КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 5 – 7
УСЛОВИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. На одной далекой планете единицы измерения длины, времени и массы называются соответственно «Пье», «Пи» и «Пуа». 1 Пье=40 сантиметров, 1 Пи=100 секунд, 1 Пуа=400 грамм. Житель планеты предлагает купить у него летающий катер, разгоняющийся до скорости 40 000 Пье/Пи, с расходом топлива 12 Пуа на 100 000 Пье пробега. Найдите скорость катера в км/час и расход топлива в кг на 100 км пробега.

   Решение: 1 Пье=40 см=0,4 м=0,0004 км. 1 Пи =100 с=100/3600 часа=1/36 часа. 1 Пуа=400 г=0,4 кг. Тогда $40\,000\,\frac{\text{Пье}}{\text{Пи}} = 40000 \cdot 0{,}0004 \cdot 36\ \text{км/ч} = 576\ \text{км/ч}$. Далее, $12\ \text{Пуа на } 100000\ \text{Пье} = 12 \cdot 0{,}4\ \text{кг на } 100000 \cdot 0{,}0004\ \text{км} = 4{,}8\ \text{кг на } 40\ \text{км}$. Тогда на 100 км пробега будет $4{,}8 \cdot \frac{100}{40}\,\text{кг} = 12\ \text{кг}$.

   Ответ: 576 км/ч, 12 кг.

2. Одна морская миля (она равна 1852 м) имеет именно такую длину потому, что перемещение по меридиану Земли на одну морскую милю в точности соответствует изменению географической широты на 1 минуту ($1/60$ градуса). Пользуясь только этими данными, найдите радиус Земли (точнее, то значение, которое ему приписывалось на момент определения длины морской мили). Ответ дайте в км с точностью до целых. Для удобства вычислений считайте, что число $\pi = 3{,}15$, а Земля – идеальный шар.

   Решение: Длина полуокружности $C = \pi R$ соответствует изменению широты на 180 градусов. Тогда длина дуги меридиана для одной минуты равна $\frac{\pi R}{180 \cdot 60} = 1852\ \text{м} = 1{,}852\ \text{км}$. Отсюда $R = 1{,}852 \cdot 180 \cdot \frac{60}{3{,}15} = 6350\ \text{км}$ (с точностью до целых). Если взять число пи более точно, то получим $R = 6360$.

   Ответ: 6350 км.

3. В школе юного исследователя космоса на занятии по математике первый вызванный к доске ученик написал на доске в строку несколько целых чисел, второй записал под каждым написанным числом квадрат этого числа, третий посчитал сумму всех чисел, написанных на доске. Будет ли полученная сумма четным числом (всегда)? Или всегда нечетным? Или может быть и четным, и нечетным? Ответ обоснуйте.

   Решение: Если число четно, то его квадрат тоже четен. Если число нечетно, то его квадрат тоже нечетен. Значит, складывая число с его квадратом, всегда получим четное число. Складывая несколько таким чисел, получим общую сумму – она четна.

   Ответ: всегда четным.

4. Жители, населяющие планету N трех цветов: синие, красные или зеленые. Синие всегда врут зеленым, красные – синим, зеленые – красным, а во всех остальных случаях жители планеты N говорят друг другу правду. Во время дождя все жители надевают серые дождевики, полностью скрывающие их цвет. Однажды, пережидая под навесом дождь, несколько жителей, не снимая дождевиков, разговаривали, стоя по кругу, и каждый сказал своему соседу справа: «Я – синий». Сколько среди них было зеленых?

   Решение: Предположим, среди стоящих есть зеленый. Кто может стоять слева от него? Если красный, то красный скажет зеленому правду: «я красный» - противоречие. Если синий, то он скажет зеленому неправду, т.е. не скажет «я синий» - противоречие. Если

зеленый, то он скажет зеленому правду: «я зеленый» - вновь противоречие. Значит, зеленых среди стоящих нет. С другой стороны, описываемая ситуация возможна. Например, если в круге стоят только синие, то они скажут друг другу правду, т.е. все скажут «я синий», что соответствует условию.
Ответ: ноль.

5. В магазине продается набор из n палочек. Все они имеют разную длину. Длина каждой палочки – целое число от 1 до 36 см включительно. Всегда ли можно выбрать из набора три палочки, соединив концы которых, можно сложить на плоскости треугольник? Рассмотрите случаи:
   а) в наборе $n = 8$ палочек,
   б) в наборе $n = 10$ палочек.

Решение а): Рассмотрим набор 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Никакие три палочки из такого набора не образуют треугольник, так как длина наибольшей из каждой тройки палочек больше суммы двух других длин.
Ответ: нет, не всегда.
Решение б): Занумеруем палочки по возрастанию длин. Пусть длина первой палочки равна x, а второй равна y. Чтобы третья не образовала с первыми двумя треугольник, необходимо, чтобы ее длина была $x + y$ или больше. Аналогично, длина четвертой $\geq x + 2y$. Длина пятой $\geq 2x + 3y$, длина шестой $\geq 3x + 5y$, длина седьмой $\geq 5x + 8y$, длина восьмой $\geq 8x + 13y$, длина девятой $\geq 13x + 21y$, длина десятой $\geq 21x + 34y$. Даже для минимально возможных $x = 1$, $y = 2$ эта длина ≥ 89, что противоречит условию.
Ответ: да, всегда.

6. Учащийся школы юного исследователя космоса наблюдал с помощью телескопа планету Нептун в противостоянии. В процессе наблюдения Нептун постоянно выходил из поля зрения телескопа, и наблюдатель задумался – а с какой скоростью движется Нептун относительно наблюдателя? Найдите модуль этой скорости, считая, что Нептун находится в плоскости эклиптики (то есть, вращается вокруг Солнца в одной плоскости с Землей), его орбита является круговой с радиусом 30 а.е., орбиту Земли также считайте круговой. Ответ запишите в км/с (1 а.е. считайте равной 150 000 000 км, период обращения Нептуна по своей орбите 60 190 дней).

Решение: Скорость движения Нептуна по орбите относительно Солнца будет равна длине окружности орбиты, деленной на орбитальный период планеты. То есть,
$$v_N = \frac{2\pi a_N}{P_N} = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 150\,000\,000}{60190 \cdot 86400} \approx 5{,}44\,\frac{\text{км}}{\text{с}},$$
где a_N – радиус орбиты Нептуна в километрах, а P_N – его орбитальный период в секундах. Скорость движения Земли по орбите относительно Солнца составляет приблизительно
$$v_G = \frac{2\pi a_G}{P_G} = \frac{2\pi \cdot 150\,000\,000}{365{,}25 \cdot 86400} \approx 29{,}87\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$
Земля и Нептун двигаются по своим орбитам в одном и том же направлении, Земля обгоняет Нептун примерно на 24,4 км/с, это и есть скорость, с которой Нептун движется относительно земного наблюдателя.
Ответ: 24,43 км/с.