda) - \delta_1(\lambda)\right).$$

Преобразование Фурье произведения $\theta(x)\sin x$ есть свертка

$$-i\frac{1}{\lambda - i0} * \left(i\pi\delta_{-1}(\lambda) - i\pi\delta_1(\lambda)\right).$$

Свертка с $\delta_a(\lambda)$ дает сдвиг аргумента функции:

$$\delta_a(\lambda) * \varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \delta_a(\mu)\varphi(\lambda - \mu)\,d\mu = \varphi(\lambda - a).$$

Тогда

$$\widehat{\theta(x)\cdot\sin x} = \frac{\pi}{\lambda + 1 - i0} - \frac{\pi}{\lambda - 1 - i0}.$$

□

Любую негладкую функцию можно «немного подправить» и превратить в бесконечно гладкую. Для этого нам пригодятся следующие функции. Возьмем шапочку $\varphi_{-1,1}(x)$, сосредоточенную на отрезке $[-1, 1]$, сожмем ее на отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$, взяв $\varphi_{-1,1}(x/eps)$ и умножим на коэффициент k_ε так, чтобы

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k\varphi_{-1,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = 1.$$

Пример 47. *Пусть* $f \in C[a, b]$ *и равна нулю в концах отрезка. Будем считать, что она определена нулем вне отрезка. Рассмотрим свертку* $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\omega_\varepsilon(x - t)\,dt$. *Докажите, что* $f_\varepsilon \in \mathcal{S}$ *и* $f_\varepsilon \to f$ *равномерно на* $\mathbb{R}$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Решение. Дифференцируем интеграл по параметру (вначале формально)

$$f'_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\omega'_\varepsilon(x-t)\,dt.$$

Знаем, что ω_ε бесконечно дифференцируема, значит новый интеграл сходится, причем

$$|f'_\varepsilon(x)| \leq \max_{[-\varepsilon,\varepsilon]} |\omega'_\varepsilon(y)| \cdot \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f(t)|\,dt \leq C\int_a^b |f(t)|\,dt$$

Значит интеграл сходится равномерно по x и наше дифференцирование законно. Аналогично, $f''_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\omega''_\varepsilon(x-t)\,dt$ и так со всеми производными. Мы доказали, что функции f_ε бесконечно дифференцируемы, а

$$f^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\omega_\varepsilon^{(n)}(x-t)\,dt.$$

Заметим, что под интегралом стоит ноль при $t \notin [a,b]$ и при $|x-t| > \varepsilon$. Значит, интегралы равны нулю при всех $x < a-\varepsilon$ и при всех $x > b+\varepsilon$. Значит, все производные $f^{(n)}$ финитны, т.е. $f \in \mathcal{S}$.

Вторая часть задачи: доказать равномерную сходимость $f_\varepsilon \to f$. Имеем

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\omega_\varepsilon(x-t)\,dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)\omega_\varepsilon(x-t)\,dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(x-y)-f(x))\omega_\varepsilon(y)\,dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f(x-y)-f(x))\omega_\varepsilon(y)\,dy \end{aligned}$$

Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \max_{x\in[a-\varepsilon,b+\varepsilon],\ |y|<\varepsilon} |f(x-y)-f(x)| \to 0$$

в силу равномерной непрерывности. □

Определим наконец прямое произведение двух функций $f(x)$ и $g(y)$ из $\mathcal{S}'$ — аналог функции двух переменных $f(x)g(y)$. Просто положим для любой тестовой функции двух переменных $\varphi(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle f(x)g(y), \varphi\rangle := \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

(записываем двойной интеграл через повторный).

Пример 48. *Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Найдем прямое произведение $\varphi(x)\delta_0(y)$.*
По определению, для любой $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\langle \varphi(x)\delta_0(y), \psi(x,y)\rangle = \langle \varphi(x), \langle \delta_0(y), \psi(x,y)\rangle\rangle = \langle \varphi(x), \psi(x,0)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(x,0)\,dx.$$

Такую обобщенную функцию называют δ–функцией, сосредоточенной на прямой $y=0$ с распределением $\varphi(x)$.

Упражнение 12. *1. Найдите пределы в* $\mathcal{S}'$

$$\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-x^2/(4\varepsilon)}, \qquad \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}, \qquad \frac{1}{\varepsilon x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}.$$

2. Найдите пределы в $\mathcal{S}'$ *последовательностей*

$$\frac{e^{-inx}}{x-i0}, \qquad \frac{e^{inx}}{x+i0}, \qquad \frac{e^{-inx}}{x+i0}, \qquad n^j e^{inx}.$$

3. Найдите все производные функций

$$\cos x\cdot\theta(x), \qquad x^2 I_{[-1,1]}(x), \qquad 1+xI_{[0,1]}(x)+x^2 I_{[1,+\infty)}(x),$$
$$(x+1)^2 I_{[0,1]}(x)+(x^2+1)I_{[1,+\infty)}(x), \qquad \sin x\cdot I_{[-\pi,\pi]}(x).$$

4. Найдите общее решение уравнений в обобщенных функциях

$$xy' = v.p.\frac{1}{x}, \qquad x^2y'=0, \qquad x^2y'=1, \qquad y''=\delta(x), \qquad (x+1)y''=0, \qquad (x+1)^2y''=0.$$

5. Докажите, что произведение $\hat{\psi}(\lambda)$ *и* $\hat{\varphi}(-\lambda)$ *лежит в* $\mathcal{S}$ *и если* $\hat{\psi}_n\to\hat{\psi}$ *в* $\mathcal{S}$*, то* $\hat{\psi}_n\hat{\varphi}(-\lambda)\to\hat{\psi}\hat{\varphi}(-\lambda)$.

6. Найдите преобразование Фурье функций $v.p.\frac{1}{x}$, $\ln|x|$, $\operatorname{sign}x$, $|x|$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\operatorname{arctg}x$.

Лекция 11. Фундаментальные решения

Надо сказать еще несколько слов про носитель функций. Мы понимаем, что такое носитель обычной функции — те точки, где она не равна нулю, но как перенести это понятие на обобщенные функции. Скажем так: обычная функция f тождественно равна нулю на интервале (a,b), в точности тогда, когда для любой тестовой функции φ интеграл $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ (обратите внимание, что для разрывных функций f это есть равенство нулю почти всюду на (a,b)). Тогда логично назвать носителем функции f дополнение в $\mathbb{R}$ к множеству всех интервалов, где $f \equiv 0$. Назовем это множество $\operatorname{supp} f$.

Пример 49. *Докажите, что* $\operatorname{supp}\sin x = \mathbb{R}$.
Какой бы интервал мы не взяли, найдется функция $\varphi \in \mathcal{D}$ *(например,* $\varphi(x) = \sin x \cdot \omega_{a-1,a,b,b+1}(x)$*), для которой*

$$\int_a^b \sin x\varphi(x)\,dx = \int_a^b \sin^2(x)\,dx \neq 0.$$

Значит, носитель $\sin x$ *есть вся числовая ось.*

Определение 27. *Скажем, что обобщенная функция* $f \in \mathcal{S}'$ *равна нулю на интервале* (a,b)*, если для любой тестовой функции* φ *с носителем* $\operatorname{supp}\varphi \subset (a,b)$ *выполнено* $\langle f,\varphi\rangle = 0$. *Носителем функции* f *нназовем дополнение к объедиению всех таких интервалов.*

Пример 50. *Докажите, что* $\operatorname{supp}\delta_0(x) = \{0\}$*, т.е. что дельта–функция равна нулю везде, кроме точке* $x = 0$.
Возъмем тестовую функцию с носителем в интервале (a,b)*, где* $b > a > 0$. *Тогда* $\varphi(0) = 0$ *и* $\langle\delta_0,\varphi\rangle = 0$. *Аналогично, если* $a < b < 0$. *Объединение всех интервалов первого типа дает* $(0,+\infty)$*, а второго* $(-\infty,0)$. *Значит,* $\operatorname{supp}\delta_0 = \{0\}$.

Веремся к решшению уравнений в частных производных с помощью фундаменнтальных решений. Посмотрим на ситуацию с более общей точки зрения. Мы использовали фундаментальное решение для решения однородной задачи Коши $u_t = u_{xx}$. Что можно сказать о решении неоднородной задачи $u_t = u_{xx} + f(x,t)$, $u(x,0) = \varphi(x)$? Ответ нам известен

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}\,dy + \int_{\mathbb{R}}\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} f(y,s)e^{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}}\,dy\,ds.$$

Оказывается, второе слагаемое тоже есть свертка, только проводится она по двум переменным:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\mathcal{E}(y-x,t)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y,s)\theta(s)\mathcal{E}(y-x,t-s)\,dy\,ds.$$

Более того, этому ответу можно придать форму

$$u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi(y)\delta_0(s) + f(y,s)\theta(s))\mathcal{E}(y-x,t-s)\,dy\,ds = \big(\varphi(x)\delta_0(t) + f(x,t)\theta(t)\big) * \mathcal{E}(x,t)$$

(мы используем дельта–функцию по переменной t и пользуемся тем, что $\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\delta_0(\xi)\,d\xi = f(0)$). В результате такого приема пропадает разница между переменными t и x, и метод решения становится более общим.

Надо только переделать определение фундаментального решения так, чтобы начальные данные в нем не использовались. Это легко: условие $u(x,0) = \delta_y(x)$ можно трактовать так: $u(x,t) = \delta_y(x)\delta_0(t)$ (в один единственный момент $t = 0$ дан один точечный источник в точке y). Проверим: решим задачу

$$u_t = u_{xx} + \delta_0(x)\delta_0(t), \quad x,\, t \in \mathbb{R}$$

без всяких условий. Сделав преобразование Фурье по обеим переменным, получим

$$i\tau\hat{u}(\lambda,\tau) = -\lambda^2\hat{u}(\lambda,\tau) + 1, \qquad \hat{u}(\lambda,\tau) = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t)e^{-i(\lambda x+\tau t)}\,dx\,dt.$$

Отсюда

$$\hat{u}(\lambda,\tau) = \frac{1}{i\tau+\lambda^2}, \qquad \mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\lambda x+i\tau t}}{i\tau+\lambda^2}\,d\lambda\,d\tau$$

(коэффициент 2π в обратном преобразовании Фурье возникает по одному разу из каждого интеграла). Далее получаем упражнение по комплексному анализу

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tau t}}{i\tau+\lambda^2}\,d\tau\right)d\lambda.$$

Внутренний интеграл считаем замыканием контура по полуокружности, вычисляя вычеты и используя лемму Жордана. При $t > 0$ контур замыкаем в верхнюю полуплоскость и получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tau t}}{i\tau+\lambda^2}\,d\tau = 2\pi i \underset{\tau=i\lambda^2}{res}\frac{e^{i\lambda t}}{i\tau+\lambda^2} = 2\pi e^{-t\lambda^2}.$$

При $t < 0$ контур замыкаем в нижнюю полуплоскость и интеграл равен нулю. Тогда

$$\mathcal{E}(x,t) = \theta(t)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x - t\lambda^2}\,d\lambda = \theta(t)\frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\pi\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}-ix/(2\sqrt{t})} e^{-z^2}\,dz = \frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}\theta(t).$$

Получили ожидаемый ответ.

Вывод: мы получили мощный универсальный инструмент для решения произвольных линейных уравнений у частных производных. Алгоритм решения очень простой: пишем уравнение с правой частью, равной дельта–функции. Находим решение $\mathcal{E}$. Тогда общее решение будет получено в виде свертки суммы правой части и начального условия с функцией $\mathcal{E}$. Метод применим не только к уравнениям в частных производных, но и к ОДУ.

Пример 51. *Найдем фундаментальное решение $\mathcal{E}$ оператора $L = \frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}$ и решим с помощью него уравнение $Lu = f$ на всей оси $x \in \mathbb{R}$.*
Имеем $\mathcal{E}''(x) + 4\mathcal{E}'(x) = \delta_0(x)$. Домножим уравнение на e^{4x} и получим $(\mathcal{E}'(x)e^{4x})' = \delta_0(x)e^{4x} = \delta_0(x)$. Интегрируем

$$\mathcal{E}'(x)e^{4x} = \int_{-\infty}^{x} \delta_0(y)\,dy + C_1 = \theta(x) + C_1.$$

Умножаем на e^{-4x} и снова интегрируем

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^x (\theta(y) + C_1)e^{-4y}\,dy + C_2 = C_2 + \frac{C_1}{4} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4}\theta(x)e^{-4x}.$$

И какие теперь брать константы? Этого следовало ожидать — фундаментальное решение определено неоднозначно, с точностью до решения однородного уравнения. Поскольку мы хотим его затем сворачивать с правой частью, то логично взять то, которое максимально хорошо убывает на $\pm\infty$. Тогда $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4}\theta(x)e^{-4x}$, а частное решение уравнения $Lu = f$ принимает вид

$$u_0(x) = \mathcal{E} * f = -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} f(y)\theta(x-y)e^{-4(x-y)}\,dy = -\frac{e^{-4x}}{4}\int_{\infty}^{x} f(y)e^{4y}\,dy.$$

Общее решение

$$u(x) = A_1 + A_2e^{-4x} - \frac{e^{-4x}}{4}\int_{\infty}^{x} f(y)e^{4y}\,dy.$$

Вопрос: при выводе формулы Пуассона — где мы потеряли неоднозначность фундаментального решения? Ведь, например, функция e^{ix-t} является решением однородного уравнения, а мы ее не нашли.

Фундаментальные решения можно находить и в задачах с граничными условиями. Тогда эти граничные условия включаются в определение функции $\mathcal{E}$ (так же, как в последнем примере мы добавили условие убывания на бесконечности). Только здесь (из-за того, что мы имеем дело с частью пространства) надо искать это решение для правой части $\delta_y(x)$, варьируя затем параметр y (записывая интеграл по y) вида $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(x,y)f(y)\,dy$.

Пример 52. *Найдите фундаментальное решение для оператора $Lu = -u'' + a^2u$, $a > 0$ — параметр, с краевыми условиями Дирихле $u(0) = u(\pi) = 0$. С помощью него запишите общее решение задачи $Lu = f$.*
Запишем уравнение

$$-u'' + a^2u = \delta_y(x), \quad y \in (0,\pi).$$

Сначала прикинем класс гладкости функции u. Вторая производная понижает гладкость функции на 2 единицы, а слагаемое a^2u гладкость функции не меняет (т.е. носит подчиненный характер). Значит, u надо искать в классе функций, полученных двойным интегрированием дельта—функции Дирака. Мы знаем, что первая первообразная есть $\theta(x)$ (функция Хевисайда), а вторая равна x_+ (функция x при $x > 0$ и ноль при $x < 0$). Значит u непрерывна, но ее производная может иметь разрывы.
Вернемся к уравнению. Будем рассуждать так: дельта–функция равна нулю при $x < y$. Значит, на полуинтервале $x \in [0, y)$ решение имеет вид $\mathcal{E}(x) = A_1\sin(ax) + A_2\cos(ax)$. Аналогично, на полуинтервале $x \in (y, \pi]$ имеем $\mathcal{E}(x) = B_1\sin(ax) + B_2\cos(ax)$. Учитывая краевые условия, и непрерывность функции u, имеем

$$\mathcal{E}(0) = A_2 = 0, \qquad \mathcal{E}(y-0) = A_1\sin(ay) = \mathcal{E}(y+0) = B_1\sin(ay) + B_2\cos(ay),$$
$$\mathcal{E}(\pi) = B_1\sin(\pi a) + B_2\cos(\pi a) = 0.$$

Проинтегрируем наше уравнение по интервалу $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$

$$u'(y-\varepsilon) - u'(y+\varepsilon) + a^2 \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} u(x)\,dx = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta_y(x) = 1.$$

Устремим ε *к нулю и получим*

$$\mathcal{E}'(y-0) - \mathcal{E}'(y+0) = 1 = aA_1\cos(ay) - (aB_1\cos(ay) - B_2 a\sin(ay)).$$

Соберем три условия в одну систему

$$\begin{cases} A_1\sin(ay) = B_1\sin(ay) + B_2\cos(ay), \\ A_1\cos(ay) = B_1\cos(ay) - B_2\sin(ay) + 1/a, \\ B_1\sin(a\pi) + B_2\cos(a\pi) = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы системы равен $-\sin(a\pi)$, *так что фундаментальное решение определено только при* $a \notin \mathbb{N}$. *В этом случае (решаем систему, например, по формулам Крамера)*

$$A_1 = \frac{\sin a(y-\pi)}{a\sin(a\pi)}, \quad B_1 = \frac{\sin(ay)\cos(a\pi)}{a\sin(a\pi)}, \quad B_2 = -\frac{\sin(ay)}{a}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin a(y-\pi)\sin(ax)}{a\sin(a\pi)}, & \text{при } x < y, \\[2ex] \dfrac{\sin(ay)\sin a(x-\pi)}{a\sin(a\pi)}, & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Решением уравнения $Lu = f$ *при* $a \notin \mathbb{N}$ *является функция* $u(x,t) = \int_0^\pi \mathcal{E}(x,y)f(y)\,dy$.

Вернемся к частным производным. Найдем фундаментальное решение для уравнения теплопроводности в трехмерном пространстве. Не будем обсуждать почему, просто примем как данность, что это уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Тогда нам необходимо найти функцию $\mathcal{E}(x,y,z,t)$ — решение уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \delta_0(x)\delta_0(y)\delta_0(z)\delta_0(t), x,\ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}.$$

Сделав преобразование Фурье по всем четырем переменным, получим

$$i\tau\hat{u} = -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\hat{u} + 1, \quad \hat{u}(\lambda,\mu,\nu,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint_{\mathbb{R}^4} u(x,y,z,t)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z+\tau t)}\,dxdydzdt.$$

Получаем

$$\hat{u} = \frac{1}{i\tau + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

и остается сделать четыре обратных преобразования Фурье. Опуская вычисления, выпишем ответ

$$\mathcal{E}(x,y,z,t) = \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4t)}}{(2\sqrt{\pi t})^3}\theta(t).$$

Теорема 14. *Решение задачи в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *при* $t > 0$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

с непрерывной и ограниченной функцией φ *имеет вид*

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Здесь u *бесконечно дифференцируема в* $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$*, удовлетворяет уравнению и* $u(x, y, z, t) \to \varphi(x, y, z)$ *при* $t \to +0$ *равномерно на* $\mathbb{R}^3$*.*

Теорема 15. *Решение задачи*

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\, t > 0, \quad u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$$

при условии $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$*,* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$*, задается формулой*

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \le t^2} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \le t^2} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

Функция u *удовлетворяет в* $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$ *уравнению, стремится к* $\varphi(x, y)$ *при* $t \to +0$ *поточечно на* $\mathbb{R}^2$*, а* u_t *также поточечно стремится к* $\psi(x, y)$*.*

Доказательство. Предположим вначале, что φ и ψ лежат в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Сделаем преобразование Фурье по пространственным переменным и получим уравнение

$$\hat{u}_{tt} = (\lambda^2 + \mu^2)\hat{u}, \qquad \hat{u}(\lambda, \mu, 0) = \hat{\varphi}(\lambda, \mu),\ \hat{u}_t(\lambda, \mu, 0) = \hat{\psi}(\lambda, \mu).$$

Это уравнение легко решается

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{\varphi} \cos(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} t) + \hat{\psi} \frac{\sin(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} t)}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}.$$

Остается сделать обратное преобразование Фурье и применить свойство свертки. Надо только найти преобразование Фурье синуса и косинуса. Перейдем к полярным координатам $\lambda = \rho \cos\theta$, $\mu = \rho \sin\theta$. Тогда

$$\mathcal{E}(x, y, t) = \frac{\operatorname{sign} t}{16 i \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(e^{it\rho} - e^{-it\rho}\right) e^{i\rho(x\cos\theta + y\sin\theta)} d\rho\, d\theta.$$

Интегралы здесь расходятся и понимать их надо в смысле преобразования Фурье обобщенных функций. В выражении $x\cos\theta + y\sin\theta$ перейдем к дополнительному аргументу, получив $\sqrt{x^2 + y^2} \sin\psi$, где ψ меняется от ψ_0 до $2\pi + \psi_0$. Заметим, что в силу периодичности, можно поставить перед интегралом множитель 2 и считать, что ψ меняется от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Заменим $\sin\psi$ на $\xi \in [-1, 1]$ и обозначим $\sqrt{x^2 + y^2}$ через r. Получим

$$\mathcal{E}(x, y, t) = \frac{\operatorname{sign} t}{8 i \pi^2} \int_{-1}^{1} \int_0^{+\infty} \left(e^{it\rho} - e^{-it\rho}\right) e^{i\rho r \xi} d\rho\, \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Считая t и r фиксированными числами, а ξ — переменной величиной, найдем внутренний интеграл функции $e^{i(t+r\xi)\rho}$ по переменной ρ. Видим, что это есть не что иное, как преобразование Фурье обобщенной функции $\theta(\rho)\cdot e^{it\rho}$, которое равно

$$-i\,v.p.\frac{1}{r\xi - t} + \pi\delta_0(r\xi - t).$$

Аналогично, второе слагаемое дает $\quad i\,v.p.\dfrac{1}{r\xi + t} - \pi\delta_0(r\xi + t),\quad$ так что

$$u(x,y,t) = \frac{\operatorname{sign} t}{8i\pi^2}\int_{-1}^{1}\left(-i\,v.p.\frac{1}{r\xi - t} + \pi\delta_0(r\xi - t) + i\,v.p.\frac{1}{r\xi + t} - \pi\delta_0(r\xi + t)\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Далее надо рассмотреть отдельно случаи $t < -r$, $t \in (-r, 0)$, $t \in (0, r)$ и $t > r$. Чтобы сократить перебор, заметим, что функция $\hat{u}$ четна по всем переменным, значит u четна по t и можно рассмотреть только два последних случая.

Если $t > r$, то интегралы от дельта–функций равны нулю, $v.p.$ можно убрать и получаем

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\xi + t/r} - \frac{1}{\xi - t/r}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{4\pi^2 r}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{t^2/r^2 - 1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - r^2}}$$

(см., например, задачник Евграфова по аналитическим функциям, номер 28.25.17 а)). При $t \in (0, r)$ интегралы от дельта–функций сокращаются и

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2 r} v.p.\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\xi + t/r} - \frac{1}{\xi - t/r}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0$$

(тот же номер, пункт б)). Получили ответ

$$\mathcal{E}(x,y,t) = \frac{\theta(t-r)}{2\pi\sqrt{t^2 - r^2}},\quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда сразу получаем утверждение теоремы для $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Теперь по непрерывности продолжаем формулу на случай C^2 и C^3 функций: здесь подробности опускаем. $\square$

Упражнение 13. *0. Найдите носитель функции $v.p.\frac{1}{x}$.*
Найдите фудаментальные решения (выбирая те, которые убывают на бесконечности) для операторов
1. $Lu = u'' - 4u' + 5u$;
2. $Lu = u''' - 3u'' + 2u'$;
3. $Lu = u^{(4)} - 2u'' + u$.
Найдите фундаментальные решения для операторов
4. $Lu = -u''$, $u(0) = u(1) = 0$, $x \in [0,1]$;
5. $Lu = -u''$, $u(0) = u'(0) = 0$ (задача Коши), $x \in [0, +\infty)$;
6. $Lu = -x^2u'' - 2xu'$, $u'(1) = 0$, $u(2) = 0$, $x \in [1,2]$;
7. $Lu = -(1+x^2)u'' - 2xu'$, $u(0) = u'(0)$, $u(1) = 0$, $x \in [0,1]$.
8. Докажите, что фундаментальное решение оператора $Lu = u_t - u_{xx} - u_{yy}$ в $\mathbb{R}^2$ выглядит в точности так же, как в $\mathbb{R}^3$.
9. Докажите, что фундаментальным решение оператора $Lu = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}$ в $\mathbb{R}^3$ является функция $\delta_S(r)$.

Лекция 12. Уравнение Лапласа

Перейдем к новому уравнению. Мы рассмотрим стационарное уравнение с несколькими переменными — аналог одномерного уравнения $u_{xx} = f$.

Примем как данность, что точечная материальная масса m, помещеннная в начало координат в $\mathbb{R}^3$, порождает поле тяготения $\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{km}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$. В координатной записи имеем

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

Очень полезно знать, как этот закон был выведен — рассуждения не соответствуют современной физике, но очень характерные. Ясно, что сила должна зависеть только от $|x|$ — пространство наше изотропно. Ясно, что с отдалением от массы сила падает, но как? Представим, что наша точечная масса постоянно излучает в пространство «частицы тяготения», которые и создают силу F. Излучение происходит с одинаковой мощностью, и чем больше частиц тяготения попадают в точку $\vec{x}$, тем больше там сила. Рассмотрим гладкую замкнутую поверхность S в $\mathbb{R}^3$ (например, сферу), не проходящую через начало координат. Ясно, что здесь нужно различать два случая. Если сфера содержит точку 0 внутри, то поток частиц через S за время δt постоянный и не зависит от радиуса сферы (через S пролетают все частицы, которые испустила масса за время δt). Если же сфера не содержит 0 внутри себя, то поток через S должен быть нулевой (иначе частицы накопились бы внутри S, а мы это отвергаем). Поток поля через поверхность равен поверхностному интегралу $\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS$, где $\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности. Действительно, возьмите поток воды и повращайте прямоугольную пластинку: если пластинка стоит поперек потока, то давление максимальное, а если ребром, то нулевое. Еще можете поэкспериментировать с тюбиком зубной пасты: при каком угле давления на стеку тюбика паста вылезает сильнее. Теперь применим формулу Гаусса–Остроградского:

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

и заметим, что

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \\ - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0,$$

если только $\vec{x} \neq 0$ (легко проверить, что только степень $3/2$ знаменателя дает такой эффект). Вот и получается, что поток через такую сферу нулевой. А если V содержит ноль, то проведем вторую сферу меньшего радиуса и рассмотрим шаровое кольцо. Оказывается, что поток через маленькую и через большую сферу одинаков, что мы и хотели получить! Величина этого потока пропорциональна массе, помещенной в точку 0. Нормируя этот поток так, как нам удобно, можем считать, что он равен $4\pi m$

Теперь представим себе, что на некотором множестве V в $\mathbb{R}^3$ сосредоточены материальные массы с плотностью $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. Тогда силы, порождаемые этими массами, надо по-просту сложить, т.е. итоговая сила в точке $(x,y,z)\notin V$ равна

$$\vec{F} = -(x,y,z)\cdot \iiint_V \frac{4\pi\rho(\xi,\eta,\zeta)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}}\,d\xi\,d\eta,d\zeta. \tag{9}$$

Поток через ворехность S, окружающую множество V, тоже находится сложением масс

$$\iint_S (\vec{F},\vec{n})\,dS = \iiint_V \rho(\xi,\eta,\zeta)dV.$$

В силу формулы Гаусса–Остроградского

$$\iint_S (\vec{F},\vec{n})\,dS = \iiint_{int\,S} \operatorname{div}\vec{F}dV = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dV$$

(в последнем равенстве мы учли, что $\operatorname{div}\vec{F}=0$ вне материальных масс). Тогда равен нулю интеграл $\iiint_V \Big(\operatorname{div}\vec{F} - 4\pi\rho(\xi,\eta,\zeta)\Big)\,dV$, а поскольку объем V мы можем выбирать произвольно, то равна нулю и подынтегральная функция. Получаем уравнение

$$\operatorname{div}\vec{F} = 4\pi\rho(x,y,z).$$

Заметим, что поле F потенциально. Действительно, для точечной массы, находящейся в начале координат, $F=-\operatorname{grad}u$, где $u(x,y,z)=-r^{-1}$. Тогда набор точечных масс с плотностью ρ порождают потенциал

$$u(x,y,z) = \iiint_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi\,d\eta,d\zeta, \qquad \vec{F} = \operatorname{grad}u \tag{10}$$

С другой стороны, уравнение $\operatorname{div}\vec{F}=4\pi\rho$ принимает вид

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u = 4\pi\rho \Longleftrightarrow \Delta u = 4\pi\rho.$$

Это уравнение называют уравнением Пуассона, а в случае, когда оно пишется в области, свободной от материальных масс, т.е. $\Delta u = 0$ — уравнением Лапласа. **Обратите внимание: выведя уравнение Пуассона, мы нашли сразу же и его решение** (10)**.** Это решение имеет вид свертки функции ρ — правой части уравнения, с фундаментальным решением — с функцией $\mathcal{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}|\vec{x}|^{-1/2}$.

Мы работали в $\mathbb{R}^3$. А что происходит в $\mathbb{R}^2$? На этот раз применим нашу теорию: возьмем уравнение Пуассона и найдем для него фундаментальное решение

$$\mathcal{E}_{xx} + \mathcal{E}_{yy} = \delta_0(x)\delta_0(y), \qquad x,\, y\in\mathbb{R}.$$

Перейдя к полярным координатам, получим

$$\mathcal{E}_{rr} + \frac{1}{r^2}\mathcal{E}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\mathcal{E}_r = 0$$

везде, кроме $r=0$ (т.к. δ–функция равна нулю всюду, кроме начала координат). Так как задача симметрична по всем полярным лучам, то $\mathcal{E}$ не зависит от φ. Получаем ОДУ, откуда $\mathcal{E}(r) = C_1 \ln r + C_2$. Выбираем $C_2 = 0$ (из условия убывания на бесконечности), а C_1 найдем из условия

$$1 = \int_{r=1} (\operatorname{grad} \mathcal{E}, n)\, ds = C_1 \int_{r=1} ds = 2\pi C_1 \Longleftrightarrow C_1 = \frac{1}{2\pi}.$$

Здесь решение уравнения Лапласа $\Delta u = \rho$ принимает вид

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint_D \rho(\xi,\eta) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Пример 53. *Найдем поток векторного поля $\vec{F} = (x,y,z)$ через единичный куб V в $\mathbb{R}^3$. Поле симметрично по всем координатным осям, так что достаточно найти поток через любые две противоположные грани куба, а потом умножить результат на 3. Для граней $x = 1$ и $x = 0$ имеем*

$$\text{Поток} = \int_0^1 \int_0^1 (1,y,z)\cdot(1,0,0)\, dy\, dz + \int_0^1 \int_0^1 (0,y,z)\cdot(-1,0,0)\, dy\, dz = 1.$$

Значит, суммарный поток равен 3. Тот же овет можно получить по формуле Гаусса–Остроградиского

$$\text{Поток} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = 3 \iiint_V dx\, dy\, dz = 3.$$

Пример 54. *Существует ли потенциал у поля $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$?*
Да, $u = \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$.

Пример 55. *Докажите, что поле $\vec{F} = (yz, xz, xy)$ потенциально и найдите его потенциал.*
Чтобы найти потенциал u, проинтегрируем первую координату по x. Получим $u = xyz + f(y,z)$. Если продифференцировать u по y, получим $u'_y = xz + f'_y = xz$, т.е. $f = f(z)$. Аналогично, $u'_z = xy + f'_z = xy$, т.е. $f = const$. Ответ: $u(x,y,z) = xyz + const$.

Пример 56. *Найдите вид оператора Лапласа в цилиндрических координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$.*
Мы уже считали этот оператор в полярных координатах

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial r}.$$

Тогда $\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Пример 57. *Наверное некоторые из вас знают роман «Плутония» писателя Владимира Афанасьевича Обручева (другой его роман, «Земля Санникова», конечно, более известен). Там путешественники открывают отверстие в Земной поверхности и через него попадают вглубь Земли. Оказывается, что Земля внутри полая, а мы живем просто на внешней оболочке тонкого шарового слоя. Экспедиция продолжает свой путь по внутренней поверхности шарового слоя, наблюдая у себя над головой (в центре Земли раскаленное ядро). Докажем, что такого быть не может.*

Каков гравитационный потенциал шарового слоя? Мысленно разделим его на большое число сфер радиуса r, найдем потенциал сферы, а затем проинтегрируем по r в пределах от r_{min} до $r_{max} = 6370$км. Зафиксируем точку (x, y, z) вне слоя (то ли внутри полой Земли, то ли над ее поверхностью). Тогда искомый потенциал $u(x, y, z)$ равен

$$u = \int_{r_{min}}^{r_{max}} J_r \rho(r)\, dr, \qquad J_r = \iint_{S_r} \frac{dS}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)}}.$$

Для поиска величины J_r сменим систему координат — повернем ее так, чтобы точка (x, y, z) приобрела координаты $(0, 0, R)$ (якобиан матрицы поворота равен 1, так что никаких изменений диффиренциала не произойдет). Тогда

$$J_r = \iint_{S_r} \frac{dS}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (R-\zeta)^2}} = \iint_{S_r} \frac{dS}{\sqrt{R^2 - 2R\zeta + r^2}}.$$

Перейдем к сферическим координатам $\xi = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Якобиан замены равен $r^2\cos\theta$. Получим

$$J_r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta}{\sqrt{R^2 - 2R3\sin\theta + r^2}} = 2\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2}} =$$
$$= -\frac{2\pi r}{R}\sqrt{R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\pi r}{R}\left(\sqrt{R^2 + 2Rr + r^2} - \sqrt{R^2 - 2Rr + r^2}\right) =$$
$$= \frac{2\pi r}{R}(R + r - |R - r|).$$

Если $R > r$ (т.е. мы находимся на поверхности Земли или над нею), то $J_r = \frac{4\pi r^2}{R}$, а

$$u(x, y, z) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{4\pi r^2}{R}\rho(r)\, dr = \frac{M}{R},$$

где M — масса шарового слоя. Получили уже знакомый нам закон тяготения. Заодно вывели важное правило: силовое поле, которое индуцирует шар или шаровой слой за пределами шара (или слоя) ничем не отличается от поля, создаваемого точечной массой, помещенной в центр шара (слоя). Нас, однако, интересует другой вариант, когда $R < r$. Тогда

$$J_r = 4\pi r, \qquad u(x, y, z) = const = 4\pi \int_{r_{min}}^{r_{max}} r\rho(r)\, dr.$$

Потенциал равен константе, т.е. сила тяготения $\vec{F} = \operatorname{div} u = 0$. Наши путешественники, попав на вутреннюю поверхность земной коры, оказались бы в невесомости! А учитывая раскаленное ядро (пусть и, согласно роману, небольшое), они бы не ходили по поверхности, а медленно и грустно упали бы на это самое ядро.

В последнем примере мы, на самом деле, сделали много лишнего. Мы ведь отлично можем посчитать, какое поле тяготения создает *потенциал простого слоя* — масса с плотностью $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, сосредоточенная на поверхности S. Для этого достаточно в формулу (10) подставить $\rho(\xi, \eta, \zeta) = \delta_S(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mu(\xi, \eta, \zeta)$ (дельта–функция, сосредоточенная на поверхности S с распределением μ). Затем в интеграле делаем замену, переходя к координатам (t, s, n), где (t, s) — внутренние координаты на поверхности S, а n — нормаль к поверхности. Возникнет якобиан замены, $d\xi\, d\eta\, d\zeta = \sqrt{EG - F^2} ds\, dt\, dn = dS\, dn$. Получим

$$u(x,y,z) = \iint_S dS \int_{\mathbb{R}} dn \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)\delta_0(n)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} =$$
$$= \iint_S \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dS.$$

Перечислим свойства потенциала простого слоя:
1. Вне поверхности выполнено уравнение Лапласа $\Delta u = 0$;
2. Если поверхность ограничена, то $u(\infty) = 0$;
3. Потенциал непрерывен всюду в $\mathbb{R}^3$ (даже на самой поверхности S);
4. Производная потенциала на поверхости S по внешней нормали отличается от производной по внутренней нормали на величину $\mu(x, y, z)$.

Первые два свойства очевидны, а вот третье и четвертое нет. Даже так: их надо еще конкретизировать — какова функция μ и какова поверхность S?

Мы все время говорили про задачу тяготения. Заметим, что сила электростатического притяжения удовлетворяет тому же закону: Кулоновский потенциал, порождаемый заряженной частицей, помещенной в начало координат тоже равен $\frac{q}{R}$. Однако здесь возможны заряды разных знаков (т.е. функция ρ в формулах (9) и (10) знакопеременна). В частности, возникает задача об электростатическом поле, которое индуцирует поверхность, на одной стороне которой расположены положительные заряды, а на другой — отрицательные. Такие объекты называют диполями, а потенциал u называют потенциалом двойного слоя.

С точки зрения обобщенных функций, такая плотность ρ есть производная дельта–функции, сосредоточенной на поверхности S по нормали $\rho = \partial_n \delta_S(\xi,\eta,\zeta) \cdot \nu(\xi,\eta,\zeta)$ (множитель ν характеризует заряд каждого диполя). Подставим в формулу (10) $\rho(\xi,\eta,\zeta) = -\delta_0'(t,s,n) \cdot \nu(\xi,\eta,\zeta)$. Тогда потенциал двойного слоя должен задаваться формулой

$$u(x,y,z) = \iint_S \nu(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dS.$$

Пример 58. *На диске $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0\}$ распределен потенциал простого слоя с плотностью $\mu(x, y, z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Найдите потенциал $u(0, 0, z)$ для $z > 0$.*

Решение. Наша поверхность плоская. Введем на ней внутренние координаты $s = \xi$, $t = \eta$ — тогда $dS = ds\, dt$. По формуле,

$$u(0,0,z) = \iint_{s^2+t^2 \leq 1} \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{s^2+t^2+z^2}} ds\, dt = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} r\, dr =$$
$$= \pi \left(r\sqrt{r^2+z^2} - z^2 \ln(r + \sqrt{r^2+z^2}) \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\sqrt{z^2+1} + z^2 \ln \frac{z}{1 + \sqrt{z^2+1}} \right).$$

Упражнение 14. *Найдите поток векторного поля*
1. $F = (x, y)$ в $\mathbb{R}^2$ через C — окружность радиуса R;

2. $F=(x,y,z)$ *через сферу* S *радиуса* R*;*
3. $F=-(x,y,z)/r$ *через сферу* S *радиуса* R*.*
4. Для каждого векторного поля из 1), 2) и 3) найдите дивергенцию.
5. Для каждого векторного поля из 1), 2) и 3) найдите потенциал, если он есть.
6. Запишите оператор Лапласа Δ *в* $\mathbb{R}^3$ *в сферических координатах.*
8. Найдите объемный потенциал для шара $B_R(0)$ *в* $\mathbb{R}^3$ *с плотностью: а)* $\rho=r$*, б)* $\rho=1/(1+r^2)$*, в)* $\rho=\sqrt{r}$*.*
9. Найдите плоский потенциал для круга $U_R(0)$ *в* $\mathbb{R}^2$ *с плотностью: а)* $\rho=1$*, б)* $\rho=r^2$*, в)* $\rho=\sin\varphi$*.*
10. В точке $(x,0,0)$ *найдите потенциал простого слоя, распределенного по сфере* $S_R(0)$ $\mu=\sin\theta/2$ *(здесь* (r,φ,θ) *— сферические координаты).*
11. В точке $(0,0,z)$ *найдите потенциал простого слоя, распределенного по цилиндру* $\{x^2+y^2=1,\ z\in[0,1]\}$ *с плотностью* $\mu=\mu(\varphi)$ *(здесь* (r,φ,z) *— цилиндрические координаты).*
12. В точке $(x,0,0)$ *найдите потенциал двойного слоя, распределенного по сфере* $S_R(0)$ *а)* $\nu=\sin\theta/2$*, б)* $\nu=\cos\theta$ *(здесь* (r,φ,θ) *— сферические координаты).*
13. В произвольной точке (x,y) *найдите потенциал простого слоя в* $\mathbb{R}^2$*, распределенного на окружности* $x^2+y^2=1$ *с плотностью: а)* $\mu=1$*, б)* $\mu=\cos^2\varphi$*.*
14. В произвольной точке (x,y) *найдите потенциал двойного слоя в* $\mathbb{R}^2$*, распределенного на окружности* $x^2+y^2=1$ *с плотностью: а)* $\mu=1$*, б)* $\mu=\sin\varphi$*.*

$\square$

Лекция 13. Задачи Дирихле, Неймана и функции Грина

В предыдущей лекции мы научились строить решения уравнения Лапласа с определенными свойствами (потенциалы простого и двойного слоя). Для того множества задач, которые связаны с оператором Лапласа, этого недостаточно. Дело в том, что мы не рассматривали пока задачи в ограниченной области. Здесь возникают новые эффекты, связанные с граничными условиями. Без граничных условий задачу ставить нельзя: решениями однородного уравнения $\Delta u = 0$ на всем пространстве являются *гармонические функции*. Вы уже знаете, что в $\mathbb{R}^2$ гармонических функций «столько же», сколько аналитических: вещественная часть и мнимая часть любой голоморфной функции являются гармоническими. О пространстве гармонических функций «в целом» мы поговорим на следующей лекции, а сейчас займемся краевыми задачами.

Представим себе такую задачу: туго натянутая мембрана (например, барабан и простыня или мыльная пленка) закреплена над некоторой областью $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Под закреплением понимается условие $u|\partial\mathcal{D} = u_0$ — фиксация функции на границе области. Тогда (не будем сейчас обсуждать, почему) мы приходим к *задаче Дирихле*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ в } \mathcal{D}, \quad u|_{\partial\mathcal{D}} = u_0(x, y).$$

Рассмотрим другую задачу: область Ω в $\mathbb{R}^3$ окружена проводящей поверхностью $\partial\Omega$. Пусть на этой поверхности сосредоточен некоторый электрический заряд, и дополнительно в саму область Ω внесено заряженное тело. Возникает задача Пуассона с условиями Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \rho(x, y, z) \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = u_0(x, y). \tag{11}$$

Рассмотрим третью задачу: плоская область $\mathcal{D}$ заполнена несжимаемой жидкостью, а на границе поставлено условие непротекания. Оказывается, что безвихревое плоскопараллельное течение жидкости приведет к уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \text{ в } \mathcal{D}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = u_0(x, y),$$

где n — внешняя нормаль к контуру $\partial\mathcal{D}$. Получили уравнение Пуассона с условиями Неймана на границе.

Лемма 3. *(Формула Грина). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет кусочно–гладкую границу $\partial\Omega$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль, а функции $u(x)$, $v(x) \in C^2(\Omega) \subset C^1(\partial\Omega)$. Тогда справедлива формула Грина*

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \int_{\partial\Omega} \left(vu'_n - uv'_n\right)\, dS,$$

где u'_n и v'_n — производные по направлению $\vec{n}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную подобласть Ω' с кусочно–гладкой границей, лежащую в Ω вместе со своим замыканием. Тогда к векторному полю $F = (vu'_{x_1}, vu'_{x_2}, \dots, vu'_{x_n})$ можно применить формулу Гаусса–Остроградского $\int_\Omega \operatorname{div} F\, dV = \int_{\partial\Omega} (F, \vec{n})\, dS$, а поскольку скалярное произведение $(F, \vec{n})$ равно vu'_n, то

$$\int_{\Omega'} v\Delta u\, dV = \int_{\Omega'} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dV = \int_{\partial\Omega'} vu'_n\, dS - \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dV.$$

Переходя к пределу при $\Omega' \to \Omega$ получим ту же формулу с Ω и $\partial\Omega$. Теперь запишем такое же равенство для $\int_\Omega u\Delta v\, dV$ и вычтем второе из первого. Получим утверждение леммы. $\square$

Мы хотим перенести наш метод фундаментальных решений на поставленные выше задачи. Рассмотрим классическое уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

в ограниченной области с кусочно–гладкой границей. Рассуждения в $\mathbb{R}^2$ полностью аналогичны. Обозначим через $\mathcal{E}(\mathbf{x})$ фундаментальное решение для оператора Лапласа. В $\mathbb{R}^3$ имеем $\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r}$, а в $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\ln r$. Обозначим $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$, а через $\vec{n}$ — внешнюю нормаль к $\partial\Omega$. Предположим, что $f(x)$ такова, что свертка $\int_\Omega f(\xi)\mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)\, dV_\xi$ существует при каждом $\mathbf{x} \in \Omega$. Например, достаточно потребовать непрерывности f.

Лемма 4. *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$. Тогда для любой точки $\mathbf{x} \in \Omega$ имеет место*

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)\Delta u(\xi)\, dV_\xi - \int_{\partial\Omega} \left(u(\xi)\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)}{\partial n_\xi} - \mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)\frac{\partial u}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi.$$

Доказательство. Сначала идея: просто формально применим лемму 3

$$\int_\Omega \left(u(\xi)\Delta_\xi \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x}) - \Delta u(\xi)\mathcal{E}(\xi-\mathbf{x}) \right) dV_\xi = \int_{\partial\Omega} \left(u(\xi)\frac{\partial \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})}{\partial n_\xi} - \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi.$$

Учтем, что $\Delta_\xi \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x}) = \delta_\mathbf{x}(\xi)$ и получим требуемую формулу ($\mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi) = \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})$ в силу четности функции). Однако мы так сделать не можем, т.к. равенство $\Delta_\xi \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x}) = \delta_\mathbf{x}(\xi)$ было выведено в пространстве $\mathcal{S}'$, а функция u там не лежит. Тогда мы вырежем маленький шар $B_\mathbf{x}(\varepsilon)$ с центром в точке $\mathbf{x}$ и применим лемму к области $\Omega \setminus B_\mathbf{x}(\varepsilon)$. Получим

$$\int_{\Omega\setminus B_\mathbf{x}(\varepsilon)} \left(u(\xi)\Delta_\xi \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x}) - \Delta u(\xi)\mathcal{E}(\xi-\mathbf{x}) \right) dV_\xi = -\int_{\Omega\setminus B_\mathbf{x}(\varepsilon)} \Delta u(\xi)\mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})\, dV_\xi =$$
$$= \int_{\partial\Omega} \left(u(\xi)\frac{\partial \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})}{\partial n_\xi} - \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi + \int_{\partial B_\mathbf{x}(\varepsilon)} \left(u(\xi)\frac{\partial \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})}{\partial n_\xi} - \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi$$

(заметили, что $\Delta_\xi \mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)$ в полученной области равно нулю). Теперь

$$\int_{\partial B_\mathbf{x}(\varepsilon)} u(\xi)\frac{\partial \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})}{\partial n_\xi}\, dS_\xi = \frac{1}{4\pi}\iint_{r=\varepsilon} (u(\mathbf{x}) + o(1))(-r^{-2})r^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta = u(\mathbf{x}) + o(1),$$
$$\int_{\partial B_\mathbf{x}(\varepsilon)} \mathcal{E}(\xi-\mathbf{x})\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi}\, dS_\xi = \frac{1}{4\pi}\iint_{r=\varepsilon} O(1) r^{-1} r^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta = O(\varepsilon).$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем результат. $\square$

Для определенности рассмотрим сейчас задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Границу области будем считать кусочно–гладкой, функции ρ и u_0 непрерывными, а решение будем искать в классе $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Определение 28. *Функцией Грина задачи* (11) *называют функцию* $G(\mathbf{x},\xi) = G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$, *определенную на* $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, *обладающую свойствами:*

1. $\Delta_x G = G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} = \delta_0(\mathbf{x}-\xi)$ *в* Ω*;*

2. $G(\mathbf{x},\xi)\big|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} = 0$*;*

3. $G(\mathbf{x},\xi) = \dfrac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\xi|} - g(\mathbf{x},\xi)$, *где* g *— гармоническая функция в* Ω.

Собственно, условие 3 повторяет условие 1, поскольку функция $\frac{1}{4\pi r}$ является фундаментальным решением оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

Лемма 5. *Функция Грина обладает свойством симметрии* $G(\mathbf{x},\xi) = G(\xi,\mathbf{x})$.

Доказательство. Зафиксируем две точки ξ_1, ξ_2 и применим формулу Грина, взяв $v(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x},\xi_1)$, $u(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x},\xi_2)$. Поскольку $\Delta_x G = \delta_\xi(\mathbf{x})$, то получим

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = v(\xi_1) - u(\xi_2) = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS = 0.$$

Детали докручиваются так же, как в предыдущей лемме. □

Теорема 16. *Решение задачи* (11) *имеет вид*

$$u(x,y,z) = \iiint_\Omega G(\mathbf{x},\xi)\rho(\xi)\, dV_\xi - \iint_{\partial\Omega}\frac{\partial G(\mathbf{x},\xi)}{\partial\vec{n}_\xi}u_0(\xi)\, dS_\xi.$$

Доказательство. Если $\Delta u = f$, то из леммы 4

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)f(\xi)\, dV_\xi - \int_{\partial\Omega}\left(u(\xi)\frac{\partial\mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)}{\partial n_\xi} - \mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right) dS_\xi.$$

С другой стороны, можем применить формулу Грина к функциям u и $g(\mathbf{x},\xi) = G(\mathbf{x},\xi) - \mathcal{E}(\mathbf{x}-\xi)$. Так как $\Delta g = 0$, то получим

$$0 = -\int_\Omega g(\mathbf{x},\xi)f(\xi)\, dV_\xi + \int_{\partial\Omega}\left(g(\mathbf{x},\xi)\frac{\partial u}{\partial n_\xi} - u(\xi)\frac{\partial g(\mathbf{x},\xi)}{\partial n_\xi}\right) dS_\xi.$$

Сложим эти два равенства и учтем, что $\mathcal{E}(\xi-\xi) + g(\mathbf{x},\xi) \equiv 0$ при $\xi\in\partial\Omega$. Получим результат. □

Заметим, что наша теорема условна: если решение есть и функция Грина есть, то верна формула... Примем факт существования без доказательства.

Абсолютно аналогично вводится функция Грина для задачи Неймана. Надо второе условие в определении заменить на $\dfrac{\partial G(\mathbf{x},\xi)}{\partial n_{\mathbf{x}}} = 0$ при $x\in\partial\Omega$. Доказательство повторяется. Надо только заметить, что при сложении равенств обнулится нормальная производная функции $G(\mathbf{x},\xi) = \mathcal{E}(\xi-\xi) + g(\mathbf{x},\xi)$.

Пример 59. *Найдите функцию Грина для полупространства* $x > 0$ *в* $\mathbb{R}^3$.

Решение. Будем рассуждать так. Нам нужно подобрать гармоническую функцию $g(\mathbf{x}, \xi)$, равную $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\xi|}$ на границе $x = 0$. Такая функция есть — собственно $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\xi|}$. Она всем хороша, но теряет гармоничность в точке ξ. Зато в другом полупространстве она гармонична. Идея: поменяем полупространства местами! Возьмем

$$g(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Поскольку $x > 0$ и $\xi > 0$, то особенности у этой функции в нашем полупространстве нет, т.е. функция гармонична. Тогда

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

$\square$

Такой метод называется методом отражений. Этим методом можно строить функции Грина для четвертей пространства, октантов и других подобных областей. Он основан на том, что при симметричном отражении гармонической функции относительно плоскостей, получаем вновь гармоническую функцию. Гораздо сложнее проверить следующий факт: *если дана гармоническая функция $u(\mathbf{x})$, то после симметрии относительно сферы функция $\frac{R}{|\mathbf{x}|}u(R^2\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2)$ также гармонична.*

Пример 60. *Найдите функцию Грина для шара $B_0(R)$ в $\mathbb{R}^3$.*

Решение. Возьмем функцию $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\xi|}$ и выполним наше преобразование. Получим функцию

$$g(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{R}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(\frac{R^2x}{x^2+y^2+z^2} - \xi)^2 + (\frac{R^2y}{x^2+y^2+z^2} - \eta)^2 + (\frac{R^2z}{x^2+y^2+z^2} - \zeta)^2}}.$$

$\square$

На этом можно было бы и остановиться, но очень полезно заметить, что после упрощений

$$g(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{R}{4\pi\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\sqrt{(x-\xi^*)^2 + (y-\eta^*)^2 + (z-\zeta^*)^2}},$$

где точка$\xi*$ получена из ξ инверсией относительно сферы. Заметим теперь, что и для полупространства функцию g можно записать в виде $g(\mathbf{x}, \xi) = \mathcal{E}(\mathbf{x}, \xi^*)$, где точка ξ^* получена из ξ симметрией относительно плоскости $x = 0$. Это придает методу характер следующего правила: *чтобы получить гармоническую в области функцию, равную значению потенциала $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \xi)$ на части границы — плоскости или сфере, надо рассмотреть функцию $k\mathcal{E}(\mathbf{x}, \xi^*)$.* Такой метод называют методом мнимых источников (в симметричную точку ξ^* помещается воображаемый источник). Комбинируя симметрии, можем теперь строить функции Грина для полушара, четверть шара и т.д., шарового слоя, разных частей шарового слоя и т.д.

Мы говорили сейчас про зачадачу Дирихле. Различия с задачей Неймана такие же, как в одномерном случае (вспомните четное и нечетное продолжение в задачах колебаний). Если в задаче Дирихле функцию мнимого источника надо вычитать, то в задаче Неймана — прибавлять. В силу симметрии, это обнулит нормальную производную.

Пример 61. *Постройте функцию Грина для задачи Неймана в квадранте x, $y > 0$ в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Возьмем фундаментальное решение $\mathcal{E}(\mathbf{x} - \xi)$, отразим источник относительно $x = 0$ и прибавим. Получим функцию

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Отразим теперь ее относительно $y = 0$. Получим

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \\ + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

□

Перейдем к задачам в $\mathbb{R}^2$. Кроме того, что здесь $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \xi|$, есть и еще одно важнейшее отиличие от задач в $\mathbb{R}^3$. Гармонические функции здесь можно получать из голоморфных отщеплением вещественной части. При этом, гармоничность не теряется при конформных изоморфизмах областей. Появляется новый глобальный метод: *находим изоморфизм нашей области на простейшую (например, полуплоскость), строим функцию Грина там, а затем обратным изоморфизмом переносим функцию в нашу область.*

Пример 62. *Пусть область $\mathcal{D}$ конформно изоморфна верхней полуплоскости* $\mathrm{Im} w > 0$, *причем изоморфизм задается функцией $w = f(z)$, $z \in \mathcal{D}$. Найдите функцию Грина задачи Дирихле в $\mathcal{D}$. Разберите отдельно случай круга $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$.*

Доказательство. Введем обозначения $z = x + iy$, $\xi = \xi + i\eta$, $w = u + iv$, $\zeta = \zeta + i\sigma$. Функцию Грина задачи Дирихле в верхней полуплоскости находим методом отражений

$$G(w, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|w - \zeta^*|}{|w - \zeta|}, \quad \zeta^* = \zeta - i\sigma.$$

Сразу записать $w = f(z)$, $\zeta = f(\xi)$ мы не можем, т.к. точка ζ^* не лежит в верхней полуплоскости и отображение в этой точке может не быть определено (в простых случаях можно, конечно продолжать f в нижнюю полуплоскость по принципу симметрии). Тогда преобразуем

$$G(w, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|w\zeta - |\zeta|^2|}{|w - \zeta| \cdot |\zeta|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|f(z)f(\xi) - |f(\xi)|^2|}{|f(z) - f(\xi)| \cdot |f(\xi)|}.$$

Для круга отображение $f(z)$ можно взять $f(z) = i\frac{1-z}{1+z}$. Чтобы избежать вычислений, заметим, что ДЛО обладает свойством симметрии, которое позволяет продолжить отображение на внешность круга (со значениями в нижней полуплоскости) той же формулой. Тогда подставим $w = f(z)$, $\zeta = f(\xi)$, $\zeta^* = \overline{f(\xi)}$ в исходную формулу для $G(w, \zeta)$ и получим

$$G(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\left| i\frac{1-z}{1+z} + i\frac{1-\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}} \right|}{\left| i\frac{1-z}{1+z} - i\frac{1-\xi}{1+\xi} \right|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|1 - z\bar{\xi}|}{|z - \xi|}.$$

□

Для демонстрации работоспособности метода решим задачу Жуковского об обтекании цилиндра.

Пример 63. *Представим себе цилиндр $C = \{x^2 + y^2 \leq 1, z \in \mathbb{R}\}$, который обтекается потоком воздуха, набегающим из $x = -\infty$ со скоростью $V(-\infty, y, z) = (1, 0, 0)$. Нам надо найти поле скоростей $V(x, y, z) = (u, v, w)$ в области $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Логично предположить, что в силу расположения цилиндра потоки, соответствующие $z = z_1$ и $z = z_2$ не смешиваются, т.е. везде $w = 0$. Тогда третью координату можно отбросить и перейти к плоской задаче $C = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, $V(x, y) = (u, v)$. Предположим, что воздух несжимаем (это вполне логично), т.е. $u'_x + v'_y = 0$. Предположим, что течение воздуха безвихревое (а вот это неверно, но мы берем простейшую модель), т.е. $u'_y - v'_x = 0$. Тогда пара $(u, -v)$ удовлетворяет условиям Коши–Римана, т.е. можно искать только гармоническую функцию u. Предположим, что поток воздуха от цилиндра не отражается, а обтекает его по контуру (это неверно, но мы берем простую модель). В силу симметрии задачи, ее можно решать в верхней полуплоскости $y > 0$.*

Итак, мы ищем гармоническую функцию в области $\{y > 0, x^2 + y^2 > 1\}$ с условием $u(x, 0) = 1$ при $|x| > 1$ и $u(x, y) = \frac{1}{2}\vec{\tau}$ на полуокружности, где $\vec{\tau}$ — касательный вектор. Вспомним, что конформные отображения не меняют гармоничности. Отобразим верхнюю полуплоскость с вырезанным полукругом на верхнюю полуплоскость обратной функцией Жуковского. В полуплоскости получим задачу поиска гармонической функции с условием $u(\xi, 0) = 1$ на всей прямой $\mathbb{R}$. Решение очевидно: $u(\xi, \eta) = 1$. Остается применить прямую функцию Жуковского и мы получим ответ.

Упражнение 15. *1. Постройте функцию Грина для первого квадранта в $\mathbb{R}^2$ и для верхнего единичного полукруга в $\mathbb{R}^2$.*
2. Проверьте теорему Кельвина: если $u(x)$ гармонична в $\mathbb{R}^3$, то и функция $|x|^{-1}u(x|x|^{-2})$ тоже.
3. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для полушара $|\mathbf{x}| < R$, $z > 0$ в $\mathbb{R}^3$.
4. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для плоского слоя $0 < z < 1$ в $\mathbb{R}^3$.
5. Решите задачу $\Delta u = 0$, $u(x, y, 0) = \cos x \cos y$ в полупространстве $z > 0$.
6. Решите задачу $\Delta u = \frac{2}{(x^2+y^2+(z+1)^2)^2}$, $u(x, y, 0) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ в полупространстве $z > 0$.
7. Решите задачу $\Delta u = 0$ в полуполосе $x > 0$, $0 < y < \pi$ с краевыми условиями $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$, $u(0, y) = 1$.
8. Решите задачу $\Delta u = 0$ в первом квадранте $x, y > 0$ с краевыми условиями $u(0, y) = 0$, $u(x, 0) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
9. Решите задачу $\Delta u = (x^2 + y^2)^{n/2}$, $n \in \mathbb{N}$, в круге $|z| < 1$ с нулевым краевым условием.

Лекция 14. Гармонические функции. Метод разделения переменных

Многие свойства гармонических функций двух переменных вы уже знаете из курса ТФКП, где они были доказаны. Здесь мы не будем передоказывать эти свойства для случая $n > 2$ переменных. Ограничимся формулировками.

Определение 29. *Функция $u(x_1, \dots, x_n)$ называется гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если и дважды дифференцируема в Ω и $\Delta u = 0$. Класс гармонических функций обозначаем $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Теорема 17 (Слабый принцип экстремума). *Пусть $u \in \mathcal{H}(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\Omega})$, причем Ω — ограниченная область. Обозначим $m = \min_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})$, $M = \max_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})$. Тогда всюду в $\overline{\Omega}$ выполнено двойное неравенство $m \le u(\mathbf{x}) \le M$.*

Следствие 8. *Пусть $u \in \mathcal{H}(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\Omega})$, причем Ω — ограниченная область. Если $u|_{\partial\Omega} = 0$, то $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.*

Следствие 9. *Решение задачи Дирихле $\Delta u = f$ в Ω, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ единственно, если Ω — ограниченная область.*

Следствие 10. *Пусть u_1 и u_2 — решения задачи Дирихле с одной и той же правой частью f, в одной и той же ограниченной области Ω, но для разных краевых условий φ_1 и φ_2. Тогда $\sup_{\overline{\Omega}} |u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})| \le \sup_{\partial\Omega} |\varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi_2(\mathbf{x})|$.*

Следствие 11. *Если $\{u_n\}_1^\infty$ — последовательность гармонических в Ω и непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций, и эти функции равномерно на $\partial\Omega$ сходятся, то они сходятся равномерно и на всей $\overline{\Omega}$.*

Теорема 18 (Теорема Гарнака). *В условиях предыдущего следствия функция $u(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\mathbf{x})$ гармонична в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$.*

Теорема 19 (Строгий принцип макисмума). *Гармоническая в области Ω функция, отличная от константы, не может иметь точек локального максимума или минимума (даже нестрогих).*

Теорема 20 (Теорема единственности). *Если гармоническая в Ω функция обнуляется на некотором шаре $B_r \subset \Omega$, но она тождественный ноль всюду в Ω.*

Теорема 21 (Теорема о среднем). *Пусть $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, а шар $B_R(\mathbf{x}^0) \subset \Omega$ вместе со сферой $S_R(\mathbf{x}^0)$. Тогда*

$$u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{sR^{n-1}} \int_{S_R(\mathbf{x}^0)} u(\mathbf{x})\, ds = \frac{1}{vR^n} \int_{B_R(\mathbf{x}^0)} u(\mathbf{x})\, dV,$$

где $s = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь сферы единичного радиуса, а $v = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ — объем шара единичного радиуса.

Теорема 22 (О бесконечной дифференцируемости). *Пусть $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Тогда $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Теорема 23 (Теорема Лиувилля)**.** *Гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция, отличная от константы, не может быть ограничена ни сверху, ни снизу.*

Различают четыре основные краевые задачи:
1. *Внутренняя задача Дирихле.* Дана ограниченная область[6] Ω с непрерывной $\partial\Omega$ (конечный набор непрерывных многообразий) и непрерывная функция φ, заданная на $\partial\Omega$. Надо найти функцию $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.
2. *Внешняя задача Дирихле.* Дана ограниченная область Ω, для которой $\Omega_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ — тоже область[7], с непрерывной границей $\partial\Omega = \partial\Omega'$ и непрерывная функция φ, заданная на $\partial\Omega'$. Надо найти функцию $u \in \mathcal{H}(\Omega') \cap C(\overline{\Omega}')$, $u|_{\partial\Omega'} = \varphi$, $u = o(1)$ при $\Omega' \ni \mathbf{x} \to \infty$ (в двумерном случае условие заменяется на $u = o(\ln|\mathbf{x}|)$).
3. *Внутренняя задача Неймана.* Дана ограниченная область Ω с гладкой границей (конечный набор многообразий класса C^1) и непрерывная функция φ, заданная на $\partial\Omega$. Надо найти функцию $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \varphi$ (n — внешняя нормаль).
4. *Внешняя задача Неймана.* Дана ограниченная область Ω , для которой $\Omega_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ — тоже область, с гладкой границей $\partial\Omega = \partial\Omega'$ (многообразие класса C^1) и непрерывная функция φ, заданная на $\partial\Omega'$. Надо найти функцию $u \in \mathcal{H}(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega}')$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega'} = \varphi$ (n — внешняя нормаль), $u = o(1)$ при $\Omega' \ni \mathbf{x} \to \infty$ (в двумерном случае условие заменяется на $u = o(\ln|\mathbf{x}|)$).

Теорема 24. *Решение внутренней задачи Дирихле существует и единственно. Если $\partial\Omega$ класса C^1, то решением является потенциал двойного слоя.*
Решение внешней задачи Дирихле существует и единственно. Если $\partial\Omega$ класса C^1, то решением является сумма потенциала двойного слоя и потенциала $|\mathbf{x}|^{-1}\int_{\partial\Omega'}\varphi(\mathbf{x})\mu_0(\mathbf{x})\,dS$.
Решение внутренней задача Неймана существует при условии $\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\,dS = 0$ и единственно. Решением является потенциал простого слоя.
Решение внешней задачи Неймана существует и единственно. Решением является потенциал простого слоя.

Потенциалы простого и двойного слоя мы писать уже умеем. Научимся сейчас получать решения в виде рядов. Этот метод нам хорошо знаком — наши любимые ряды Фурье.

Пример 64. *Решите методом Фурье уравнение Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = xy$ в квадрате $0 \le x,\ y \le 1$ с краевыми условиями Дирихле $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = y$, $u(x,1) = u(1,y) = 1$.*

Решение. Переменные в уравнении Лапласа равноправны. Зафиксируем переменную x как пространственную, а y как диманическую, т.е. будем воспринимать условия на отрезках $y = 0$ и $y = 1$ как начальное и терминальное, а условия на отрезках $x = 0$ и $x = 1$ будем считать граничными. Тогда первое дело — обнулить граничные условия. Подберем функцию $f(x,y) = y(1-x)+x$ и вычтем ее, т.е. положим $v(x,y) = u(x,y) - f(x,y)$. Получим

$$v_{xx} + v_{yy} = xy, \quad v(x,0) = -x,\ v(x,1) = 0,\ v(0,y) = v(1,y) = 0.$$

Еще раз: мы пишем уравнение в виде $v_{yy} = Lv + xy$, где L — оператор по переменной $x \in [0,1]$, равный $-v''$ с краевыми условиями Дирихле $v(0) = v(1) = 0$. Ищем собственные

[6] здесь область — открытое связное множество
[7] в частности, отсюда следует односвязность Ω

значения и собственные функции этого оператора $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $v_n(x) = \sqrt{2}\sin(\pi n x)$. Теперь раскладываем решение

$$v(x, y) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)\sin(\pi n x).$$

Перед тем, как подставить в уравнение этот ряд, разложим правую часть и начальные условия по данной системе:

$$x = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi n x), \quad a_n = \sqrt{2}\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{\pi n}.$$

Тогда после подстановки и приравнивания коэффициентов, получим

$$c_n'' - \pi^2 n^2 c_n + \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{\pi n} y = 0, \quad c_n(0) = \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{\pi n},\ c_n(1) = 0.$$

Обратите внимание, что в отличие от динамических задач, мы получили на коэффициенты вновь краевую задачу. Находим решение в виде суммы решения однородного уравнения и частного решения (ищем его в виде ky)

$$c_n(y) = A_n \operatorname{sh}(\pi n x) + B_n \operatorname{ch}(\pi n x) + \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{\pi^3 n^3} y.$$

Остается учесть краевые условия, откуда

$$B_n = \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{\pi n}, \quad A_n = \frac{\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{\pi n \operatorname{sh}(\pi n)}\left(\operatorname{ch}(\pi n) + \frac{1}{\pi^2 n^2}\right).$$

□

В этой задаче нам удалось получить решение за счет «прямоугольного» вида области. Заметим, что области сложного вида можно сводить к прямоугольным с помощью замены координат.

Пример 65. *Решите внешнюю задачу Дирихле* $u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{x^2+y^2}$ *для внешности круга* $x^2 + y^2 > 1$ *с условием* $u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = \sin\varphi$. *Среди всех решений выберите то (или те), которое имеет наименьший порядок роста при* $\mathbf{x} \to \infty$.

Решение. Запишем уравнение в полярных координатах

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}, \quad u(1, \varphi) = \sin\varphi.$$

Здесь переменные меняются в пределах $r \geq 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Условие гладкости решение ведет к условиям $u(r, 0) = u(r, 2\pi)$, $u'_\varphi(r, 0) = u'_\varphi(r, 2\pi)$. Кроме начального условия при $r = 1$ в постановку задачи входит условие $u(r, \varphi) = o(\ln r)$ при $r \to \infty$ (терминальное условие на бесконечности). Будем воспринимать φ как пространственную переменную, а r как динамическую. По переменной φ имеем оператор второго дифференцирования с периодическими краевыми условиями. Находим его собственные значения и собственные функции

$$\lambda_n = n^2, \qquad \Phi_n^1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\varphi, \quad \Phi_n^2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\varphi, \quad n \geq 1,$$

(здесь каждое собственное значение имеет кратность два). Плюс есть собственное значение $\lambda_0 = 0$ первой кратности с собственной функцией $\Phi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Разложим функцию u в ряд по этой системе

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0(r)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi).$$

После подстановки получаем уравнения на коэффициенты

$$a_0'' + \frac{1}{r}a_0' = \frac{\sqrt{2\pi}}{r^2}, \quad a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n = 0, \quad b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n = 0,\ r > 1,\ n \geq 1.$$

Раскладываем начальное условие в ряд Фурье по синусам и косинусам (она уже разложена, на самом деле) и получаем начальные условия $a_0(1) = a_n(1) = b_n(1) = 0$ за исключением коэффициента b_1, для которого $b_1(1) = 1$. Все уравнения для $n \geq 1$ однородные. Легко угадывается фундаментальная система решения r^n и r^{-n}. Из условия минимизации роста решения на бесконечности, оставляем только решение $C_n r^{-n}$. Из начальных условий получаем $a_n(r) = b_n(r) \equiv 0$ за исключением функции $b_1(r)$. Для нее имеем $b_1(r) = r^{-1}$.

Отдельно решаем уравнение на a_0. Сделаем замену $a'(r) = f(r)$, откуда $f'(r) + \frac{1}{r}f(r) = \frac{\sqrt{2\pi}}{r^2}$. Это линейное уравнение первого порядка легко интегрируется $f(r) = \frac{A}{r} + \sqrt{2\pi}\frac{\ln r}{r}$. Интегрированием находим

$$a_0(r) = A\ln r + B + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln^2 r.$$

Из начального условия $a_0(1) = 0$ находим $B = 0$. Условия на рост на бесконечности не позволяют определить константу A, т.к. все решения имеют рост порядка $\ln^2 r$. Окончательно,

$$u(x,y) = A\ln r + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln^2 r + \frac{\sin\varphi}{r}.$$

□