Факультет космических исследований

Аналитическая геометрия

Москва, 2019

Над книгой работали:
Бармин Максим Александрович,
Борисенко Дарья Владимировна,
Виннер Андрей Даниилович,
Катков Дмитрий Александрович,
Комаровский Александр Юрьевич,
Лаврухина Анастасия Дмитриевна,
Миронов Антон Сергеевич,
Нерубацкая Анастасия Ильинична,
Тарабрина Александра Кирилловна,
Филиппов Александр Алексеевич,
Шигин Глеб Сергеевич

Made by LaTeX

Это нулевое издание данной книги, здесь пока не так много полезного материала, но мы верим, что будущие поколения ФКИшников смогут дополнить это до полноценной книги, может, и мы найдем хорошие материалы...

Занятие 1

Векторы и декартовы координаты

Определение 1. *Координатами* называют числа, определяющие положение точки на плоскости $\mathbb{R}^2$ или в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или же в произвольном пространстве $\mathbb{R}^n$). Для удобства ограничимся $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Прямоугольные (*декартовы*) координаты точки на плоскости — снабжённые знаком *плюс* и *минус* расстояния от точки x до до двух взаимно перпендикулярных прямых Ox_1 и Ox_2 — *осей координат*, — точка пересечения которых считается началом координат. На рисунке (рис. 1.1) точка $x = \{x_1, x_2\}$ описывается двумя координатами x_1 и x_2. Горизонтальная x_1 — называется *абсциссой*, вертикальная x_2 — *ординатой*.

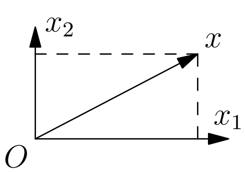


Рис. 1.1.

Систему декартовых координат в пространстве задают три взаимно перпендикулярные плоскости, относительно которых положение точки определяется тремя числами аналогично предыдущему, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Определение 2. Точку $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ также называют *вектором* либо *радиус–вектором*.

Определение 3. *Система координат* — объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

Упражнение 1. Даны точки $A(2, -3)$, $B(3{,}1)$ и $C(-1{,}5)$. Зная, что $ABCD$ — параллелограмм, найти координаты точки D.

Решение. Вектор $\overrightarrow{CD}$ равен вектору $\overrightarrow{BA}$ (вектору $\overrightarrow{AB}$ не равен!). Значит, если отложить вектор $\overrightarrow{BA}$ от точки C, то получим точку D. Чтобы найти координаты вектора, вычитаем координаты начала из координат конца

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты точки D, прибавляем координаты вектора $\overrightarrow{BA}$ к координатам точки C.
Ответ: $D = (-2{,}1)$. ■

Можно было считать другим способом: найти вектор $\overrightarrow{BC}$ и отложить его от точки A.

Упражнение 2. Даны точки $A(2, -3)$, $B(3{,}1)$ и $C(-1{,}5)$. Зная, что $ABCD$ — параллелограмм, найти координаты точки M — пересечения диагоналей AC и BD.

Решение. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересеченния пополам. Значит, необходимо отложить половину вектора $\overrightarrow{AC}$ от точки A

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $M = (1/2, 1)$. ■

Упражнение 3. Даны точки $A(2, -3)$, $B(3{,}1)$ и $C(-1{,}5)$. Найдите координаты точки E пересечения медиан треугольника ABC.

Решение. Сначала найдем координаты точки M — середины отрезка AB. Для этого просто возьмем полусумму координат концов отрезка

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\-1\end{pmatrix}.$$

Теперь вспомним, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит, надо разделить отрезок CM в отношении $2:1$, считая от точки C

$$E = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2{,}5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $E = (4/3, 1)$. ■

Вообще, если точка Z делит отрезок $[X,Y]$ в отношении $a:b$, считая от точки X, то

$$Z = X + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{XY} = X + \frac{a}{a+b}(Y-X) = \frac{b}{a+b}X + \frac{a}{a+b}Y.$$

Если про точку Z известно только то, что она лежит на отрезке $[X,Y]$, то числа a и b неизвестны. Тогда удобнее ввести параметр $t = \frac{a}{a+b} \in [0{,}1]$ и записать

$$Z = (1-t)X + tY.$$

При изменении параметра t от 0 к 1 точка Z «пробегает» отрезок $[X,Y]$ от точки X к точке Y.

Упражнение 4. Даны четыре точки $A(3,-1)$, $B(-1{,}6)$, $C(0{,}5)$ и $D(6,-8)$. Найдите координаты точки E пересечения отрезков AB и CD.

Решение. Точка E лежит на отрезке AB. Значит,

$$E = (1-t)A + tB = (1-t)\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-4t\\7t-1\end{pmatrix}$$

для некоторого $t \in [0{,}1]$. С другой стороны, точка E лежит на отрезке CD, т.е.

$$E = (1-s)C + sD = (1-s)\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6s\\5-13s\end{pmatrix}$$

для некоторого $s \in [0{,}1]$. Приравняем эти две записи точки E и получим систему уравнений

$$\begin{cases}3-4t = 6s\\7t-1 = 5-13s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4t+6s = 3\\7t+13s = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 0{,}3\\s = 0{,}3\end{cases}$$

Подставляя, например, значение t, найдем $E = (1{,}8,\ 1{,}1)$.
Ответ: $E = (1{,}8,\ 1{,}1)$. ■

Если разрешить параметру t в записи

$$Z = (1-t)X + tY$$

меняться на всей числовой оси, то точка Z «пробежит» всю прямую, проходящую через точки X и Y.

Упражнение 5. Даны точки $A(1{,}3,-1)$ и $B(-2,-4{,}1)$. Пересекает ли прямая AB ось Ox?

Решение. Пусть C — некоторая точка прямой AB. Тогда $C = (1-t)A + tB = (1-3t, 3-7t, -1+2t)$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Если потребовать дополнительно, что точка C лежит на оси Ox, то ее координаты по другим осям должны обратиться в ноль, т.е. $3-7t = -1+2t = 0$, что невозможно.
Ответ: Нет. ■

Можно заметить, что любая прямая (на плоскости или в пространстве) приобретает запись $(a_0 + at, b_0 + bt, c_0 + ct)$ с какими–то числами a_0, b_0, c_0, a, b, c и переменным параметром $t \in \mathbb{R}$.

Такое уравнение прямой называют *параметрическим*, а вектор (a,b,c) называют *направляющим вектором* этой прямой. Две прямые параллельны (или свопадают) в точности тогда, когда у них направляющие векторы коллинеарны.

Упражнение 6. Написать уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0$, проходящих через начало координат.

Решение. Прямая, проходящая через начало координат, имеет уравнение $y = kx$. Остается найти значение k. Будем искать общую точку прямой и окружности, т.е. подставим $y = kx$ в уравнение окружности. После упрощений получим уравнение на x

$$(1 + k^2)x^2 - (12 + 4k)x + 32 = 0.$$

Это уравнение может не иметь решений (прямая и окружность не пересекаются — нас этот случай не интересует), может иметь два решения (прямая является для окружности секущей — это нам тоже не подходит), а может иметь ровно одно решение (прямая касается окружности). Последний случай реализуется, если дискриминант квадратного уравнения равен нулю. Отсюда и находим k

$$(12 + 4k)^2 = 128(1 + k^2) \Leftrightarrow\ k = 1 \text{ или } k = -\frac{1}{7}.$$

Ответ: $y = x$ и $7y = -x$. ■

Занятие 2

Геометрическое место точек на плоскости и в пространстве

Определение 1. *Геометрическое место точек* — фигура, состоящая из всех точек пространства, обладающих определенным свойством, и не содержащая ни одной точки, не обладающей этим свойством.

Рассмотрим ГМТ на плоскости, обладающие простейшими и наиболее часто выражающимися свойствами:

1. ГМТ, отстоящих на данном расстоянии r от данной точки O, есть окружность с центром в точке O радиуса r.
2. ГМТ равноудаленных от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.
3. ГМТ равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через точку пересечения и делящих углы между данными прямыми пополам.
4. ГМТ, отстоящих на одинаковом расстоянии h от прямой, есть две прямые, параллельные этой прямой и находящиеся по разные стороны от нее на данном расстоянии h.
5. Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой m в данной на ней точке M, есть перпендикуляр к AB в точке M (кроме точки M).
6. Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней очке M, есть прямая, проходящая через точку M и центр данной окружности (кроме точек M и O).
7. ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, составляет две дуги окружностей, описанных на данном отрезке и вмещающих данный угол.
8. ГМТ, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в отношении $m : n$, есть окружность (называемая окружностью Аполлония).
9. Геометрическое место середин хорд, проведенных из одной точки окружности, есть окружность, построенная на отрезке, соединяющем данную точку с центром данной окружности, как на диаметре.
10. Геометрическое место вершин треугольников равновеликих данному и имеющих общее основание, составляет две прямые, параллельные основанию и проходящие через вершину данного треугольника и ему симметричного относительно прямой, содержащей основание.

Упражнение 1. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от точек $A(0{,}3)$ и $B(2,-1)$.

Решение. Пусть точка $C(x,y)$ равноудалена от A и B. Тогда

$$|AC| = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = |BC| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}.$$

Возводим в квадрат и упрощаем. Получаем равенство

$$x - 2y = -1.$$

Как и следовало ожидать, получилось уравнение прямой. Итак, геометрическое место точек, равноудаленных от A и B — это все точки $C(x,y)$, координаты которых связаны равенством $x - 2y = -1$.
Ответ: Прямая $x - 2y = -1$. ■

Упражнение 2. Найдите геометрическое место точек, которые в 2 раза ближе к точке $A(0,3)$, чем к точке $B(2,-1)$.

Решение. Пусть точка $C(x,y)$ в 2 раза ближе к точке A, чем к точке B. Тогда

$$|BC| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 2|AC| = 2\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = .$$

Возводим в квадрат и упрощаем. Получаем равенство

$$3x^2 + 4x + 3y^2 - 26y + 31 = 0.$$

Или, если выделить полные квадраты

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{80}{9}.$$

Получилась окружность.
Ответ: Окружность $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{80}{9}$. Пусть даны две точки A и B. Геометрическое место точек C, для которых сумма расстояний $|AC| + |BC|$ постоянна, называют *эллипсом*. При этом, если константа $|AC| + |BC|$ меньше, чем длина отрезка $|AB|$, то элллипс оказывается пустым. ■

Упражнение 3. Пусть $A = (0,3)$, а $B = (3,7)$. Найдите геометрическое место точек C, для которых $|AC| + |BC| = 5$.

Решение. Заметим, что $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. В треугольнике ABC сумма сторон $|AC| + |BC|$ не может равнятся третьей стороне. Значит, точка C лежит на прямой AB. Еще немного подумав, понимаем, что лежать она должна между точками A и B, т.е. искомое геометрическое место точек — отрезок $[A,B]$ (эллипся выродился в отрезок).
Можно решать «честно». Положим $C = (x,y)$. Тогда

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = 25.$$

Перенесем первый корень в правую часть, возведем в квадрат, упростим, еще раз возведем в квадрат, упростим и получим уравнение прямой AB. При этом условия на одинаковость знака правых и левых частей уравнения при возведения в квадрат, ограничат ответ до отрезка $[A,B]$. ■

Упражнение 4. Даны точки $A(1,-3)$, $B(4,-1)$ и $C(-1,3)$. Найдите геометрическое место точек X, для которых $|AX|^2 + |BX|^2 = |CX|^2$.

Решение. Пусть $X = (x,y)$. Тогда

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (x-4)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y+7)^2 = 68.$$

Значит, искомое геометрическое место точек — окружность. ■

Упражнение 5. Найти геометрическое место точек C, для которых длина отрезка $|AC|$, где $A = (-3,3)$, равна длине касательной, проведенной из точки C к окружности $x^2+y^2-6x-6y+14 = 0$.

Решение. Запишем уравнение окружности в виде $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$. Видим, что ее центр находится в точке $B(3,3)$, а радиус равен $r = 2$. Проведем секущую CB. Она пересечет окружность в каких–то точках M и N, причем $|CM| = |CB| - r$, а $|CN| = |CB| + r$. По теореме о длине касательной и секущей, квадрат длины касательной равен произведению $|CM| \cdot |CN| = |CB|^2 - r^2$. Тогда условие задачи имеет вид $|AC|^2 = |CB|^2 - r^2$. Положим $C = (x,y)$,

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 - 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: искомое место точек — прямая с уравнением $3x + 1 = 0$. ■

В последней задаче мы пришли к вопросу о точках C, для которых разность квадратов расстояний $|CB|^2 - |CA|^2$ постоянна. Геометрическое место точек, для которых постоянна разность $|CB| - |CA|$, называется *гиперболой*. Точнее, это условие описывает одну ветвь гиперболы. Вся гипербола — это геометрическое место точек C, для которых постоянна величина $||CB| - |CA||$. При этом точки A и B называют *фокусами* гиперболы.

Упражнение 6. Найдите фокусы гиперболы $y = 1/x$.

Решение. В силу симметрии относительно начала координат и симметрии относительно прямой $y = x$, фокусы должны иметь вид $A = (a,a)$ и $B = (-a, -a)$ для некоторого $a > 0$. Получаем уравнение гиперболы

$$\left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}\right| = c.$$

Переносим второй корень в правую часть и возводим в квадрат

$$\pm c\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = -2ax - 2ay - \frac{c^2}{2}.$$

Еще раз возводим в квадрат и упрощаем

$$c^2(x^2 + y^2) + 2a^2c^2 = 4a^2(x^2 + y^2) + 8a^2xy + \frac{c^4}{4}.$$

Для того, чтобы сократить слагаемые $x^2 + y^2$, положим $4a^2 = c^2$. Тогда уравнение примет вид $xy = \frac{a^2}{2}$, откуда $a = \sqrt{2}$.

Ответ: фокусы находятся в точках $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ и $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. ■

Занятие 3

Полярные, сферические и циллиндрические координаты

Упражнение 1. В полярных координатах даны точки $A(3,\pi/3)$ и $B(3\sqrt{3}/2,-\pi/6)$. Найдите полярные координаты точки C, полученной симметричным отражением точки A относительно точки B.

Решение. По определению цетральной симметрии $C = B + \overrightarrow{AB} = 2B - A$. Перейдем к декартовым координатам с помощью равенств

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда

$$A = \left(3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \qquad B = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{9}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Отсюда

$$C = \left(3, -3\sqrt{3}\right), \quad |C| = \sqrt{9+27} = 6, \quad \operatorname{tg}(\arg C) = -\frac{3\sqrt{3}}{3},$$

т.е. в полярных координатах $C = (6, -\pi/3)$. ■

Упражнение 2. Все точки плоскости повернули относительно начала координат на угол $-2\pi/3$, а затем сдвинули на вектор $(1,2)$. Найдите декартовы координаты образа точки A, если известны ее полярные координаты $A = (2,\pi/6)$.

Решение. Поворот удобно осуществлять в полярных координатах: после поворота получим точку $A' = (2,\pi/6-2\pi/3) = (2,-\pi/2)$. Сдвиг удобно вычислять в декартовых координатах. В этих координатах $A' = (2\cos(-\pi/2), 2\sin(-\pi/2)) = (0,-2)$. После сдвига получим $A'' = (0,-2)+(1,2) = (1,0)$ в декартовых координатах. ■

Упражнение 3. Написать уравнение прямой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, если в декартовых координатах эта прямая задана параметрически $\begin{cases} x = 1-2t, \\ y = 1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Решение. Выразим $t = 1-y$ и получим уравнение прямой $x = -1+2y$ в декартовых координатах. Теперь сделаем полярную замену и получим

$$r\cos\varphi = -1 + 2r\sin\varphi \;\Leftrightarrow\; r = \frac{1}{2\sin\varphi - \cos\varphi}.$$

Из условия положительности величины r выводим область определения этой функции $\varphi \in (\operatorname{arcctg} 2, \pi + \operatorname{arcctg} 2)$. ■

Упражнение 4. Какую кривую задает уравнение $r = \sin\varphi$ в полярных координатах?

Решение. Поскольку $r \geqslant 0$, то $\varphi \in [0,\pi]$. В верхней полуплоскости удобно переходить к декартовым координатам с помощью формул $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arcctg}(x/y)$. Но чтобы не вспоминать тригонометрическую формулу $\sin(\operatorname{arcctg} a) = ...$, домножим наше уравнение на r. Получим

$$r^2 = r\sin\varphi \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2 = y \;\Leftrightarrow x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Получилась окружность с центром в $(0,1/2)$ и радиусом $1/2$. ■

Упражнение 5. Запишите уравнение сферы $x^2+y^2+z^2 = 1$ в цилиндрических координатах.

Решение. По формулам перехода $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$, где $\varphi \in [-\pi,\pi)$, находим уравнение

$$r^2 + z^2 = 1.$$

■

Упражнение 6. Даны две точки $A = (1,0,\pi/4)$ и $B = (2,\pi,-\pi/4)$, заданные в сферической системе координат. Найдите сферические координаты середины отрезка $[A,B]$.

Решение. По формулам перехода $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\cos\theta, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$, где $\varphi \in [-\pi,\pi)$, $\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$, находим декартовы координаты точек $A = (\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)$ и $B = (-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$. Тогда середина отрезка имеет декартовы координаты $M = (-\sqrt{2}/4,0,-\sqrt{2}/4)$. Найдем ее сферические координаты:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = y/x = 0, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = -1.$$

Тогда $\theta = -\pi/4$, а для φ имеем два варианта: $\varphi = -\pi$ или $\varphi = 0$. Поскольку знак координаты x совпадает со знаком $\cos\varphi$, то $\cos\varphi < 0$, т.е. $\varphi = -\pi$. Итак, в сферических координатах $M = (1/2,-\pi,-\pi/4)$. ■

Занятие 4

Линейные и афинные системы координат

Упражнение 1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{a} = (2{,}3)$ в линейном базисе $\overrightarrow{e_1} = (1{,}1)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2{,}1)$ (исходные координаты — стандартные декартовы).

Решение. Необходимо получить разложение $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ (числа x и y и есть искомые координаты в заданном базисе). Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2 = x - 2y, \\ 3 = x + y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2y, \\ 3 = 2 + 2y + y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

■

Упражнение 2. При каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\overrightarrow{e_1} = (\lambda{,}1{,}-1)$, $\overrightarrow{e_2} = (0{,}\lambda{,}2)$, $\overrightarrow{e_3} = (1{,}0{,}\lambda)$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$? (исходные координаты — стандартные декартовы).

Решение. Система является базисом, если произвольный вектор $\overrightarrow{a} = (x{,}y{,}z)$ можно единственным образом разложить в линейную комбинацию $\overrightarrow{a} = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + c_3\overrightarrow{e_3}$. Для получения такого разложения необходимо решить систему

$$\begin{cases} \lambda c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 = x, \\ c_1 + \lambda c_2 + 0 \cdot c_3 = y, \\ -c_1 + 2c_2 + \lambda c_3 = z. \end{cases}$$

Система линейных уравнение размера 3×3 имеет единственное решение для любой правой части тогда и только тогда, когда отличен от нуля ее определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

(см. доказательство этого утверждения в курсе алгебры). Приравняем этот определитель к нулю и получим уравнение

$$\lambda^3 + 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Ответ: система $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ является базисом в $\mathbb{R}^3$ при всех λ, кроме $\lambda = -1$. ■

Очевидно, что базис $\overrightarrow{e_1} = (1{,}0{,}0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0{,}1{,}0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0{,}0{,}1)$ задает классические декартовы координатами. По аналогии с классическим случаем, прямые, выходящие из начала координат с направляющими векторами $\overrightarrow{e_j}$, называют координатными осями. Для произвольного вектора $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ вектор $x\overrightarrow{e_1}$ называют проекцией $\overrightarrow{a}$ на первую координатную ось и т.д. Вектор $x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ называют проекцией на координатную плоскость Oe_1e_2 и т.д.

Упражнение 3. Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{a} = (1,3,-1)$ на координатную плоскость Oe_2e_3 в базисе $\overrightarrow{e_1} = (2,1,-1)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,2,2)$, $\overrightarrow{e_3} = (1,0,2)$.

Решение. Разложим вектор $\overrightarrow{a}$ по этому базису

$$\begin{cases} 2x + z = 1, \\ x + 2y = 3, \\ -x + 2y + 2z = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x, \\ y = 3/2 - x/2, \\ -x + 3 - x + 2 - 4x = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1, \\ y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Тогда искомая проекция равна

$$y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка: если все было найдено верно, то разность между исходным вектором и его проекцией должна быть коллинеарна вектору $\overrightarrow{e_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = xe_1, \quad \text{где } x = 1.$$

■

Для линейных координат началом отсчета всегда является точка $O = (0,0,0)$. Если мы хотим поместить начало отсчета в точку $O = (x_0,y_0,z_0)$, то к линейным комбинациям добавляется вектор сдвига (x_0,y_0,z_0).

Упражнение 4. Афинная система координат в $\mathbb{R}^2$ задана точкой отсчета $O = (2,1)$ и базисом $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (-1,1)$ (координаты всех этих векторов взяты в обычной декартовой системе). В **новой** системе координат Oe_1e_2 даны две точки $A = (1,2)$ и $B(4,-2)$. Найдите длину отрезка AB.

Решение. Пересчитаем точки A и B в стандартных декартовых координатах.

$$A = O + 1 \cdot \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$B = O + 4\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|AB| = \sqrt{(8-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{65}.$$

Обратите внимание, что формула для расстояния между точками в системе координат Oe_1e_2 не работает: $|AB| \neq \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = 5$. Это означает, что при линейных и афинных заменах координат метрические размеры (длины отрезков, площади, объемы и т.д.) могут меняться! ■

Упражнение 5. В условиях предыдущей задачи найдите координаты середины отрезка $[A,B]$ в системе координат Oe_1e_2.

Решение. Пересчитаем точки A и B в стандартных координатах $A = (1,3)$, $B = (8,-1)$. Тогда середина отрезка имеет координаты $C = \frac{A+B}{2} = (9/2,\ 1)$. Переведем этот вектор в новую систему координат. Запишем разложение $C = O + x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ и найдем числа x и y

$$\begin{cases} x - y = 5/2, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Итак, координаты середины отрезка в системе Oe_1e_2 равны $C = (5/2,0)$. Обратите внимание, что тот же ответ можно было получить гораздо проще. Не переходя к декартовым координатам и обратно,

$$C = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Все линейные соотношения между векторами сохраняются при переходе из одной афинной системы координат в другую. ■

Двух векторов в $\mathbb{R}^3$, конечно, не достаточно для того, чтобы ввести новые линейные координаты. Покажем, что афинная система координат $O'e_1e_2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ порождает плоскость.

Упражнение 6. Пусть $O = (0{,}0{,}0)$ — начало координат, O' — произвольная точка, а $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ — два произвольных не коллинеарных вектора в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{OD}$ можно представить в виде

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OO'} + c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2}$$

тогда и только тогда, когда точка D лежит в плоскости, порождаемой парой пересекающихся прямых $O'B$ и $O'C$, где $B = O' + \overrightarrow{e_1}$, $C = O' + \overrightarrow{e_2}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OO'} + c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2}$ для некоторых c_1 и c_2. Обозначим $B' = O' + c_1\overrightarrow{e_1}$ и $C' = O' + c_2\overrightarrow{e_2}$. Точка B' лежит на прямой $O'B$, а точка C' — на прямой $O'C$. Обозначим плоскость, порожденную этими прямыми, через π. Точка $M = O' + \frac{c_1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{c_2}{2}\overrightarrow{e_2}$ — середина отрезка $[B',C']$ лежит в π. Но тогда в π лежит и точка D, поскольку

$$D = O' + c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} = O' + 2\overrightarrow{AM},$$

т.е. D лежит на прямой $O'M$.
Обратно. Пусть точки O', B, C и D лежат в одной плоскости. Тогда прямые $O'D$ и BC либо пересекаются, либо параллельны. В первом случае отметим точку M их пересечения. Имеем $D = (1-t)O' + tM$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, $M = (1-s)B + sC$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$. Подставляя, получим

$$D = (1-t)O' + t(1-s)B + tsC = O' + t(1-s)\overrightarrow{e_1} + ts\overrightarrow{e_2}.$$

Во втором случае $\overrightarrow{O'D} = k\overrightarrow{BC}$, откуда

$$D = A + \overrightarrow{O'D} = O' + k\overrightarrow{BC} = O' + kB - kC = O' + k(O' + \overrightarrow{e_1}) - k(O' + \overrightarrow{e_2}) = O' + k\overrightarrow{e_1} - k\overrightarrow{e_2}.$$

■

Занятие 5

Скалярное произведение

Упражнение 1. Векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b} = (1{,}3)$ перпендикулярны. Найдите $\overrightarrow{a}$, если $|\overrightarrow{a}| = 2$.

Решение.
$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow (a{,}b) = 0.$$
Пусть $\overrightarrow{a} = (x{,}y)$. Тогда $x + 3y = 0$, т.е. вектор $\overrightarrow{a}$ коллинеарен вектору $(3, -1)$. Остается только умножить этот вектор на подходящий коэффициент. Поскольку $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{10}$, то
$$4 = x^2 + y^2 = 9y^2 + y^2,$$
т.е. либо $\overrightarrow{a} = \left(-\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$, либо $\overrightarrow{a} = \left(\frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$. ■

Заметьте, что в качестве перпендикуляра к заданному вектору $(x{,}y)$ всегда можно взять вектор $(y, -x)$.

Упражнение 2. Известно, что $A = (-1{,}1)$, $B = (1, -3)$, $|AC| = |BC| = \sqrt{10}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение. **Первый способ.** Вначале найдем коордınанты точки C. Она равноудалена от A и B, а значит лежит на серединном перпендикуляре отрезка $[A{,}B]$. Найдем середину отрезка $M = (0{,}-1)$, найдем вектор $\overrightarrow{AB} = (2{,}-4)$, найдем перпендикуляр к нему $\overrightarrow{a} = (4{,}2)$. Умножим его на неизвестный пока коэффициент и отложим от точки M
$$C = M + k\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4k \\ -1 + 2k \end{pmatrix}.$$
Найдем длину отрезка AC
$$10 = |AC|^2 = (4k+1)^2 + (-2+2k)^2 \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}.$$
Итак, либо $C = (2{,}0)$, либо $C = (-2, -2)$. В первом случае $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (1{,}3)$, $(\overrightarrow{AC}{,}\overrightarrow{BC}) = 0$. Во втором случае $\overrightarrow{AC} = (-1, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (-3{,}1)$, $(\overrightarrow{AC}{,}\overrightarrow{BC}) = 0$. В любом случае, ответ 0.
Второй способ. Найдем длину $|AB| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$. По теореме косинусов в треугольнике ABC
$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos\gamma,$$
где γ — угол между сторонами AC и BC. Подставляя сюда данные задачи, видим, что $\gamma = \pi/2$. Тогда
$$(\overrightarrow{AC}{,}\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}{,}\overrightarrow{BC}) = |AC| \cdot |BC|\cos\gamma = 0.$$
■

Упражнение 3. Найдите точку H пересечения высот треугольника с вершинами $A(1,2,-1)$, $B(-2,2,3)$, $C(0,-2,5)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$, $\overrightarrow{BC}=(2,-4,2)$ и $\overrightarrow{AC}=(-1,-4,6)$. Пусть AK — высота треугольника. Вектор $\overrightarrow{AK}$ лежит в плоскости, порождаемой векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, значит он является линейной комбинацией этих векторов

$$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3x-y\\-4y\\4x+6y\end{pmatrix}.$$

Кроме того, этот вектор перпендикулярен $\overrightarrow{BC}$, т.е.

$$2(-3x-y)+16y+2(4x+6y)=0\Leftrightarrow x=-13y,\quad \overrightarrow{AK}=\begin{pmatrix}38y\\-4y\\-46y\end{pmatrix}.$$

Величину y искать не будем — все равно $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AK}$ с неизвестным k. Тогда $H=A+k\overrightarrow{AK}=(1+19t,2-2t,-1-23t)$, где $t=2ky$. Остается учесть, что $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ (третья высота автоматически пройдем через точку H). Итак,

$$\overrightarrow{BH}=\begin{pmatrix}3+19t\\-2t\\-4-23t\end{pmatrix},\quad (\overrightarrow{BH},\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow -3-19t+8t-24-138t=0\Leftrightarrow t=-\frac{27}{149}.$$

Ответ $H=\frac{4}{149}(-91,88,118)$. ■

Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана плоскость π и точка A, не лежащая в этой плоскости. Точка B этой плоскости, для которой расстояние $|AB|$ минимально, называется *ортогональной проекцией* точки A на плоскость π. Такая точка существует и единственна.

Упражнение 4. Докажите, что если B —ортогональная проекция точки A на плоскость π, то вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен π.

Решение. Нам надо доказать, что прямая AB перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости π и проходящей через точку B, т.е. что $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ для любой точки $C\in\pi$, $C\neq B$. Возьмем произвольную точку D на прямой BC. Тогда $D=B+t\overrightarrow{BC}$ для некоторого $t\in\mathbb{R}$. Найдем расстояние

$$|AD|^2=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD})=|AB|^2+2t(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+t^2|BC|^2.$$

Обозначим $a=|BC|^2>0$, $b=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$, $c=|AB|^2>0$. Выделим полный квадрат

$$|AD|^2=a\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$$

и вспомним, что $|AD|\geqslant|AB|$, т.е. $a\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}\geqslant c$ при всех t. Взяв $t=-\frac{b}{a}$, придем к неравенству $-\frac{b^2}{a}\geqslant 0$, что возможно только при $b=0$. ■

Упражнение 5. Пусть плоскость π порождена точкой $O'=(1,0,1)$ и векторами $\overrightarrow{e_1}=(0,1,1)$ и $\overrightarrow{e_2}=(1,1,0)$ (см. задачу 4). Для точки $A=(0,0,1)$ найдите ортопроекцию A на π, расстояние от A до π и угол между вектором $\overrightarrow{O'A}$ и плоскостью π.

Решение. Мы уже знаем, что для поиска проекции полезно найти вектор $\overrightarrow{n}$, перпендикулярный плоскости π (его называют *нормалью* к плокости). По теореме о трех перпендикулярах, достаточно потребовать перпендикулярности $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{e_2}$. Пусть $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$, тогда

$$\begin{cases}(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_1})=0,\\(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_2})=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=0,\\x+y=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-y,\\x=-y,\end{cases}$$

т.е. $\overrightarrow{n} = (-y,y,-y)$. Отложим этот вектор от точки A и подберем y так, чтобы точка $B = A + \overrightarrow{n}$ попала в плокость π — эта точка и будет искомой ортопроекцией. Согласно задаче 4, $B \in \pi$ в точности тогда, когда

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO'} + c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2}.$$

В координатах это равенство выглядит так

$$\begin{cases} -y = 1 + c_2, \\ y = c_1 + c_2, \\ -y = 1 + c_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -1 - y, \\ c_1 = -1 - y, \\ y = -2 - 2y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2/3, \\ c_1 = -1/3, \\ c_2 = -1/3. \end{cases}$$

Мы нашли ортопроекцию $B = A + \overrightarrow{n} = (2/3,-2/3,5/3)$. Расстояние от A до π — это длина отрезка $|AB| = |\overrightarrow{n}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Треугольник ABO' прямоугольный. Значит угол между вектором $\overrightarrow{O'A}$ и плоскостью π, равный углу между $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$ (обозначим его γ), можно найти так

$$\sin\gamma = \frac{|AB|}{|AO'|} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

∎

Упражнение 6. Найдите направляющий вектор биссектрисы угла ABC в треугольнике $A = (1,0,1)$, $B = (1,1,1)$, $C = (-1,-1,0)$.

Решение. **Первый способ.** Найдем $\overrightarrow{BA} = (0,-1,0)$, $\overrightarrow{BC} = (-2,-2,-1)$. Обозначим неизвестный вектор $\overrightarrow{d} = (x,y,z)$. Пусть α — угол между $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{d}$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{d})}{|BA| \cdot |\overrightarrow{d}|}.$$

Аналогично

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{d})}{|BC| \cdot |\overrightarrow{d}|}.$$

Приравняем эти дроби и получим

$$-y = \frac{-2x - 2y - z}{3} \Leftrightarrow 2x - y + z = 0.$$

Теперь вспомним еще, что биссектриса должна лежать в плоскости ABC, т.е. $\overrightarrow{d} = c_1\overrightarrow{BA} + c_2\overrightarrow{BC}$. Тогда

$$\begin{cases} x = -2c_2, \\ y = -c_1 - 2c_2, \\ z = -c_2. \end{cases}$$

Подставим эти равенства в уравнение $2x - y + z = 0$ и получим $c_1 = 3c_2$. Про длину направляющего вектора в условии ничего не сказано. Значит, можем выбрать оставшееся неизвестное c_2 произвольно. Пусть $c_2 = 1$. Тогда $c_1 = 3$, $x = -2$, $y = -5$, $z = -1$. Искомый вектор $\overrightarrow{d} = (-2,-5,-1)$.

Второй способ. Вспомним про свойство биссектрисы треугольника делить противоположную сторону на отрезки, пропорциональные боковым сторонам. Найдем длины боковых сторон $|BA| = 1$, $|BC| = 3$. Значит, необходимо разделить отрезок $[A,C]$ в отношении $1 : 3$ считая от вершины A. Согласно задаче 1,

$$M = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}C = \frac{1}{4}(2,-1,3).$$

Значит, искомый вектор $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}(-2,-5,-1)$. С точностью до коэффициента, получили тот же ответ, что и в первом решении. ∎

Занятие 6

Векторное и смешанное произведение, ориентация

Упражнение 1. Найдите площадь треугольника ABC, если $A = (1,3)$, $B = (-2,-1)$ и $C = (4,-3)$.

Решение. Допишем третью координату (равную нулю для каждой точки). Найдем векторы $\overrightarrow{BA} = (3,4,0)$ и $\overrightarrow{BC} = (6,-2,0)$. Теперь найдем векторное произведение

$$[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -30\mathbf{k}.$$

Значит, искомая площадь равна 15. ■

Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — два неколлинеарных вектора на плоскости. Отложим два этих вектора от точки O — получим два угла на плоскости (один из них меньше развернутого, другой больше). Если для прохождения меньшего угла от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ надо двигаться против часовой стрелки, то базис $\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\}$ называется *правым*, а если двигать надо по часовой стрелке, то *левым*.

Упражнение 2. Пусть векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ в $\mathbb{R}^2$ образуют правый базис. Какой базис тогда образуют векторы $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{f_2} = -2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$?

Решение. Для определения вида базиса можно использвать знак ориентированной площади параллелограмма (если площадь положительна, то базис правый, а если отрицательна, то левый). Найдем векторное произведение

$$[\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}] = [\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, -2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}] = -3[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] - 2[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}] = -[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}].$$

Произведение $[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] = \alpha\mathbf{k}$, где $\alpha > 0$ по условию. Значит, $[\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}] = -\alpha\mathbf{k}$, т.е. базис $\{\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}\}$ левый. ■

Легко видеть, что задачу можно обобщить — поставить произвольные коэффициенты в линейной замене

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$[\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}] = [a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2}, a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}] = a_{11}a_{22}[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] + a_{12}a_{21}[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}] = \det A \cdot [\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}].$$

Таким образом, все определяется знаком определителя матрицы замены.

Упражнение 3. Найдите объем пирамиды $ABCDS$, если известно, что $ABCD$ — параллелограмм, и $A = (-1,-1,0)$, $B = (0,1,1)$, $C = (1,-1,0)$, $S = (1,1,2)$.

Решение. Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{ABCD}h$ (h — длина высоты из S на плоскость $ABCD$), что в три раза меньше объема параллелепипеда, построенной на векторах $\overrightarrow{BA} = (-1, -2, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (1, -2, -1)$ и $\overrightarrow{BS} = (1,0,1)$. Последний объем найдем через смешанное произведение

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Ответ: 4/3. ■

Пусть векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Отложим все три вектора от точки O и посмотрим на плоскость векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ с вершины вектора $\overrightarrow{e_3}$. Если мы увидим на плоскости правый базис, то и базис $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ называется правым, а если увидим левый базис, то и базис $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ называется левым.

Упражнение 4. Найти ориентированный угол от вектора $\overrightarrow{a} = (1,3,1)$ до вектора $\overrightarrow{b} = (-2,-1,2)$ с точки зрения $\overrightarrow{c} = (0,0,1)$.

Решение. Пусть φ — искомый угол. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{-3}{3\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Осталось понять направление вращения от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ в их общей плоскости с точки зрения $\overrightarrow{c}$, т.е. надо определить вид базиса $\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}$. Для этого посмотрим на знак их смешанного произведения (знак «плюс» соответствует правому базису, а знак «минус» — левому). Имеем

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

Значит базис правый, вращение идет против часовой стрелки, а значит $\varphi = \arccos(-1/\sqrt{11})$. ■

Так же, как в задаче 6, можно проверить, что при линейных заменах базиса в $\mathbb{R}^3$ ориентация сохраняется или меняется в зависимости от знака определителя матрицы замены.

Упражнение 5. Пусть $\overrightarrow{e_1} = (1,1,2)$, а $\overrightarrow{e_2} = (1,1,-1)$. Найдите третий базисный вектор $\overrightarrow{e_3}$ длины $\sqrt{3}$, если известно, что он образует угол $\pi/4$ с вектором $\overrightarrow{e_1}$, вектор $\overrightarrow{e_2}$ ортогонален плоскости векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_3}$, а базис $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ правый.

Решение. Пусть $\overrightarrow{e_3} = (x,y,z)$. Тогда векторное произведение

$$[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}] = (z-2y, 2x-z, y-x)$$

коллинеарно $\overrightarrow{e_2}$, т.е. $z-2y = 2x-z = -(y-x)$. Отсюда $x+y-z=0$. Далее,

$$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3})}{|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_3}|} = \frac{x+y+2z}{\sqrt{18}}.$$

Тогда $x+y+2z=3$. Соединяя два полученных уравнения, получаем $z=1$, $y=1-x$. Наконец,

$$|\overrightarrow{e_3}|^2 = 3 = x^2 + (1-x)^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Находим векторное произведение

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & 1-x & 1 \end{vmatrix} = 1+2-2x-x-2x+1-x-1 = 3-6x > 0.$$

Отсюда $x = 1-\sqrt{2}$, т.е. искомый вектор $\overrightarrow{e_3} = (1-\sqrt{2},\sqrt{2},1)$. ■

Пусть $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ — базис в $\mathbb{R}^3$. Базис $\{\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}\}$ называется *биортогональным* для базиса $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$, если

$$(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{f_j}) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Упражнение 6. Проверьте, что формулы $\overrightarrow{f_1} = \dfrac{[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$, $\overrightarrow{f_2} = \dfrac{[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}]}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$, $\overrightarrow{f_3} = \dfrac{[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}]}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$ задают биортогональный базис.

Решение. По свойствам векторного произведения $\overrightarrow{f_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{f_1} \perp \overrightarrow{e_3}$. По свойству смешанного произведения

$$(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{e_1}) = \frac{([\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}],\overrightarrow{e_1})}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})} = \frac{(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1})}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})} = 1.$$

Для двух других векторов рассуждения аналогичны. ■

Занятие 7

Прямые на плоскости

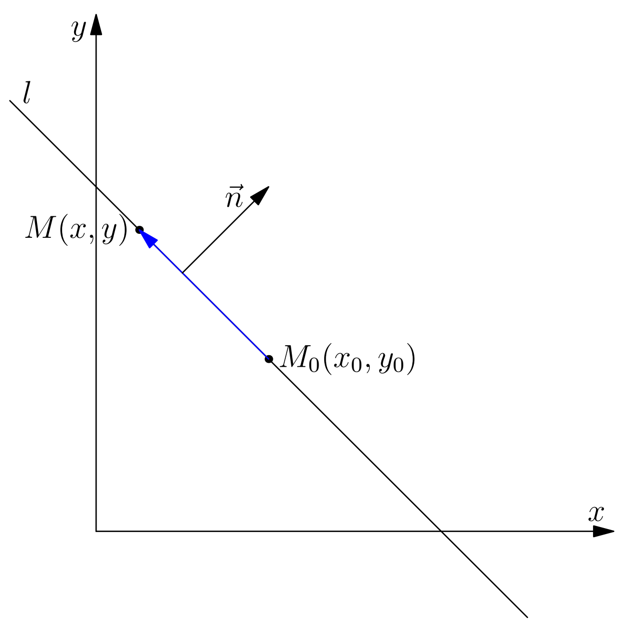
§ 7.1 Составление уравнения на прямой по различным способам ее задания

7.1.1 Общее уравнение прямой на плоскости

Определение 1. Ненулевой вектор $\overrightarrow{n}$, перпендикулярный заданной прямой, называется *нормальным вектором* (нормалью) для этой прямой.

Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через точку $M_0\,(x_0, y_0)$. Пусть вектор $\overrightarrow{n}(a, b)$ — нормаль к прямой ℓ. Точка $M(x, y)$ принадлежит заданной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$, то есть скалярное произведение данных векторов равно нулю:

$$(\mathbf{M_0M}, \overrightarrow{n}) = 0$$



Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\mathbf{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ и $\overrightarrow{n}(a, b)$:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Полученное уравнение задаёт прямую, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\overrightarrow{n}$. Раскроем в этом уравнении скобки и обозначим выражение $-a \cdot x_0 - b \cdot y_0$ буквой c.

Получим *общее уравнение прямой на плоскости*:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \tag{7.1}$$

7.1.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Угол α определяется углом наклона прямой к оси OX. Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой; его обычно обозначают буквой k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

Уравнение $y = k \cdot x + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*; k — угловой коэффициент, b — величина отрезка, который отсекает прямая на оси OY, считая от начала координат.

Если прямая задана общим уравнением

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$$

то её угловой коэффициент определяется по формуле

$$k = -\frac{A}{B}$$

Уравнение $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ является уравнением прямой, которая имеет угловой коэффициент k и проходит через точку $M_0\,(x_0, y)$.

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2$$

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Иначе говоря, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

7.1.3 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1), \tag{7.2}$$

где k - угловой коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2\,(x_2, y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению: $y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1)$. Отсюда находим $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение (7.2), получим *уравнение прямой, проходящей через точки* M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки $M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$ параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

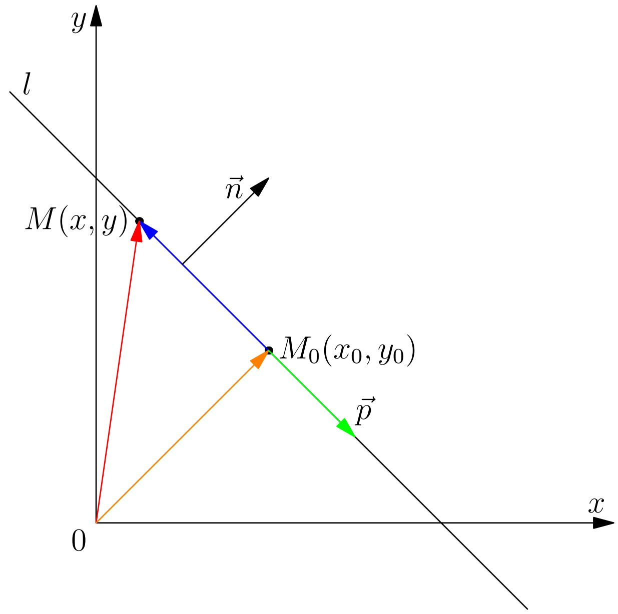
Если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

7.1.4 Параметрическое уравнение прямой

Сформулируем следующую задачу: пусть на координатной плоскости задана точка $M_0\,(x_0, y_0)$ и ненулевой вектор $\overrightarrow{p}\,(a, b)$. Необходимо составить уравнение прямой ℓ, проходящей через точку M_0 и коллинеарной $\overrightarrow{p}$.

Определение 2. Любой ненулевой вектор $\overrightarrow{p}$, параллельный прямой ℓ называется ее *направляющим вектором*.

Выберем на прямой ℓ произвольную точку $M(x, y)$. Заметим, что точка M принадлежит прямой ℓ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{M_0M}$ и $\overrightarrow{p}$ коллинеарны.



Запишем условие коллинеарности: $\mathbf{M_0M} = t \cdot \overrightarrow{p}$, где $t \in \mathbb{R}$ - параметр. С другой стороны, вектор $\mathbf{M_0M}$ можно выразить при помощи радиус-векторов $\mathbf{OM}$ и $\mathbf{OM_0}$: $\mathbf{M_0M} = \mathbf{OM} - \mathbf{OM_0}$. Получаем *векторное параметрическое уравнение прямой*:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM_0} + t \cdot \overrightarrow{p}$$

Или, переписывая в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases} \tag{7.3}$$

7.1.5 Каноническое уравнение прямой

Если из каждого уравнения системы (7.3) выразить параметр t, а затем исключить этот параметр:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = t, a^2 + b^2 \neq 0,$$

получим *каноническое уравнение прямой*, в котором a и b соответственно — координаты направляющего вектора прямой.

7.1.6 Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой (7.1) $a, b, c \neq 0$, то перенесем свободный член c в правую часть уравнения и разделим обе части на $-c$: $-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1$. Обозначим $x_1 = -\frac{c}{a}$, $y_1 = -\frac{c}{b}$ и получим *уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

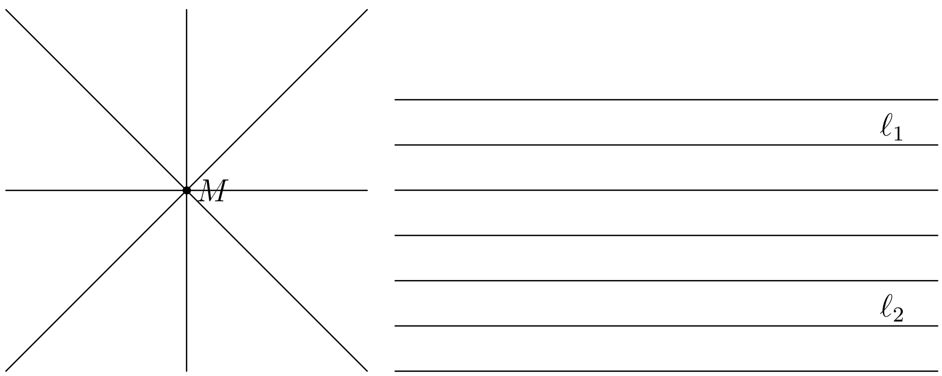
Абсолютные величины x_1 и y_1 равны отрезкам, отсекаемых прямой на осях OX и OY. Действительно, точки $(x_1, 0)$ и $(0, y_1)$ принадлежат прямой ℓ и расположены на осях координат.

Пример 1. Здесь будет пример

§ 7.2 Пучки прямых

Определение 3. *Собственным пучком прямых* на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через фиксированную точку (центр пучка).

Определение 4. *Несобственным пучком прямых* называется совокупность прямых, параллельных фиксированной прямой.



Любые две прямые ℓ_1 и ℓ_2 однозначно задают пучок, содержащий данные прямые. Соответственно, если данные прямые пересекаются, то точка их пересечения является центром пучка. Если прямые не пересекаются, то они задают несобственный пучок параллельных прямых.

Пусть заданы уравнения двух прямых: $\ell_1 : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и $\ell_2 : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$.

Определение 5. *Линейной комбинацией* уравнений прямых ℓ_1 и ℓ_2 называется уравнение:

$$\lambda_1 \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1) + \lambda_2 \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0, \tag{7.4}$$

где числа λ_1 и λ_2 — коэффициенты линейной комбинации.

> При любых допустимых значениях параметров λ_1 и λ_2 уравнение (7.4) задает прямую, принадлежащую пучку, и наоборот, для любой прямой из пучка найдутся такие значения λ_1 и λ_2, что данное уравнение будет задавать эту прямую.

7.2.1 Взаимное положение прямых на плоскости

1. Если прямые пересекаются и заданы общим уравнением:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0; \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0, \end{aligned}$$

то угол между ними можно найти по формуле:

$$\varphi = \frac{A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

2. Если прямые пересекаются и заданы уравнением с угловым коэффициентом:

$$\begin{aligned} y = k_1 \cdot x + b_1; \\ y = k_2 \cdot x + b_2, \end{aligned}$$

то угол между ними можно найти по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

3. Расстояние d от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ вычисляется по формуле:

$$\frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Упражнение 1. Прямая задана своим параметрическим уравнением $l = (1{+}2t, 2{-}5t)$, $t \in \mathbb{R}$. Напишите общее уравнение этой прямой, ее каноническое уравнение и уравнение в отрезках. Найдите направляющий вектор и нормаль.

Решение. По условию, $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 5t$. Отсюда сразу видно каноническое уравнение $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-5}$. Вернемся к условию, умножим равенство $x = 1 + 2t$ на 5, равенство $y = 2 - 5t$ на 2 и сложим: $5x + 2y = 9$. Тогда общее уравнение прямой (одно из) имеет вид $5x + 2y - 9 = 0$, а уравнение в отрезках $\dfrac{x}{1{,}8} + \dfrac{y}{4{,}5} = 1$. Направляющий вектор (один из) виден непосредственно из условия $\overrightarrow{l} = (2, -5)$, а нормаль — перпендикулярный ему вектор $\overrightarrow{n} = (5{,}2)$. ■

Упражнение 2. Верно ли, что прямая AB, где $A = (1{,}3)$, $B = (-2{,}1)$ и прямая CD, где $C = (-6/7, -3/7)$, $D = (12/7, 9/7)$ параллельны? Верно ли, что прямые AB и BC перпендикулярны?

Решение. Чтобы провести прямую, проходящую через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), пользуемся равенством

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тогда уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{1-3} \Leftrightarrow\ -2x + 2 = -3y + 9\ \Leftrightarrow 2x - 3y + 7 = 0.$$

Вектор нормали к этой прямой равен $(2, -3)$, тогда направляющий вектор $(3{,}2)$. Для прямой CD получаем

$$\frac{x + 6/7}{12/7 + 6/7} = \frac{y + 3/7}{9/7 + 3/7} \Leftrightarrow\ \frac{7x+6}{18} = \frac{7y+3}{12} \Leftrightarrow\ 14x - 21y + 3 = 0.$$

Вектор нормали к этой прямой равен $(14, -21)$, а направляющий вектор $(21{,}14)$. Видим, что он коллинеарен вектору $(3{,}2)$, т.е. прямые параллельны. Наконец, для прямой BC имеем уравнение

$$\frac{x+2}{-6/7+2} = \frac{y-1}{-3/7-1} \Leftrightarrow\ 5x + 4y + 6 = 0.$$

Вектор нормали равен $(5{,}4)$, он не коллинеарен направляющему вектору $(3{,}2)$ прямой AB, т.е. прямые AB и BC не перпендикулярны. ■

Вообще можно заметить, что две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ параллельны (или совпадают), если матрица $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ имеет ранг 1. При этом прямые совпадают, если матрица $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ также имеет ранг 1. Если же ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ равен 2 (тогда и вторая матрица имеет ранг 2 — почему?), то прямые пересекаются.

Три прямые на плоскости могут расположиться большим числом способов:
1) все три прямые совпадают;
2) две прямые совпадают, а третья им параллельна;
3) две прямые совпадают, а третья их пересекает;
4) все три прямые параллельны;
5) две прямые параллельны, а третья их пересекает;
6) все три прямые различны и пересекаются в одной точке;
7) прямые образуют треугольник.

В случаях 4) и 6) говорят, что прямые образуют *пучок*, причем в случае 6) он называется *собственным*, а в случае 4) *несобственным*.

Упражнение 3. К какому из семи случаев относится расположение прямых $l_1:\ x-2y+5=0$, $l_2:\ \frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=-\frac{1}{4}$ и $l_3:\ x=1+t,\ y=3-t$?

Решение. Запишем общие уравнения прямых: $l_1:\ x-2y+5=0$, $l_2:\ 2x-y+1=0$, $l_3:\ x+y-4=0$. Имеем

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2,$$

т.е. l_1 и l_2 различны и пересекаются. Далее,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2,$$

т.е. l_1 и l_3 тоже различны и пересекаются. Далее,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2,$$

т.е. l_2 и l_3 опять же различны и пересекаются. Наконец,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}=2,$$

т.е. существует точка, удовлетворяющая всем трем уравнениям.
Ответ: случай 6). ■

Упражнение 4. Опишите совместное расположение на плоскости треугольника ABC, $A(1{,}7)$, $B(-2{,}3)$, $C(0,-4)$ и прямой $l:\ 2x-5y+7=0$.

Решение. Подставим в уравнение прямой координаты каждой точки

$$A:\ 2-35+7<0,\qquad B:\ -4-15+7<0,\qquad C:\ 0+20+7>0.$$

Значит, точки A и B лежат по одну сторону от прямой, а точка C — по другую сторону. Вывод: прямая l пересекает стороны BC и AC треугольника, а сторону AB не пересекааеt. Остается выяснить, пересекает ли l продолжение этой стороны за точку A, продолжение этой стороны за точку B или вообще не пересекает прямую AB. Для этого напишем параметрическое уравнение прямой AB, взяв за начальную точку A. Направляющим вектором сделаем $\overrightarrow{AB}$, так чтобы при увеличении параметра t точка двигалась по прямой от A к B:

$$\begin{cases}x=1-3t,\\ y=7-4t.\end{cases}$$

Попробуем найти точку пересечения прямых AB и l

$$\begin{cases}x=1-3t,\\ y=7-4t,\\ 2x-5y+7=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}2-6t-35+20t+7=0,\\ x=1-3t,\\ y=7-4t,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{13}{7},\\ x=-\frac{32}{7},\\ y=-\frac{3}{7}.\end{cases}$$

Точка пересечения есть и находится за точкой B, т.к. $t=13/7>1$. Ответ: прямая l пересекает стороны BC и AC треугольника и продолжение стороны AB за точку B. ■

Упражнение 5. Среди всех касательных к окружности $c:\ x^2+y^2-4x+12y+11=0$ найдите ту, которая наиболее удалена от точки $A(-2{,}4)$. Найдите расстояние от точки A до этой прямой и ортопроекцию точки A на эту прямую.

Решение. **Шаг 1:** найдем точку B на окружности c, для которой расстояние $|AB|$ максимально. Запишем уравнение окружности в виде $(x-2)^2+(y+6)^2=29$. Обозначим $O'=(2,-6)$ — центр окружности, $R=\sqrt{29}$ ее радиус и φ — угол между векторами $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$. По теореме косинусов

$$|AB|^2=|O'A|^2+|O'B|^2-2|O'A||O'B|\cos\varphi=116+29-2\sqrt{116}\cdot\sqrt{29}\cos\varphi.$$

Это выражение максимально при $\varphi = \pi$, т.е. точка B должна лежать на продолжении отрезка AO' за точку O'. Параметризуем прямую AO' с помощью точки A и вектора $\overrightarrow{AO'}$

$$\begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t. \end{cases}$$

Добавим к этим равенствам уравнение окружности и решим полученную систему

$$\begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t, \\ (x-2)^2 + (y+6)^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t, \\ 116t^2 - 232t + 87 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t, \\ t = 1/2 \text{ или } t = 3/2. \end{cases}$$

Поскольку $t \in [0,1]$ соответствует точкам отрезка $[A,O']$, то выбираем корень $t = 3/2$, откуда $B = (4,-11)$.

Шаг 2: докажем, что касательная l, проходящая через точку B — искомая.

Раз l — касательная в точке B, то $l \perp O'B$. Но $\overrightarrow{O'B}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$, т.е. $l \perp \overrightarrow{AB}$. Это означает, что B и есть ортопроекция точки A на прямую l. Тогда $\rho(A,l) = |AB|$. Если же мы проведем касательную m в какой–либо другой точке C окружности, то $\rho(A,m) \leqslant |AC|$ (расстояние от точки A до прямой m — это длина перпендикуляра, опущенного из A на m, а отрезок AC может не оказаться таким перпендикуляром, так что написанное неравенство — это условие «в прямоугольном треугольника длина гипотенузы больше длины катета»). С другой стороны, $|AC| < |AB|$ (ведь точка B — самая далекая от A точка окружности). А еще, $\rho(A,l) = |AB|$, так что $\rho(A,m) \leqslant |AC| < |AB| = \rho(A,l)$, т.е. среди всех касательных, именно l наиболее удалена от A.

Шаг 3: найдем уравнение l.

Вектор $\overrightarrow{AB} = (6,-15)$ является для l нормалью, а значит l можно задать уравнением $6x-15y+C = 0$. Число C подберем так, чтобы прямая прошла через точку $B = (4,-11)$, т.е. $24 + 165 + C = 0$, $C = -189$. Сокращаяя на 3, получаем $l:\ 2x - 5y - 63 = 0$.

Ответ: прямая имеет вид $l:\ 2x - 5y - 63 = 0$, ортопроекцией A на l является точка $B = (4,-11)$, а расстояние равно $\rho(A,l) = |AB| = 3\sqrt{29}$. Проверка: по формуле для расстояния от точки (x_0,y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$,

$$\rho(A,l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-4-20-63|}{\sqrt{4+25}} = \frac{87}{\sqrt{29}} = 3\sqrt{29}.$$

■

Упражнение 6. На плоскости даны две прямые: ℓ_1, проходящая через точки $(-1,2)$ и $(2,3)$, и $\ell_2:\ 3x + y + 1 = 0$. Найдите уравнение прямой ℓ_3, которая проходит через точку $(0,2)$ так, что ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 образуют равнобедренный треугольник.

Решение. Сначала запишем общее уравнение прямой ℓ_1

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow\ x - 3y + 7 = 0.$$

Теперь найдем угол между ℓ_1 и ℓ_2

$$\varphi = \arccos\frac{|3-3|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\pi}{2},$$

т.е. $\ell_1 \perp \ell_2$. Двух прямых углов в треугольнике быть не может, т.е. равные углы образуются при пересечении $\ell_1 \cap \ell_3$ и $\ell_2 \cap \ell_3$. Пусть (A,B) — вектор нормали к прямой ℓ_3. Тогда

$$\frac{|A-3B|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3A+B|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow\ |A-3B| = |3A+B|.$$

Возможны два случая: $A = -2B$ или $B = 2A$. В первом случае положим $B = 1$, $A = -2$, а коэффициент C найдем из условия $(0,2) \in \ell_3$, откуда $C = -2$. Во втором случае $A = 1$, $B = 2$,

$C = -4$. Итак, либо $\ell_3: \ -2x + y - 2 = 0$, либо $\ell_3: \ x + 2y - 4 = 0$. Остается проверить, что в обоих случаях тройка прямых образует треугольник (а не пучок прямых, другие случаи невозможны, т.к. параллельных и совпадающих прямых среди ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 нет — почему?). Имеем

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3, \qquad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 3,$$

т.е. оба случая идут в ответ. ■

Занятие 8

Прямые и плоскости в пространстве. Начало.

§ 8.1 Составление уравнений прямых и плоскостей

Прямую в пространстве можно задавать *параметрическим уравнением* — системой вида $\begin{cases} x(t) = a + \alpha t, \\ y(t) = b + \beta t, \\ z(t) = c + \gamma t \end{cases}$, где $t \in \mathbb{R}$ — переменный параметр. При таком способе задания прямой $M = (a,b,c)$ — начальная точка (в качестве нее можно брать произвольную точку прямой), а $\overrightarrow{e} = (\alpha,\beta,\gamma)$ — направляющий вектор прямой.

Другой способ задать прямую — указать две точки в пространстве, лежащие на этой прямой. Если прямая дана в параметрическом виде, то подставляя $t = t_1$ и $t = t_2$ (два произвольных различных значения параметра), получим две точки, лежащие на прямой. Например, если $t_1 = 0$, а $t_2 = 1$, то первая точка совпадет с M, а вторая — с $M + \overrightarrow{e}$. Обратно, если даны две точки A и B, лежащие на прямой, то всегда можно положить $M = A$, $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{AB}$ — получим параметрическое уравнение прямой.

Третий способ задать прямую — указать систему $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ из двух линейных уравнений (ранг системы должен равняться 2). Поскольку система содержит два уравнения и три неизвестных, то после решения системы останется один свободный параметр (обозначим его t), а переменные x, y и z будут выражены линейно через t, т.е. будет получено параметрическое уравнение прямой.

Определение 1. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две прямые параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда их направляющие векторы отличаются коэффициентом.

Определение 2. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

Теорема 1. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

Если исходная прямая задана в параметрическом виде точкой M и направляющим вектором $\overrightarrow{e}$, а точка N не лежит нна этой прямой, то вторач прямая задается в параметрическом виде точкой N и тем же направляющим вектором $\overrightarrow{e}$.

Плоскость в трехмерном пространстве можно задавать *в параметрическом виде* — системой $\begin{cases} x(t) = a + \alpha_1 t + \alpha_2 s, \\ y(t) = b + \beta_1 t + \beta_2 s, \\ z(t) = c + \gamma_1 t + \gamma_2 s, \end{cases}$, где $s,t \in \mathbb{R}$ — переменные параметры. Векторы $\overrightarrow{e_1} = (\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и $\overrightarrow{e_2} = (\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ называют направляющими векторами плоскости.

Другой способ задать плоскость — указать три точки (не лежащие на одной прямой). Если $A_j = (x_j,y_j,z_j)$ — три эти точки (здесь $j = 1,2,3$), то плоскость можно задать параметрически, взяв, например $a = x_1$, $b = y_1$, $c = z_1$, вектор $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) = \overrightarrow{A_1A_2}$, а вектор $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = \overrightarrow{A_1A_3}$.

Третий способ задать плоскость — указать уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Геометрически вектор (A,B,C) перпендикулярен плоскости (вектор нормали).

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 2. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Если первая плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$, то для составления уравнения второй плоскости надо, не меняя чисел A, B и C, поменять число D так, чтобы новая плоскость прошла через заданную точку.

Если первая плокость задана в параметрическом виде, то надо, не меняя направляющих векторов, поменять точку (a,b,c) так, чтобы новая плоскость прошла через заданную точку.

Прямая *параллельна плоскости*, если прямая и плоскость не пересекаются. Прямая параллельна плоскости или лежит на плоскости тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой является линейной комбинацией направляющих векторов плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения. Прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой и нормаль к плоскости отличаются коэффициентом.

Угол α между прямой и плоскостью определяется равенством $\alpha = \pi/2 - \beta$, где β — угол между прямой и вектором нормали плоскости.

Проекцией точки A вдоль прямой ℓ на плоскость π называется точка B вида $B = A + k\overrightarrow{e}$, где $\overrightarrow{e}$ — направляющий вектор прямой, а множитель k подбирается из условия $B \in \pi$.

Ортогональной проекцией (коротко — *ортопроекцией*) точки A на плоскость π называется проекция этой точки на эту плоскость вдоль нормали плоскости. Ортопроекция точки A на плоскость можно определить по другому — это ближайшая к A точка плоскости.

Пусть O — произвольная точка плоскости π, $A \notin \pi$, а B — ортопроекция A на π. Тогда угол между прямой OA и плоскостью π равен углу между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Упражнение 1. Запишите каноническое и параметрическое уравнение прямой ℓ пересечения плоскости $\pi_1 :\ 2x + y - z - 4 = 0$ и плоскости π_2, проходящей через точку $A(1,1,-1)$ параллельно векторам $\overrightarrow{e_1} = (1,0,1)$ и $\overrightarrow{e_2} = (-1,1,0)$.

Доказательство. По условию, плоскость π_2 задана параметрически. Найдем ее общее уравнение

$$\begin{cases} x = 1 + u - v, \\ y = 1 + v, \\ z = -1 + u. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = z + 1, \\ v = y - 1, \\ x = 3 + z - y, \end{cases}$$

т.е. $\pi_2 :\ x + y - z - 3 = 0$. Тогда прямая ℓ задается системой

$$\begin{cases} 2x + y - z - 4 = 0, \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + y - 4, \\ x + y - (2x + y - 4) - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + y - 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Взяв за параметр координату y, получим

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = t - 2. \end{cases}$$

Мы нашли параметрическое уравнение прямой ℓ. Проверка: $\ell \in \pi_1$, поскольку подстановка параметрического уравнения прямой в уравнение плоскости дает верное равенство $2+t-(t-2)-4 \equiv 0$. Кроме того, $\ell \in \pi_2$ потому, что $A \in \ell$ (достаточно взять $t = 1$), а направляющий вектор прямой ℓ есть линейная комбинация $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$: $(0,1,1) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$. Каноническое уравнение ℓ имеет вид

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

■

Упражнение 2. Составьте общее уравнение плоскости, содержащей все прямые, пересекающие прямую $x = y = z$ и образующие с координатными осями Ox, Oy и Oz углы $\pi/3$, $\pi/2$ и $2\pi/3$ соответственно.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{a} = (x,y,z)$ — направляющий вектор одной из прямых, указанных в условии (для краткости будем называть эту прямую «нашей»). Пусть $\alpha = \pi/3$ — угол между этим вектором и вектором $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$ (т.е. осью Ox). Тогда

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_1})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{e_1}|} = \frac{x}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, $\dfrac{y}{|\overrightarrow{a}|} = 0$, $\dfrac{z}{|\overrightarrow{a}|} = -\dfrac{1}{2}$. Итак, $x = -z$, а $y = 0$. Направляющий вектор определен с точностью до множителя. Положим $x = 1$, тогда $\overrightarrow{a} = (1,0,-1)$. Пусть наша прямая пересекает прямую $x = y = z$ в точке (s,s,s). Тогда параметрическое уравнение нашей прямой имеет вид $(s+t,s,s-t)$, $t \in \mathbb{R}$. «Отпуская на свободу» оба параметра t и s, получим параметрическое уравнение плоскости. Действительно, по условию, плоскость должна содержать любую точку (т.е. число $t \in \mathbb{R}$ произвольно) любой нашей прямой (т.е. число $s \in \mathbb{R}$ тоже произвольно). Итак,

$$\begin{cases} x = s+t, \\ y = s, \\ z = s-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x-s, \\ y = s, \\ z = s-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x-y, \\ y = s, \\ z = y-(x-y), \end{cases}$$

т.е. общее уравнение плоскости $x - 2y + z = 0$. ■

Упражнение 3. Докажите, что угол φ между прямой $\dfrac{x-x_0}{\alpha} = \dfrac{y-y_0}{\beta} = \dfrac{z-z_0}{\gamma}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется из равенства

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(A^2+B^2+C^2)}}, \quad \varphi \in [0,\pi/2].$$

Доказательство. Пусть прямая пересекает плоскость в точке M. Отложим от этой точки направляющий вектор $\overrightarrow{e} = (\alpha,\beta,\gamma)$ и вектор нормали $\overrightarrow{n} = (A,B,C)$. Пусть ψ — угол между этими векторами. Возможны два случая: веторы $\overrightarrow{e}$ и $\overrightarrow{n}$ расположены по одну сторону от плоскости. Тогда $\psi \in [0,\pi/2]$, а $\varphi = \pi/2 - \psi$. Поскольку $\cos\psi = \frac{(\overrightarrow{e},\overrightarrow{n})}{|\overrightarrow{e}||\overrightarrow{n}|} \geqslant 0$, то мы и получаем искомую формулу для φ. Если же $\overrightarrow{e}$ и $\overrightarrow{n}$ оказались по разные стороны от плоскости, то $\psi \in [\pi/2,\pi]$, $\varphi = \psi - \pi/2$. В этом случае $\cos\psi \leqslant 0$, а $\sin\varphi = -\cos\psi$ и мы вновь получаем верный ответ.

Остался не разобран случай, когда прямая и плоскость вообще не имеют общих точек. В этом случае прямая и плоскость параллелльны, а угол между ними не определен (по крайней мере, в курсе школьной стереометрии). Удобно считать, что в этом случае угол равен нулю. Проверим, что наша формула также дает нулевой ответ. Поскольку $\overrightarrow{n}$ ортогонален плоскости, то $\overrightarrow{n}$ ортогонален и прямой. Иными словами, $(\overrightarrow{e},\overrightarrow{n}) = 0$, т.е. $\sin\varphi = 0$, т.е. $\varphi = 0$. ■

Упражнение 4. Дана прямая $\ell : \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{1}$. Составьте параметрическое уравнение прямой, полученной из ℓ косой проекцией вдоль вектора $\overrightarrow{e} = (1,1,1)$ на плоскость $\pi : \ x + 4y + 2z - 8 = 0$.

Доказательство. **Шаг 1.** Выберем в пространстве базис $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ так, что $\overrightarrow{e_1} \parallel \pi$, $\overrightarrow{e_2} \parallel \pi$, а $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e}$ (в таком базисе легко будет потом вычислить искомую проекцию). Вектор $\overrightarrow{e_3} = (1,1,1)$ уже известен. Для поиска векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ вспомним, что вектор (a,b,c) параллелен плоскости $Ax + By + Cx + D = 0$ в точности тогда, когда $Aa + Bb + Cc = 0$. Итак надо найти два решения уравнения $a + 4b + 2c = 0$. Взяв $b = 0$, $c = 1$, получим $a = -2$. При $b = 1$, $c = 0$ получим $a = -4$. Итак, подойдут векторы $\overrightarrow{e_1} = (-2,0,1)$ и $\overrightarrow{e_2} = (-4,1,0)$.

Шаг 2. Запишем параметрическое уравнение прямой ℓ

$$\begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Возьмем произвольную точку на прямой (т.е. t произвольно) и найдем координаты этой точки в базисе $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$. Обозначим эти неизвестные пока координаты (c_1,c_2,c_3) и решим систему

$$\begin{pmatrix} 2-2t \\ 1+4t \\ -1+t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c_1 - 4c_2 + c_3 = 2 - 2t, \\ c_2 + c_3 = 1 + 4t, \\ c_1 + c_3 = -1 + t, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = -1 + t - c_3, \\ c_2 = 1 + 4t - c_3, \\ -2 - 18t + 7c_3 = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = \frac{4+16t}{7}, \\ c_1 = \frac{-11-9t}{7}, \\ c_2 = \frac{3+12t}{7}. \end{cases}$$

Шаг 3. По определению косой проекции вдоль $\overrightarrow{e_3}$ на плоскость векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, точка с координатами (c_1,c_2,c_3) в базисе $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ проектируется в точку с координатами $(c_1,c_2,0)$ в этом же базисе. Имеем

$$c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} = \frac{4+16t}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{11+9t}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 36+4t \\ -11-9t \\ 4+16t. \end{pmatrix}$$

Ответ: параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = \frac{36+4t}{7}, \\ y = \frac{-11-9t}{7}, \\ z = \frac{4+16t}{7}. \end{cases}$$

■

§ 8.2 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Две прямые в пространстве могут:

1) скрещиваться,
2) пересекаться в точке,
3) быть параллельными,
4) совпадать.

Две плоскости в пространстве могут:

1) пересекаться по прямой,
2) быть параллельными,
3) совпадать.

Прямая и плоскость в пространстве могут:

1) пересекаться в точке,
2) быть параллельными,
3) пересекаться по прямой (т.е. прямая лежит на плоскости).

Упражнение 5. Опишите совместное расположение в пространстве пары плокостей $\pi_1: \ x+2y-z+2=0$ и $\pi_2: \ 2x-y-2z+4=0$ и пары прямых $\ell_1: \ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-1}{7}$ и $\ell_2: \ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+1}{2}$.

Доказательство. Для плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ имеем простой критерий: если $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$, то плокости пересекаются; если ранг равен 1, но $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}=2$, то плокости параллельны; если же оба ранга равны 1, то плоскости совпадают. В нашем случае

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}=2,$$

т.е. π_1 и π_2 пересекаются. Условие параллельности вектора и плоскости мы уже вспоминали в предыдущей задаче. Для ℓ_1 направляющий вектор равен (1,7,7). Так как $A_1+7B_1+7C_1=1+14-7\neq 0$ и $A_2+7B_2+7C_2=2-7-14\neq 0$, то ℓ_1 не параллельна ни π_1, ни π_2, т.е. пересекает обе плоскости. Для второй прямой имеем $2A_1+2C_1=0$ и $2A_2+2C_2=0$, т.е. направляющмй вектор ℓ_2 параллелен обеим плоскостям. Точка $(-2,1,-1)$ лежит на ℓ_2, но не лежит в π_1 и не лежит в π_2, т.е. ℓ_2 параллельна π_1 и π_2, но не лежит ни в π_1, ни в π_2. Осталось разобраться с совместным расположением прямых ℓ_1 и ℓ_2. Их направляющие векторы (1,7,7) и (2,0,2) не коллинеарны, т.е. ℓ_1 и ℓ_2 не параллельны. Попробуем найти их общую точку

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{7}, \\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-7=y-2, \\ y-2=z-1, \\ y=1, \\ x+2=z+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=6/7, \\ z=0, \\ 20/7=1. \end{cases}$$

Общей точки нет, т.е. ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются.
Ответ: $\pi_1\cap\pi_2$, $\ell_1\cap\pi_1$, $\ell_1\cap\pi_2$, $\ell_2\parallel\pi_1$, $\ell_2\parallel\pi_2$, ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются. ■

Прямые $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n$ образуют *собственный пучок*, если все они пересекаются в одной точке. Прямые образуют *несобственный пучок*, если все эти прямые параллельны.

Плоскости $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n$ образуют *собственный пучок*, если все они пересекаются в одной точке. Прямые образуют *несобственный пучок*, если все эти плоскостью параллельны.

Плоскости $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n$ образуют *собственную связку*, если все они пересекаются по одной прямой. Плоскости образуют *несобственную связку*, если все эти плоскостью параллельны одной общей прямой.

Упражнение 6. Проверьте, что плоскости $\pi_1: \ 3x+y-2z+1=0$, $\pi_2: \ -2x+2y+z+1=0$, $\pi_3: \ x+y-2z-1=0$ и $\pi_4: \ x-y+2z+3=0$ образуют собственную связку, но не образуют пучок (ни собственный, ни несобственный).

Доказательство. Вспомним теорему из курса алгебры. *Пусть дана система m линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

на n неизвестных. Система имеет решение в точности тогда, когда

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \leqslant n.$$

Если $\mathbf{x}_{частн} = (x_1,x_2\dots,x_n)$ — какое–то решение системы, то общее решение имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{частн} + C_1\mathbf{x}^1 + C_2\mathbf{x}^2 + \dots + C_k\mathbf{x}^k,$$

где константы C_j произвольны, а $\mathbf{x}^j = (x_1^j,x_2^j,\dots,x_n^j)$ — фундаментальнаня система решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Число k векторов этой системы равно $k = n - r$, где $r = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. В нашем случае система

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -1, \\ -2x + 2y + z = -1, \\ x + y - 2z = 1, \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

имеет решение, поскольку $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 3$. С другой стороны, $k = 0$, поскольку $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$. Значит, решение состоит только из одной точки (x_0,y_0,z_0), т.е. плоскости имеют общую точку (образуют собственную связку), но не имеют общей прямой (не образуют собственный пучок). Несобственный пучок они образовать не могут, хотя бы потому, что пересекаются в одной точке. Можно это проверить и алгебраически. Плоскости образуют несобственный пучок, если они все параллелльны одной прямой. Тогда направляющий вектор $\overrightarrow{e}$ этой прямой должен удовлетворять равенствам $(\overrightarrow{e},\overrightarrow{n}_j) = 0$, где $\overrightarrow{n}_j$ — вектор нормали к j–той плоскости. Иными словами, вектор $\overrightarrow{e} = (x,y,z)$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0, \\ -2x + 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0, \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Мы уже проверили, что ранг матрицы этой системы равен 3, т.е. система не имеет решений (кроме, конечно, решения $x = y = z = 0$, которое для направляющего вектора не годится). ■

Занятие 9

Прямые и плоскости в пространстве. Окончание.

Любая плоскость делит пространство на два полупространства. Если плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то полупространства определяются неравенствами $Ax+By+Cz+D>0$ и $Ax+By+Cz+D<0$.

Упражнение 1. Даны четыре плоскости

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1-4t+s, \\ y = -1+5s, \\ z = -t, \end{cases} \qquad \pi_2: \begin{cases} x = 2-t-2s, \\ y = 4-5t-4s, \\ z = 6s, \end{cases}$$

$$\pi_3: \ 17x-16y-5z+30=0, \qquad \pi_4: \ x+25y-4z+24=0.$$

Докажите, что они образуют тетраэдр и проверьте — лежит ли точка $M(1{,}1{,}1)$ внутри него или нет.

Доказательство. Найдем точку A пересечения плоскостей π_1, π_2 и π_3

$$\begin{cases} x = 1-4t+s = 2-u-2v, \\ y = -1+5s = 4-5u-4v, \\ z = -t = 6v, \\ 17x-16y-5z+30=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6v, \\ s = 1-u-26v, \\ -1+5s = 4-5u-4v = y, \\ x = 1-4t+s, \\ z = -t, \\ 17x-16y-5z+30=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t = v = 0, \\ x = 1+s, \\ u = 1-s, \\ y = -1+5s, \\ s = 1, \end{cases}$$

т.е. $A=(2{,}4{,}0)$. Найдем точку B пересечения плоскостей π_1, π_2 и π_4

$$\begin{cases} z = t = v = 0, \\ x = 1+s, \\ u = 1-s, \\ y = -1+5s, \\ x+25y-4z+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0, \\ z = t = v = 0, \\ x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$$

т.е. $B=(1,-1{,}0)$. Найдем точку C пересечения плоскостей π_1, π_3 и π_4

$$\begin{cases} x = 1-4t+s, \\ y = -1+5s, \\ z = -t, \\ 17(1-4t+s)-16(-1+5s)+5t+30=0, \\ (1-4t+s)+25(-1+5s)+4t+24=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0, \\ t = 1, \\ y = -1, \\ x = -3, \\ z = -1, \end{cases}$$

т.е. $C = (-3, -1, -1)$. Найдем, наконец, точку D пересечения плоскостей π_2, π_3 и π_4

$$\begin{cases} x = 2 - t - 2s, \\ y = 4 - 5t - 4s, \\ z = 6s, \\ 17(2 - t - 2s) - 16(4 - 5t - 4s) - 30s + 30 = 0, \\ (2 - t - 2s) + 25(4 - 5t - 4s) - 24s + 24 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ s = 1, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ z = 6, \end{cases}$$

т.е. $D = (0{,}0{,}6)$. Мы доказали, что плоскости π_1, π_2, π_3 и π_4 своими точками пересечения образуют тетраэдр $ABCD$. Остается узнать, лежит ли точка M внутри него. Для этого вначале составим общие уравнения плоскостей π_1

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t + s, \\ y = -1 + 5s, \\ z = -t, \end{cases} \Leftrightarrow 5x - y - 20z - 6 = 0$$

и π_2

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 2 - t - 2s, \\ y = 4 - 5t - 4s, \\ z = 6s, \end{cases} \Leftrightarrow 5x - y + z - 6 = 0.$$

При подстановке координат точек D и M в уравнение плоскости $\pi_1 = ABC$ имеем $0 - 0 - 120 - 6 < 0$ и $5 - 1 - 20 - 6 < 0$. Выражения имеют одинаковый знак, тто.е. точки D и M лежат по одну сторону относительно плоскости ABC. Для плоскости $\pi_2 = ABD$ и точек C и M имеем $-15 + 1 - 1 - 6 < 0$ и $5 - 1 + 1 - 6 < 0$, т.е. C и M тоже лежат по одну сторону от ABD. Аналогичная ситуация для плоскости $\pi_3 = ACD$ и пары точек B и M; для плоскости $\pi_4 = BCD$ и пары A и M. Поскольку все четыре раза полупространства совпали, делаем вывод, что M лежит внутри тетраэдра $ABCD$. ■

Расстояние от точки $M = (x_0{,}y_0{,}z_0)$ до плоскости $\pi :\ Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M{,}\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если прямая ℓ параллельна плоскости π, то расстояние от ℓ до π можно вычислить как расстояние $\rho(M{,}\pi)$, где M — произвольная точка прямой ℓ.

Упражнение 2. Даны точка $K(-1{,}2{,}4)$, прямая $\ell :\ \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ и плоскость $\pi :\ 2x + 2y + z - 2 = 0$. Пусть M — ближайшая к K точка прямой ℓ, а N — ближайшая к K точка плоскости π. Найдите $|KN|$, $|KM|$ и $|MN|$.

Доказательство.

$$|KN| = \rho(K{,}\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{4}{3},$$

$$|KM| = \rho(K{,}\ell) = \frac{|[(\alpha{,}\beta{,}\gamma){,}(x_0 - x_1{,}y_0 - y_1{,}z_0 - z_1)]|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{|[(-1{,}-2{,}2){,}(-1{,}1{,}2)]|}{3} =$$

$$= \frac{|(-6{,}0{,}-3)|}{3} = \sqrt{5}.$$

Найдем точку N. Поскольку вектор единичной нормали к плоскости π равен $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{3}(2{,}2{,}1)$, то $\overrightarrow{NK} = \pm\rho(K{,}\pi)\overrightarrow{n}$ (знак зависит от того, в какой из полуплоскостей относительно вектора $\overrightarrow{n}$ лежит вектор $\overrightarrow{NK}$). У нас возникает два варианта

$$N = K - \overrightarrow{NK} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 26 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в уравнение плоскости, видим, что правильный ответ — первый. Теперь найдем точку M. Запишем параметрическое уравнение прямой $\ell: \ (-t{,}1-2t{,}2+2t)$ и найдем параметр t из условия $|KM|^2=(-t+1)^2+(1-2t-2)^2+(2+2t-4)^2=5$. Получаем $t=1/3$, т.е. $M=\frac{1}{3}(-1{,}1{,}8)$. Тогда $|MN|=\sqrt{309}/9$. ■

Упражнение 3. Пусть $\pi_1: \ 2x+y+z-4=0$, а $\pi_2: x-2y-2z+3=0$. Найдите угол θ между π_1 и π_2 и запишите уравнение плоскости π_3, проходящей через точку $(1{,}1{,}1)$ перпендикулярно прямой ℓ пересечения π_1 и π_2. Проверьте, что угол между прямыми $\ell_1=\pi_3\cap\pi_1$ и $\ell_2=\pi_3\cap\pi_2$ равен θ.

Доказательство. По определению, угол между плоскостями π_1 и π_2 равен углу между прямыми, возникающими при сечении этих плоскостей плоскостью, перпендикулярной линии пересечения $\pi_1\cap\pi_2$. Однако искать этот угол удобнее из следующего соображения — он равен углу между нормалями $\pm\overrightarrow{n}_1$ и $\pm\overrightarrow{n}_2$. Знаки здесь подбираются так, чтобы нормали были направлены в один и тот же двугранный угол. Попробуем взять $\overrightarrow{n}_1=(2{,}1{,}1)$, $\overrightarrow{n}_2=(1,-2,-2)$. Тогда косинус угла φ между ними равен

$$\cos\varphi=\frac{-2}{3\sqrt{6}}.$$

Угол оказался больше $\pi/2$. Это означает, что мы не угадали с направлением нормалей. Поменяем знак у одной из нормалей — пусть $\overrightarrow{n}_2=(-1{,}2{,}2)$. Тогда $\varphi=\theta=\arccos\sqrt{\frac{2}{27}}$.

Теперь получим тот же ответ длинным способом — по определению. Сначала найдем параметрическое уравнение прямой ℓ

$$\ell: \ \begin{cases}2x+y+z-4=0,\\ x-2y-2z+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=t,\\ z=2-t.\end{cases}$$

Направляющий вектор равен $(0{,}1,-1)$, а так как $\pi_3\perp\ell$, то этот вектор можно взять нормалью к π_3. Тогда $\pi_3: \ y-z+D=0$. Число D подберем из условия $(1{,}1{,}1)\in\pi_3$, откуда $D=0$. Теперь найдем прямые

$$\ell_1: \ \begin{cases}2x+y+z-4=0,\\ y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=t,\\ z=t,\\ x=2-t\end{cases}$$

и

$$\ell_2: \ \begin{cases}x-2y-2z+3=0,\\ y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=t,\\ z=t,\\ x=4t-3.\end{cases}$$

Направляющие векторы этих прямых равны $\overrightarrow{e}_1=(-1{,}1{,}1)$ и $\overrightarrow{e}_2=(4{,}1{,}1)$, а угол между прямыми равен

$$\theta=\arccos\frac{|(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)|}{|\overrightarrow{e}_1||\overrightarrow{e}_2|}=\arccos\frac{2}{\sqrt{54}}=\arccos\sqrt{\frac{2}{27}}.$$

■

Упражнение 4. Найдите уравнения биссекторных плоскостей двух двугранных углов, возникающих при пересечении $\pi_1: \ 3x+4y-5z+1=0$ и $\pi_2: \ x-7z-8=0$.

Доказательство. Запишем нормали $\overrightarrow{n}_1=(3{,}4,-5)$ и $\overrightarrow{n}_2=(1{,}0,-7)$.Плоскость π_3 делит двугранный угол пополам в точности тогда, когда вектор $\overrightarrow{n}_3$ лежит в плоскости векторов $\overrightarrow{n}_1$ и $\overrightarrow{n}_2$ и образует одинаковые углы с ними. Пусть $\overrightarrow{n}_3=a\overrightarrow{n}_1+b\overrightarrow{n}_2=(3a+b{,}4a,-5a-7b)$. Тогда

$$\frac{(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_3)}{|\overrightarrow{n}_1|}=\frac{(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)}{|\overrightarrow{n}_2|}\Leftrightarrow 9a+3b+16a+25a+35b=3a+b+35a+49b\Leftrightarrow a=b$$

и взяв $a=b=1$, получим $\overrightarrow{n}_3=(4{,}4,-12)$. Значит, искомая плоскость имеет уравнение $4x+4y-12z+D=0$. Плоскости π_1, π_2 и π_3 должны образовать собственный пучок, т.е. $\mathrm{rk}\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 1\\ 1 & 0 & -7 & -8\\ 4 & 4 & -12 & D\end{pmatrix} = 2$, откуда $D = -7$. Итак, уравнение первой плоскости имеет вид $4x + 4y - 12z - 7 = 0$. Вторая плоскость возникает при изменении знака у одной из нормалей $\overrightarrow{n}_1$ или $\overrightarrow{n}_2$. Пусть $\overrightarrow{n}_1 = (3{,}4,-5)$, $\overrightarrow{n}_2 = (-1{,}0{,}7)$. Тогда $\overrightarrow{n}_3 = (3a - b, 4a, -5a + 7b)$,

$$\frac{(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_3)}{|\overrightarrow{n}_1|} = \frac{(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)}{|\overrightarrow{n}_2|} \Leftrightarrow 9a - 3b + 16a + 25a - 35b = -3a + b - 35a + 49b \Leftrightarrow a = b,$$

$\overrightarrow{n}_3 = (2{,}4{,}2)$ и вторая плоскость имеет уравнение $2x + 4y + 2z + 9 = 0$. ■

Упражнение 5. Плоскости $\pi_1 :\ x + y - z + 7 = 0$, $\pi_2 :\ x - y - z - 3 = 0$ и $\pi_3 :\ x + y + z + 5 = 0$ пересекаются в точке $A = (-1,-5,1)$ и образуют восемь трехгранных углов. Найдите геометрическое место центров шаров, вписанных в тот трехгарнный угол, который содержит начало координат.

Доказательство. Пусть точка $N = (a,b,c)$ — центр одного из шаров, вписанных в трехгранный угол. Значит точка N равноудалена от всех плоскостей. Кроме того, для каждой из плоскостей точки N и $O(0{,}0{,}0)$ лежат в одном и том же полупространстве. Последнее условие означает, что $a + b - c + 7 > 0$, $a - b - c - 3 < 0$ и $a + b + c + 5 > 0$. Первое условие означает, что

$$\rho(N,\pi_1) = \frac{a + b - c + 7}{\sqrt{3}} = \rho(N,\pi_2) = \frac{-a + b + c + 3}{\sqrt{3}} = \rho(N,\pi_3) = \frac{a + b + c + 5}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда $a = -1$, $c = 1$, а b произвольно, т.е. $N = (-1,b,1)$. Возвращаясь к найденным трем неравенствам, получаем ограничение $b > -5$. ■

Упражнение 6. Точка A лежит на прямой $\ell_1 :\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$, а точка B — на прямой $\ell_2 :\ x = 1+3t, y = 2-t, z = 3+t$. Найдите такие A и B, чтобы длина отрезка $|AB|$ была минимальной.

Доказательство. **Первый способ.** Параметризуем прямую

$$\ell_1 :\ x = -1 + 2s, y = -2 - 3s, z = 1 + 2s.$$

Тогда

$$|AB|^2 = (2 + 3t - 2s)^2 + (4 - t + 3s)^2 + (2 + t - 2s)^2 = 11t^2 + 17s^2 - 22ts + 8t + 8s + 24 =$$
$$= 11(t - s)^2 + 6s^2 + 8(t - s) + 16s + 24 = 11\left(t - s + \frac{4}{11}\right)^2 + 6\left(s + \frac{4}{3}\right)^2 + 24 - \frac{16}{11} - \frac{32}{3}.$$

Теперь видно, что выражение минимально при $s = -4/3$, $t = -56/33$. Тогда

$$A = \left(-\frac{11}{3}, 2, -\frac{5}{3}\right), \quad B = \left(-\frac{45}{11}, \frac{122}{33}, \frac{43}{33}\right).$$

Второй способ. Расстояние от A до прямой ℓ_2 — это длина перпендикуляра, опущенного из A на ℓ_2, т.е. $\overrightarrow{AB} \perp \ell_2$. Аналогично, $\overrightarrow{AB} \perp \ell_1$. Общий перпендикуляр можно найти, вычислив векторное произведение направляющих векторов $\overrightarrow{e_1} = (2,-3{,}2)$ и $\overrightarrow{e_2} = (3,-1{,}1)$. Итак,

$$\overrightarrow{AB} = k[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] = k(-1{,}4{,}7).$$

Коэффициент k найдем из следующих соображений: после сдвига $\ell_1' = \ell_1 + \overrightarrow{AB}$ прямая ℓ_1' должна пересечь прямую ℓ_2. Получаем систему

$$\begin{cases} x = -1 + 2s - k = 1 + 3t, \\ y = -2 - 3s + 4k = 2 - t, \\ z = 1 + 2s + 7k = 3 + t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 2s + k = -2, \\ t - 3s + 4k = 4, \\ t - 2s - 7k = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -56/33, \\ s = -4/3, \\ k = 14/33. \end{cases}$$

Подставляем найденные значения, приходим к тому же ответу. ■

Длина отрезка $|AB|$, найденного в задаче, есть *расстояние между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 *и* ℓ_2. Это расстояние можно найти, не находя самих точек A и B, по формуле

$$\rho(\ell_1,\ell_2) = \frac{|(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)|}{|[\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2]|},$$

где $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$ — направляющие векторы ℓ_1 и ℓ_2, а $M \in \ell_1$ и $N \in \ell_2$ — две произвольные точки. Формула объясняется просто — высота призмы со сторонами $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{MN}$ равна объему призмы, деленному на площадь основания.

Занятие 10

Афинные замены координат

Определение 1. Пусть на плоскости заданы стандартные координаты (x,y). Переход к координатам $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$ называется афинной заменой координат.

При этом $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется *матрицей замены*, а $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ называется *вектором сдвига.*

Определение 2. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы стандартные координаты (x,y,z). Переход к координатам $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases}$ называется афинной заменой координат.

Матрица замены и вектор сдвига определяются аналогично.

Упражнение 1. В $\mathbb{R}^2$ сделали афинную замену координат

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 1, \\ y' = -3x + 2y - 2. \end{cases}$$

Найдите обратную замену. Напишите в новых и старых координатах уравнение прямой, проходящей через точку $(5,8)$ (в координатах (x,y)) параллельно прямой $x - 2y = 3$.

Доказательство. В матричной записи замена имеет вид $\mathbf{x}' = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Выразим отсюда вектор $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \mathrm{A}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{b}) = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{x}' - \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Поскольку

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{cases} x = 2x' + y', \\ y = 3'x + 2y' + 1. \end{cases}$$

В старых координатах имеем: прямая проходит через точку $x = 5$, $y = 8$ параллельно прямой $x - 2y = 3$. Тогда она задается уравнением $x - 2y = C$ (условие параллельности), причем $C = -11$, т.е. $x - 2y + 11 = 0$. Подставляя формулы обратной замены, имеем $(2x' + y') - 2(3x' + 2y' + 1) + 11 = 0$, т.е. $-4x' - 3y' + 9 = 0$. ■

Упражнение 2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ система координат $O'e_1'e_2'e_3'$ задается координатами $O' = (1,-1,1)$, $\overrightarrow{e_1}' = (1,2,-1)$, $\overrightarrow{e_2}' = (0,1,2)$, $\overrightarrow{e_3}' = (1,-1,-1)$. В этой системе найдите координаты точек K, L, M и N, зная их координаты в классическом базисе $K(-1,0,0)$, $L(1,0,0)$, $M(0,2,0)$, $N(0,0,3)$.

Доказательство. Найдем матрицу перехода A и вектор сдвига $\mathbf{b}$ в замене $\mathbf{x}' = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Знаем, что если векторы нового базиса записать по столбцам матрицы, то получим **обратную** замену. В нашем случае

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить формулы прямой замены, найдем

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Подставляя сюда старые координаты точек, получим новые их координаты $K = \frac{1}{6}(1,-9,-13)$, $L = \frac{1}{2}(1,-1,-1)$, $M = (1,-1,-2)$, $N = \frac{1}{6}(-1,3,-5)$. ■

При произвольных афинных заменах координат могут меняться «расстояния между точками». Это означает, что если точки A и B после афинной замены имеют координаты (x_1',y_1') и (x_2',y_2') соответственно, то длина отрезка $|AB|$ нне обязательно равна числу $\sqrt{(x_1'-x_2')^2 + (y_1'-y_2')^2}$. Аналогичный эффект возникает и в $\mathbb{R}^3$.

Можно доказать, что расстояния между произвольными парами точек при афинной замене не изменятся тогда и только тогда, когда матрица замены ортогональна, т.е. $A \cdot A^t = E$.

Упражнение 3. Проверьте, что матрица перехода $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ в замене $\mathbf{x}' = \mathrm{A}\mathbf{x}$ является ортогональной. Найдите площадь треугольника с вершинами $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$ и $\overrightarrow{e_3}'$.

Доказательство. Имеем $A \cdot A^t = E$, т.е. матрица ортогональна. Тогда она задает переход к новому ортонормированному базису, а в таком базисе сохраняются все метрические размеры (расстояния, площади, объемы и т.д.) и все углы. В частности, площадь треугольника с вершинами $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$ и $\overrightarrow{e_3}'$ равна площади треугольника с вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ в классической системе координат. Искомую площадь найдем через векторное произведение

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0), \quad \overrightarrow{AC} = (-1,0,1), \quad [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = (1,1,1),$$

т.е. $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Если матрица замены не ортогональна, то длины векторов в новой системе координат вычисляются по формуле $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, где $\cdot$ — скалярное произведение. При этом в новых координатах скалярное произведение векторов вычисляется не «как обычно» $(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$, а по формуле

$$(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) = g_{11}x_1x_2 + g_{12}x_1y_2 + g_{21}x_2y_1 + g_{22}y_1y_2.$$

Матрица $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ называется *метрической матрицей*.

Упражнение 4. На плоскости задали систему координат $O'e_1'e_2'$, где $O' = (0,-2)$, $\overrightarrow{e_1}' = (2{,}1)$, $\overrightarrow{e_2}' = (-2{,}1)$ и в новой системе координат задали прямую $\ell:\ 2x' + 3y' + 3 = 0$ и точку $K(4,-4)$. Найдите расстояние от K до ℓ.

Доказательство. **Первый способ.** Матрица замены $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ не ортогональна, т.е. замена меняет расстояния. Перейдем к начальным координатам. Для точки K имеем

$$K = O' + 4\overrightarrow{e_1}' - 4\overrightarrow{e_2}' = (0,-2) + (8{,}4) + (8,-4) = (16,-2).$$

С помощью координат векторов $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$ и точки O' легко задать обратную замену

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}' + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Обратим матрицу и найдем прямую замену

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для прямой ℓ имеем

$$2x' + 3y' + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y + 8 - 3x + 6y + 12 + 12 = 0 \Leftrightarrow -x + 10y + 32 = 0,$$

т.е.

$$\rho(K,\ell) = \frac{|-16 - 20 + 32|}{\sqrt{1+100}} = \frac{4}{\sqrt{101}}.$$

Второй способ. Будем работать в новой системе координат. Параметризуем прямую $\ell:\ x' = -3t,\ y' = -1 + 2t$ и найдем точку B на прямой — ближайшую к K. В афинной системе координат скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a} = (a_1,a_2)$ и $\overrightarrow{b} = (b_1,b_2)$ вычисляется как

$$\overrightarrow{a} \cdot G \cdot \overrightarrow{b}^t = (a_1,a_2)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2,$$

где G — метрическая матрица. В прямоугольной нормированной системе координат $G = E$, а в афинной системе про эту матрицу можно сказать только то, что G симметрична и положительна.[1] К счастью, в случае, если афинная система была получена из ортонормированной системы переходом к базису $O'e_1'e_2'$, матрицу G можно легко вычислить по формуле Грама

$$G = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}',\overrightarrow{e_1}') & (\overrightarrow{e_1}',\overrightarrow{e_2}') \\ (\overrightarrow{e_2}',\overrightarrow{e_1}') & (\overrightarrow{e_2}',\overrightarrow{e_2}'), \end{pmatrix}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в исходном базисе Oe_1e_2. В нашем случае

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к решению задачи. Имеем $\overrightarrow{KB} = (-4 - 3t, 3 + 2t)$. Квадрат расстояния $|KB|^2$ (в новой системе координат) равен

$$|KB|^2 = (-4 - 3t,\ 3 + 2t) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 - 3t \\ 3 + 2t \end{pmatrix} = 101t^2 + 282t + 197.$$

Это выражение минимально при $t = -\dfrac{141}{101}$, а минимальное значение равно $\dfrac{16}{101}$, т.е. $|KB| = \dfrac{4}{\sqrt{101}}$.

■

[1] Внимание! Матрица называется положительной не тогда, когда положительны все ее элементы, а тогда, когда скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot G \cdot \overrightarrow{a}^t$ для любого ненулевого вектора положительно, т.е. матрица G задает положительные длины векторов.

Упражнение 5. Докажите, что площадь элементарного параллелограмма — параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{e_1}'$ и $\overrightarrow{e_2}'$ афинной системы $O'e_1'e_2'$ в $\mathbb{R}^2$, равна $\sqrt{\det G}$, где G — метрическая матрица.

Доказательство. Пусть векторы $\overrightarrow{e_1}'$ и $\overrightarrow{e_2}'$ имеют координаты (e_{11},e_{21}) и (e_{12},e_{22}) относительно стандартной системы координат. Тогда искомая площадь равна модулю определителя $\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$. Составив метрическую матрицу — матрицу Грама скалярных произведений, видим, что

$$G = \begin{pmatrix} e_{11}^2 + e_{21}^2 & e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22} \\ e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22} & e_{12}^2 + e_{22}^2. \end{pmatrix}$$

Находим ее определитель

$$\det G = (e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21})^2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}^2 .$$

■

Действуя в точности так же, можно доказать, что объем элементарного параллелепипеда — параллелепипеда, натянутого на вектора $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$ и $\overrightarrow{e_3}'$ афинной системы $O'e_1'e_2'e_3'$ в $\mathbb{R}^3$, равен $\sqrt{\det G}$, где G — метрическая матрица.

Упражнение 6. При каких условиях на числа g_{11}, g_{12} и g_{22} матрица $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$ может быть метрической матрицей на плоскости?

Доказательство. Как мы помним, метрическая матрица есть матрица Грама для некоторой афинной замены, т.е. $g_{11} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})$, $g_{12} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, $g_{22} = (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})$. Тогда, во–первых, $g_{11} > 0$ и $g_{22} > 0$. Кроме того,

$$g_{12}^2 = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})^2 = |\overrightarrow{e_1}|^2|\overrightarrow{e_2}|^2\cos^2\varphi = g_{11}g_{22}\cos^2\varphi < g_{11}g_{22}.$$

Действительно, φ — это угол между векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, а поскольку они линейно независимы, то $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$. Итак, для любой матрицы Грама выполнены три условия: $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$ и $\det G > 0$. Покажем, что, наоборот, если эти три условия выполнены, то матрица G есть матрица Грама для какой–то пары векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. Здесь проще всего предъявить эти векторы:

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} g_{12}/\sqrt{g_{11}} \\ \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}/\sqrt{g_{11}} \end{pmatrix}.$$

Ответ: тогда и только тогда, когда $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$ и $\det G > 0$. ■

Условие $g_{22} > 0$ можно отбросить. Действительно, если мы знаем, что $g_{11} > 0$ и $\det G > 0$, то $g_{22} = (\det G + g_{12}^2)/g_{11} > 0$ автоматически.

В трехмерном пространстве можно доказать такой критерий: матрица G является метрической матрицей тогда и только тогда, когда она симметрична и $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$, $g_{33} > 0$, $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{13} & g_{33} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} > 0$, $\det G > 0$. Как и в двумерном случае, некоторые условия здесь можно отбрасывать. Например, можно оставить три неравенства $g_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} > 0$ и $\det G > 0$.

Занятие 11

Кривые второго порядка. Начало.

§ 11.1 Классификация кривых второго порядка

Установим на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим общее уравнение второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0, \tag{11.1}$$

в котором $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Определение 1. Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (11.1), называется *кривой (линией) второго порядка.*

Для всякой кривой второго порядка существует прямоугольная система координат, называемая *канонической*, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **(эллипс)**
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ **(мнимый эллипс)**
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ **(пара мнимых пересекающихся прямых)**
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **(гипербола)**
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ **(пара пересекающихся прямых)**
6. $y^2 = 2px$, $p > 0$ **(парабола)**
7. $y^2 - a^2 = 0$ **(пара параллельных прямых)**
8. $y^2 + a^2 = 0$ **(пара мнимых параллельных прямых)**
9. $y^2 = 0$ **(пара совпадающих прямых)**

Уравнение (11.1) удобно также записывать в виде

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a = 0$$

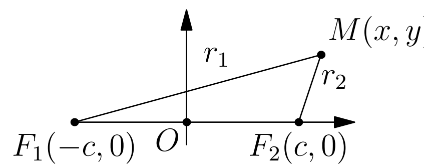
или

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

§ 11.2 Вывод канонического уравнения эллипса

Определение 2. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояние до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Для вывода канонического уравнения эллипса выберем начало O декартовой системы координат в середине отрезка F_1F_2, а оси Ox и Oy направим так, как указано на рисунке.



Пусть длины отрезка F_1F_2 равна $2a$. Тогда в выбранной системе координат точки F_1 и F_2 соответственно имеют координаты $(-c,0)$ и $(c,0)$. Обозначим через $2a$ постоянную, о которой говорится в определении эллипса. Очевидно, $2a > 2c$, то есть $a > c$. Пусть M — точка плоскости с координатами (x,y). Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до точек F_1 и F_2 соответственно. Согласно определению эллипса равенство

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{11.2}$$

является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данном эллипсе. Используя формулу расстояние между двумя точками получим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{11.3}$$

Из (11.2) и (11.3) вытекает, что соотношение

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \tag{11.4}$$

представляет собой необходимое и достаточное условие расположения точки M с координатами x и y на данном эллипсе. Поэтому соотношение (11.4) можно рассматривать как *уравнение эллипса.* Путем стандартного приема (уничтожения радикалов) это уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11.5}$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{11.6}$$

Упражнение 1. Напишите уравнение эллипса с вершинами (1,1) и (7,1), зная, что он касается оси Ox.

Доказательство. Вершина эллипса лежат на его фокальной оси, т.е. фокальная ось нашего эллипса — это прямая $y = 1$. Центр эллипса находится посередине между его вершинами, т.е. центр нашего эллипса — точка (4,1). Значит, вторая ось эллипса — прямая $x = 4$. Тогда большая полуось элллипса равна 3 (расстояние от центра до вершины). Ось Ox параллельна фокальной оси эллипса, т.е. расстояние от центра эллипса до Ox — это меньшая полуось. Итак, $a = 3$, $b = 1$, а эллипс имеет уравнение

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 9y^2 - 8x - 18y + 16 = 0.$$

■

Упражнение 2. Напишите уравнение эллипса, проходящего через точку ($\sqrt{10}$,0), зная, что его фокальная ось имеет уравнение $x - 2y = 0$, эксцентриситет равен $\sqrt{3}/2$, а фокальный параметр равен 1.

Доказательство. Нормаль фокальной оси равна $(1,-2)$, а направляющий вектор (2,1). Сделаем ортогональную замену координат, направив первую координатную ось вдоль фокальной оси, а вторую вдоль ее нормали. Чтобы замена была ортогональной, вектор нормали и направляющий вектор надо нормировать. Тогда искомая замена

$$\begin{cases} u = \frac{2x+y}{\sqrt{5}}, \\ v = \frac{x-2y}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

В новых координатах фокусы эллипса лежат на оси Ou. Для того, чтобы система координат была канонической, необходимо, чтобы центр симметрии эллипса попал в начало координат. Тогда нам потребуется еще сделать сдвиг вдоль фокальной оси, т.е. окончательно замена имеет вид

$$\begin{cases} u = \frac{2x+y}{\sqrt{5}} + u_0, \\ v = \frac{x-2y}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

В этой системе элллипс имеет каноническое уравнение $\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$. Зная эксцентриситет и фокальный параметр, найдем a и b

$$\begin{cases} e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{3}/2, \\ p = \frac{b^2}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, \\ b = 2. \end{cases}$$

Остается найти величину сдвига u_0. Подставим в уравнение эллипса координаты точки $x = \sqrt{10}$, $y = 0$ и получим

$$\frac{(2\sqrt{2} + u_0)^2}{16} + \frac{2}{4} = 1 \Leftrightarrow (2\sqrt{2} + u_0)^2 = 8.$$

Получаем два варианта: $u_0 = 0$ или $u_0 = -4\sqrt{2}$. В первом случае эллипс имеет уравнение

$$\frac{(2x+y)^2}{80} + \frac{(x-2y)^2}{20} = 1 \Leftrightarrow 8x^2 - 12xy + 17y^2 - 80 = 0.$$

Во втором случае

$$\frac{(2x+y-4\sqrt{10})^2}{80} + \frac{(x-2y)^2}{20} = 1 \Leftrightarrow 8x^2 - 12xy + 17y^2 - 16\sqrt{10}x - 8\sqrt{10}y + 80 = 0.$$

■

Упражнение 3. Напишите уравнение параболы, зная ее фокус $A = (-3{,}1)$ и директрису $\ell:\ x + y - 2 = 0$.

Доказательство. Фокальная ось параболы перпендикулярна директрисе, т.е. имеет уравнение $x - y + C = 0$ и проходит через фокус, т.е. $C = 4$. Центр O' канонической системы координат лежит посередине между точкой пересечения фокальной оси и директрисы — точкой $B = (-1{,}3)$ — и фокусом, т.е. $O' = (-2{,}2)$. Ось $O'u$ канонической системы координат направлена вдоль вектора $\overrightarrow{BA} = (-2, -2)$, т.е. $\overrightarrow{e_1}' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)$ (замена должна быть ортогональной, так что мы сразу провели нормировку вектора). Ось $O'v$ надо направить перпендикулярно фокальной оси, т.е. вдоль директрисы, а значит $\overrightarrow{e_2}' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Итак,

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v - 2, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v + 2, \end{cases}$$

(составили матрицу из векторов $\overrightarrow{e_1}'$ и $\overrightarrow{e_2}'$), а тогда

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Фокальный параметр p равен расстоянию между фокусом A и точкой B, т.е. $p = 2\sqrt{2}$. Каноническое уравнение имеет вид $v^2 = 2pu$, т.е.

$$\frac{(x-y+4)^2}{2} = -4\sqrt{2}\frac{x+y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 16x + 16 = 0.$$

■

Упражнение 4. Составьте уравнение гиперболы, зная ее асимптоты $y = 1 \pm 2x$ и фокальное расстояние $2c = \sqrt{5}$.

Доказательство. Асимптоты гиперболы пересекаются в центре O' ее канонической системы координат, т.е. $O' = (0{,}1)$. Бисектрисы углов, образующихся при пересечении асимптот — это оси канонической системы. В нашем случае эти оси имеют уравнения $y = 1$ и $x = 0$. Итак, каноническое уравнение нашей гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1.$$

Уравнения асимптот получаются из канонического уравнения обнулением правой части, т.е. $y = 1 \pm \dfrac{b}{a}x$, откуда $b = 2a$. Фокальное расстояние равно $2c = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2a\sqrt{5}$, откуда $a = 1/2$, $b = 1$. Искомое уравнение

$$4x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0.$$

■

Упражнение 5. Определите афинный тип кривой второго порядка $2x^2 - 8xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$.

Доказательство. Выделяем полный квадрат

$$2x^2 - 8xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 2\,(x-2y)^2 - 8y^2 - 12y^2 - x + 26y - 10.$$

Обозначим $u = x - 2y$. Тогда уравнение примет вид

$$2u^2 - 20y^2 - u + 24y - 10 = 0.$$

Еще раз выделяем полные квадраты

$$2\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} - 20\left(y - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{36}{5} - 10 = 0.$$

Обозначим $v = u - \frac{1}{4}$, $z = y - \frac{3}{5}$. Получим уравнение

$$2v^2 - 20z^2 - 2{,}925 = 0.$$

Ответ уже ясен, но можно привести уравнение к каноническому виду. Разделим обе части на 2,925 и обозначим $\xi = \sqrt{\frac{2}{2{,}925}}v$, $\eta = \sqrt{\frac{20}{2{,}925}}z$. Окончательно уравнение примет вид $\xi^2 - \eta^2 = 1$. Получили гиперболу. ■

§ 11.3 Инварианты кривой второго порядка

Определение 3. *Инвариантами* кривой называются такие выражения, составленные из коэффициентов ее уравнения, которые не меняются при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой такой же системе, то есть при *поворотах* осей координат и при *параллельных* переносах осей.

Для определения типа кривой не обязательно приводить ее к каноническому виду. Достаточно вычислить значения *инвариантов*. Их значения не меняются при ортогональных заменах координат, при афинных заменах инварианты меняются. Однако знаки инвариантов не меняются и при афинных заменах, а этих знаков достаточно для классификации. Итак, пусть дана кривая

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Обозначим

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad I_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— это и есть инварианты. Пригодится еще полуинвариант (он не меняется при однородных ортогональных заменах)

$$I_2^* = a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2.$$

Классификация выглядит так:
$I_2 > 0$, $I_1I_3 < 0$ — эллипс, каноническое уравнение $x^2 + y^2 = 1$,
$I_2 > 0$, $I_1I_3 > 0$ — мнимый эллипс, каноническое уравнение $x^2 + y^2 = -1$,
$I_2 > 0$, $I_3 = 0$ — пара мнимых пересекающихся прямых, каноническое уравнение $x^2 + y^2 = 0$,
$I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$ — гипербола, каноническое уравнение $x^2 - y^2 = 1$,
$I_2 < 0$, $I_3 = 0$ — пара пересекающихся прямых, каноническое уравнение $x^2 - y^2 = 0$,
$I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$ — парабола, каноническое уравнение $y^2 = 2x$,
$I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_2^* < 0$ — пара параллельных прямых, каноническое уравнение $x^2 = 1$,
$I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_2^* > 0$ — пара мнимых параллельных прямых, каноническое уравнение $x^2 = -1$,
$I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_2^* = 0$ — пара совпадающих прямых, каноническое уравнение $x^2 = 0$.
Будем говорить, что

- При $I_2 > 0$ уравнение (11.1) задает линию *эллиптического* типа;
- При $I_2 < 0$ уравнение (11.1) задает линии *гиперболического* типа;
- При $I_2 = 0$ уравнение (11.1) задает линии *параболического* типа;

Определение 4. Кривая второго порядка называется *невырожденной*, если $I_3 \neq 0$

Невырожденная кривая второго порядка называется *центральной*, если $I_2 \neq 0$

Невырожденная кривая второго порядка называется *нецентральной*, если $I_2 = 0$

Итак, невырожденые кривые — это *эллипс*, *мнимый эллипс*, *гипербола*, *парабола*.

Определение 5. Кривая второго порядка называется *вырожденной*, если $I_3 = 0$

Вырожденные кривые — это *пара мнимых пересекающихся прямых*, *пара вещественных пересекающихся прямых (вырожденная гипербола)*, *пара вещественных параллельных прямых*, *одна вещественная прямая (две совпадающие прямые)*, *пара мнимых параллельных прямых (ни одной вещественной точки)*.

Упражнение 6. При каком значении параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ кривая $4x^2 - 4\lambda xy + (1-\lambda)y^2 - 6x + (3-\lambda)y + 4 = 0$ задает параболу?

Доказательство. Вычисляем

$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2\lambda \\ -2\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda - 4\lambda^2.$$

Тогда $I_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Вычисляем

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2\lambda & -3 \\ -2\lambda & 1-\lambda & (3-\lambda)/2 \\ -3 & (3-\lambda)/2 & 4 \end{vmatrix} = -23\lambda^2 + 17\lambda - 2.$$

Это выражение обращается в ноль при $\lambda = \dfrac{17 \pm \sqrt{105}}{46}$, т.е. при $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ имеем $I_3 \neq 0$.

Ответ: $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. ■

Занятие 12

Кривые второго порядка. Окончание

Многие важные свойства кривых второго порядка могут быть изучены при помощи *характеристической квадратичной формы*, соответствующей уравнению кривой

$$F_0\,(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \tag{12.1}$$

Так, например, невырожденная кривая ($I_2 \neq 0$) оказывается вещественным эллипсом, мнимым эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, будет ли $F_0\,(x,y)$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой или полуопределённой квадратичной формой, что устанавливается по корням характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - I_1 \cdot \lambda + I_2 = 0 \tag{12.2}$$

Корни этого уравнения являются *собственными значениями* вещественной симметричной матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ и, как следствие этого, всегда вещественны.

Определение 1. *Диаметром* кривой второго порядка называется геометрическое место середин параллельных хорд этой кривой. Полученный таким образом диаметр называется *сопряженным* этим хордам или их направлению.

Диаметр, сопряженный хордам, образующий угол θ с положительным направлением оси Ox, определяется уравнением:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \cdot \cos\theta + (a_{12}x + a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \cdot \sin\theta = 0 \tag{12.3}$$

Если выполняется условие $I_2 \neq 0$, то все диаметры кривой пересекаются в одной точке — центре, а сама кривая называется *центральной*. В противном случае ($I_2 = 0$) все диаметры кривой либо параллельны, либо совпадают.

Координаты центра (x_0, y_0) определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{12.4}$$

Решая эту систему относительно x_0 и y_0, получим:

$$x_0 = -\frac{1}{I_2} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}}{I_2} \tag{12.5}$$

$$y_0 = -\frac{1}{I_2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = \frac{a_{13} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{23}}{I_2}, \text{ где } I_2 \neq 0 \tag{12.6}$$

Если кривая центральная, то перенос начала координат в ее центр приводит уравнение к виду

$$a_{11}\cdot X^2+2a_{12}\cdot XY+a_{22}\cdot Y^2+\frac{I_3}{I_2}=0 \tag{12.7}$$

где $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$ и X, Y — координаты относительно новой системы.

Пусть нам дано уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Афинные замены позволяют лишь определить тип кривой, метрические характеристики кривой при таких заменах меняются. Чтобы определить положение кривой на плоскости и все ее характеристики (главные оси, фокусы, эксцентриситет и т.д.) необходимо найти **ортогональную** замену координат, в которой уравнение примет канонический вид:
$\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}=1$, $a\geqslant b>0$, — эллипс,
$\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}=-1$, $a\geqslant b>0$ — мнимый эллипс,
$\dfrac{\xi^2}{a^2}+\eta^2=0$, $a\geqslant 1$ — пара мнимых пересекающихся прямых,
$\dfrac{\xi^2}{a^2}-\dfrac{\eta^2}{b^2}=1$, a, $b>0$ — гипербола,
$\dfrac{\xi^2}{a^2}-\eta^2=0$, $a\geqslant 1$ — пара пересекающихся прямых,
$\eta^2=2p\xi$, $p>0$ — парабола,
$\xi^2=a^2$, $a>0$ — пара параллельных прямых,
$\xi^2=-a^2$, $a>0$ — пара мнимых параллельных прямых,
$\xi^2=0$ — пара совпадающих прямых.
Для того, чтобы найти подходящую замену, проще всего действовать по следующему алгоритму.
Шаг 1. Записать *характеристическое уравнение* $\det\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}=0$ и найти его корни λ_1 и λ_2 — *характеристические числа.*
Шаг 2. Для каждого характеристического числа решить систему

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0,\\ a_{12}x+(a_{22}-\lambda)y=0.\end{cases}$$

Ее решение будет определено с точностью до множителя. Этот множитель надо подобрать так, чтобы $x^2+y^2=1$. Получатся два вектора $\overrightarrow{e_1}=(c_{11},c_{21})$ — решение для $\lambda=\lambda_1$ и $\overrightarrow{e_2}=(c_{12},c_{22})$ — решение для $\lambda=\lambda_2$ — *собственные векторы.*
Шаг 3. Надо проверить ориентацию нового базиса — найти определитель $\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}$. Если он отрицательный, то надо поменять нумерацию векторов — сделать вектор $\overrightarrow{e_2}$ первым вектором базиса, а вектор $\overrightarrow{e_1}$ — вторым. Для смены ориентации можно также поменять знаки координат одного (любого) базисного вектора.
Шаг 4. Надо сделать замену

$$\begin{cases}x=c_{11}u+c_{12}v,\\ y=c_{21}u+c_{22}v.\end{cases}$$

Если все было сделано правильно, то уравнение кривой примет вид

$$\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+2b_1u+2b_2b+b_3=0,$$

где λ_1 и λ_2 — характеристические числа, а b_1, b_2 и b_3 — просто какие–то числа.
Шаг 5. Надо сдвинуть центр координат, сделав еще одну замену $\xi=u+b_1$, $\eta=v+b_2$. Получится искомое каноническое уравнение.

Упражнение 1. Приведите кривую второго порядка

$$5x^2+6xy+5y^2-8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y-10=0$$

к каноническому виду. Найдите формулы перехода к канонической системе координат. Определите тип кривой и все ее основные характеристики.

Доказательство. Шаг 1. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 16-10\lambda+\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda_1=8,\ \lambda_2=2.$$

Шаг 2. Подставляем $\lambda_1=8$ и решаем систему

$$\begin{cases} -3x+3y=0, \\ 3x-3y=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=y,$$

т.е. $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1{,}1)$ (мы сразу провели его нормировку). Подставляем $\lambda_2=2$ и решаем систему

$$\begin{cases} 3x+3y=0, \\ 3x+3y=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=-y,$$

т.е. $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

Шаг 3. Определяем ориентацию: $\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}=-1<0$. Для смены ориентации поменяем направление вектора $\overrightarrow{e_2}$. С этого момента $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1{,}1)$.

Шаг 4. Делаем замену

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}v, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v. \end{cases}$$

Уравнение кривой примет вид

$$\frac{5}{2}(u-v)^2+\frac{6}{2}(u^2-v^2)+\frac{5}{2}(u+v)^2-8(u-v)-8(u+v)-10=0 \Leftrightarrow 4u^2+v^2-8u-5=0.$$

Шаг 5. Выделим полный квадрат

$$4(u-1)^2+v^2-9=0 \Leftrightarrow \frac{(u-1)^2}{9/4}+\frac{v^2}{9}=1.$$

Поскольку $9>9/4$, то канонические координаты положим $\xi=v$, $\eta=u-1$. Окончательно, переход к каноническому базису имеет вид

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\xi+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta+\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta+\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y, \\ \eta=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-1. \end{cases}$$

В каноническом базисе уравнение примет вид

$$\frac{\xi^2}{9}+\frac{\eta^2}{9/4}=1.$$

Выводы: кривая второго порядка является эллипсом, его полуоси равны $a=3$ и $b=3/2$, фокальное расстояние $2c=2\sqrt{a^2-b^2}=3\sqrt{3}$. Фокусы находятся в точках $(\pm c{,}0)$ в канонической системе координат, т.е. в точках

$$F_1=\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{2+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right),\quad F_2=\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{2-3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$$

в исходной системе координат. Эксцентриситет равен $\epsilon = c/a = \sqrt{3}/2$, фокальный параметр $p = b^2/a = 3/4$. Фокальная ось имеет уравнение $\eta = 0$, т.е. $x+y = \sqrt{2}$. Директрисы имеют уравнения $\xi = \pm a^2/c = \pm 2\sqrt{3}$, т.е. $y - x = \pm 2\sqrt{6}$. Оси симметрии: прямые $y = x$ и $x + y = \sqrt{2}$ (получаются из уравнений $\xi = 0$ и $\eta = 0$). ■

Упражнение 2. Приведите кривую второго порядка

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$$

к каноническому виду. Найдите формулы перехода к канонической системе координат. Определите тип кривой и все ее основные характеристики.

Доказательство. Шаг 1. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -5\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\, \lambda_2 = 5.$$

Шаг 2. Подставляем $\lambda_1 = 0$ и решаем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + 4y = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = -2y,$$

т.е. $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ (мы сразу провели его нормировку). Подставляем $\lambda_2 = 5$ и решаем систему

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0, \\ 2x - y = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = 2x,$$

т.е. $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1{,}2)$.

Шаг 3. Определяем ориентацию: $\begin{vmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{vmatrix} = 1 > 0$. Ничего менять не надо.

Шаг 4. Делаем замену

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{2}{\sqrt{5}}v. \end{cases}$$

Уравнение кривой примет вид

$$5v^2 - 4\sqrt{5}v + 3 = 0.$$

Шаг 5. Выделим полный квадрат

$$5\left(v - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0$$

Канонические координаты положим $\xi = v - 2/\sqrt{5}$, $\eta = u$. Окончательно, переход к каноническому базису имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\xi + \frac{2}{\sqrt{5}}\eta + \frac{2}{5}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}\xi - \frac{1}{\sqrt{5}}\eta + \frac{4}{5}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \eta = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y. \end{cases}$$

В каноническом базисе уравнение примет вид

$$\xi^2 = \frac{1}{5}.$$

Выводы: уравнение задает на плоскости пару параллельных прямых $\ell_1 : \ x + 2y - 3 = 0$ и $\ell_2 : \ x + 2y - 1 = 0$. Расстояние между прямыми равно $2/\sqrt{5}$. Оси симметрии: прямые $x + 2y - 2 = 0$ и $2x - y = 0$ (получаются из уравнений $\xi = 0$ и $\eta = 0$). ■

Упражнение 3. Не приводя уравнение к каноническому виду, определите, при каких значениях параметра μ кривая второго порядка $x^2 + 6xy + \mu y^2 + 2x - 5 = 0$ является параболой. Найдите фокальный параметр этой параболы.

Доказательство. Воспользуемся инвариантами. Имеем

$$I_1 = 1 + \mu, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & \mu \end{vmatrix} = \mu - 9, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & \mu & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 45 - 6\mu.$$

Кривая является параболой в точности тогда, когда $I_2 = 0$, а $I_3 \neq 0$, т.е. при $\mu = 9$. Если мы запишем каноническое уравнение этой параболы $\eta^2 = 2p\xi$, то $I_1 = 1$, $I_2 = 0$, а $I_3 = -p^2$. Поскольку выражения I_1, I_2, I_3 инварианты, т.е. не меняются при ортогональных заменах координат, то мы можем вычислить их значения в координатах Oxy. Имеем $\mu = 9$, $I_1 = 10$, $I_2 = 0$, $I_3 = -9$. Заметим, что уравнение всегда можно умножить или поделить на ненулевой коэффициент — это никак не меняет кривой второго порядка. Поскольку мы хотим получить $I_1 = 1$, разделим наше уравнение на 10, т.е. запишем его в виде

$$\frac{x^2}{10} + \frac{3xy}{5} + \frac{9y^2}{10} + \frac{x}{5} - \frac{1}{2} = 0.$$

Теперь уже $I_1 = 1$, а $I_3 = -9/10$. Поскольку $I_3 = -p^2$ и $p > 0$, то получаем $p = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. ■

Упражнение 4. Составьте уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$, проходящих через точку $(0,1)$.

Доказательство. Касательная к кривой $F(x,y) = 0$ в точке (x_0,y_0) задается уравнением

$$F'_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

В нашем случае имеем

$$\frac{x_0}{2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{3}(y - y_0) = 0.$$

Подставляя сюда $x = 0$, $y = 1$ и учитывая, что точка (x_0,y_0) должна лежать на гиперболе, получим систему

$$\begin{cases} -\frac{x_0^2}{2} - \frac{2y_0 - 2y_0^2}{3} = 0, \\ \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -3, \\ x_0 = \pm 4. \end{cases}$$

Получаем две касательных: $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$. Первая касается гиперболы в точке $(4, -3)$, а вторая — в точке $(-4, -3)$. ■

Упражнение 5. Напишите уравнения асимптот гиперболы $6x^2 - 7xy - 5y^2 + 13y - 17 = 0$.

Доказательство. Конечно, можно найти каноническую систему координат и каноническое уравнение гиперболы, написать в канонической системе уравнения асимптот $\dfrac{\xi}{a} = \pm\dfrac{\eta}{b}$ и затем вернуться к исходной координатной системе. Можно однако поступить проще. Надо найти такое уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, подстановка которой в уравнение гиперболы сокращает старшие по порядку слагаемые при $x, y \to \infty$ (ведь в этом и есть смысл асимптоты). Заметим сразу же, что прямая $x = const$ не подойдет — слагаемое $-5y^2$ не сокращается. Значит, асимптоты не вертикальны, т.е. их можно искать в виде $y = kx + b$. Подставляем и получаем

$$x^2(6 - 7k - 5k^2) + x(-7b - 10bk + 13k) + (13b - 17 - 5b^2) = 0.$$

Значит, параметры k и b надо искать такими, что

$$\begin{cases} 6 - 7k - 5k^2 = 0, \\ -7b - 10bk + 13k = 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение, получаем $k = -2$ или $k = 3/5$. При $k = -2$ находим $b = 2$, а при $k = 3/5$ получаем $b = 3/5$. Итак, уравнения асимптот: $y = -2x + 2$ и $5y = 3x + 3$. ■

Упражнение 6. Найдите оси симметрии кривой $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 2 = 0$.

Доказательство. Найдем характеристические числа. Для удобства умножим предварительно уравнение на 2. Тогда

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 = 0,$$

т.е. $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 5$. Теперь найдем собственные векторы (нормировать их не обязательно). При $\lambda = \lambda_1$ имеем $9x + 3y = 0$, т.е. $\overrightarrow{e_1} = (1, -3)$. При $\lambda = \lambda_2$ имеем $-x + 3y = 0$, т.е. $\overrightarrow{e_2} = (3,1)$. Остается найти центр кривой. Для произвольной кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ его можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

В нашем случае получаем $x = y = -1$. Остается провести через эту точку прямые с направляющими векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$.
Ответ: $\ell_1 :\ 3x + y + 4 = 0$ и $\ell_2 :\ x - 3y - 2 = 0$. ■

Занятие 13

Поверхности второго порядка

§ 13.1 Составление уравнений поверхностей

Определение 1. *Поверхностью второго порядка* называется всякое множество Φ точек пространства, которое в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$ может быть задано уравнением второй степени, называемым квадрикой:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (13.1)$$

где x, y, z — координаты точек поверхности, a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a_0 — действительные числа.

Определение 2. *Квадратичной частью* уравнения назовем $q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, *однородной линейной частью* уравнения назовем $\ell(x, y, z) = 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z$.

Если ввести обозначения

$$Q := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\ A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix},\ L := (a_1, a_2, a_3),\ X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то уравнение примет вид:

$$(x, y, z, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Теорема 1. Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих 17 видов:

1. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \textit{(эллипсоид)}$$

2. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \textit{(мнимый эллипсоид)}$$

3. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \textit{(однополостный гиперболоид)}$$

4. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \textit{(двуполостный гиперболоид)}$$

5. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \textit{(конус второго порядка)}$$

6. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \textit{(мнимый конус второго порядка)}$$

7. $q > 0,\ p > 0$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \textit{(эллиптический параболоид)}$$

8. $p > 0, q > 0$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \textit{(гиперболический параболоид)}$$

9. $a > 0,\ b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{(эллиптический цилиндр)}$$

10. $a > 0,\ b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \textit{(мнимый эллиптический цилиндр)}$$

11. $a > 0,\ b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \textit{(две мнимые пересекающиеся плоскости)}$$

12. $a > 0,\ b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{(гиперболический цилиндр)}$$

13. $a > 0,\ b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \textit{(две пересекающиеся плоскости)}$$

14. $p > 0$

$$y^2 = 2px \qquad \textit{(параболический цилиндр)}$$

15. $a > 0$

$$y^2 = a^2 \qquad \textit{(две параллельные плоскости)}$$

16. $a > 0$

$$y^2 = -a^2 \qquad \textit{(две мнимые параллельные плоскости)}$$

17.

$$y^2 = 0 \qquad \textit{(две совпадающие плоскости)}$$

Элементарным методом приведения уравнений к каноническому виду является метод Лагранжа. Он заключается в выделении полного квадрата.

Упражнение 1. Определите афинный тип поверхности второго порядка

$$xy + 4z^2 + 2xz - yz - 4x - 3y - 6 = 0.$$

Доказательство. Займемся выделением полных квадратов (метод Лагранжа)

$$4\left(z + \frac{x}{4} - \frac{y}{8}\right)^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{5xy}{4} - 4x - 3y - 6 = 0.$$

Обозначим $\xi = z + \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{8}$, получим

$$4\xi^2 - \frac{1}{4}(x^2 - 5xy + 16x) - \frac{y^2}{16} - 3y - 6 = 0.$$

Продолжаем выделять полные квадраты:

$$4\xi^2 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{5y}{2} + 8\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{5y}{2} - 8\right)^2 - \frac{y^2}{16} - 3y - 6 = 0.$$

Пусть $\eta = x - \dfrac{5y}{2} + 8$, тогда

$$4\xi^2 - \frac{\eta^2}{4} + \frac{3y^2}{2} - 13y + 10 = 0.$$

Наконец, выделяем последний квадрат

$$4\xi^2 - \frac{\eta^2}{4} + \frac{3}{2}\left(y - \frac{13}{3}\right)^2 - \frac{169}{6} + 10 = 0,$$

и, обозначив $\zeta = y - \dfrac{13}{3}$, получаем уравнение

$$4\xi^2 - \frac{\eta^2}{4} + \frac{3\zeta^2}{2} - \frac{109}{6} = 0.$$

Значит, перед нами однополостный гиперболоид. ■

Упражнение 2. Пусть в $\mathbb{R}^3$ сделали афинную замену координат с матрицей Грама G. Как геометрически выглядит теперь ε–окрестность произвольной точки?

Доказательство. Пусть точка имеет координаты (x_0,y_0,z_0) (в новой системе координат). Окрестность радиуса ε задается условием $|(x - x_0,y - y_0,z - z_0)| < \varepsilon$ (расстояние тоже надо считать в новых координатах). Используя метрическую матрицу, получим неравенство

$$g_{11}(x - x_0)^2 + g_{22}(y - y_0)^2 + g_{33}(z - z_0)^2 + 2g_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2g_{13}(x - x_0)(z - z_0) + \\ + 2g_{23}(y - y_0)(z - z_0) < \varepsilon^2.$$

Сделаем сдвиг $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, $z = z - z_0$ и попробуем классифицировать границу окрестности — кривую

$$g_{11}u^2 + g_{22}v^2 + g_{33}w^2 + 2g_{12}uv + 2g_{13}uw + 2g_{23}vw = \varepsilon^2.$$

Для этого найдем инварианты

$$I_1 = g_{11} + g_{22} + g_{33}, \quad I_2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 + g_{11}g_{33} - g_{13}^2 + g_{22}g_{33} - g_{23}^2,$$
$$I_3 = \det G, \quad I_4 = -\varepsilon^2 \det G.$$

Видим, что (см. комментарий после задачи 10) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, $I_3 > 0$, $I_4 < 0$, т.е. наша поверхность — эллипсоид. Можно еще заметить, что точка (u,v,w) лежит на поверхности в точности тогда, когда на поверхности лежит точка $(-u,-v,-w)$, т.е. поверхность симметрична относительно (x_0,y_0,z_0). Ответ: геометрически окрестность есть внутренность некоторого эллипсоида с центром в точке (x_0,y_0,z_0). ■

Определение 3. Будем называть числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *собственными значениями* матрицы Q такие, что $\forall\ i = 1,2,3$

$$\det(Q - E\cdot\lambda_i) = 0 \tag{13.2}$$

Проще говоря, нужно составить характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i \end{vmatrix} = 0$ и найти его корни λ_1, λ_2, λ_3.

Теорема 2*. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат задана квадратичная часть $q(x,y,z)$. Тогда найдется другая прямоугольная система координат с тем же началом, в которой квадратичная часть примет диагональный вид

$$q'(x',y',z') = \lambda_1\cdot(x')^2 + \lambda_2\cdot(y')^2 + \lambda_3\cdot(z')^2. \tag{13.3}$$

При этом λ_j — собственые числа матрицы Q, а переход к новой системе координат задается афинной заменой, в которой вектор сдвига равен нулю, а матрица обратной замены составлена из собственных векторов матрицы Q, записанных по столбцам.

Упражнение 3. Приведите поверхность второго порядка

$$8x^2 + 8xy + 5y^2 + 12z^2 + 12yz - x + 2y - z - 1 = 0$$

к каноническому виду. Найдите формулы перехода к канонической системе координат. Определите тип поверхности.

Доказательство. Шаг 1. Найдем характеристические числа:

$$\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 6 & 12-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 25\lambda^2 - 144\lambda,$$

т.е. $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 0$.

Шаг 2. Найдем собственные векторы. При $\lambda = \lambda_1$ имеем систему (мы заранее знаем, что при подстановке $\lambda = \lambda_1$ матрица системы будет вырождена и выписываем только первое и третье уравнение системы)

$$\begin{cases} -8x + 4y = 0, \\ 6y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ 3y = 2z. \end{cases}$$

Тогда $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ (мы сразу провели нормировку вектора). Аналогично, при $\lambda = \lambda_2$

$$\begin{cases} -x + 4y = 0, \\ 6y + 3z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y, \\ z = -2y, \end{cases}$$

т.е. $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{27}}(4,1,-2)$. И, наконец, при $\lambda = \lambda_3$

$$\begin{cases} 8x + 4y = 0, \\ 6y + 12z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x, \\ y = -2z, \end{cases}$$

т.е. $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

Шаг 3. Обратная замена имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & 4/\sqrt{21} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{21} & -2/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{14} & -2/\sqrt{21} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы замены равен -1. Поменяем местами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$.
Шаг 4. Сделаем замену. Мы знаем, что квадратичная часть уравнения после замены должна принять вид $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$, так что просчитаем только линейную часть. Получим

$$9u^2 + 16v^2 - \sqrt{6}w - 1 = 0.$$

Шаг 5. Остается сделать сдвиг, т.е. $\xi = u$, $\eta = v$, $\zeta = w + 1/\sqrt{6}$, а уравнение примет вид

$$\frac{\xi^2}{1/9} + \frac{\eta^2}{1/16} = \sqrt{6}\zeta.$$

Прямую замену находим, перейдя к обратной матрице

$$\begin{pmatrix} 4/\sqrt{21} & 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{21} & 2/\sqrt{14} & -2/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{21} & 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{21} & 1/\sqrt{21} & -2/\sqrt{21} \\ 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Выводы: поверхность есть эллиптический параболоид. Замена координат имеет вид

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{21}}(4x + y - 2z) \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{14}}(x + 2y + 3z) \\ \zeta = \frac{1}{\sqrt{6}}(x - 2y + z + 1). \end{cases}$$

■

Упражнение 4. Приведите поверхность второго порядка

$$2x^2 - 4yz - 2y - 2z - 1 = 0$$

к каноническому виду. Найдите формулы перехода к канонической системе координат. Определите тип поверхности.

Доказательство. Шаг 1. Найдем характеристические числа:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8,$$

т.е. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.
Шаг 2. Найдем собственные векторы. При $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ система вырождается в одно уравнение $-2y - 2z = 0$. Тогда $\overrightarrow{e_1} = (1{,}0{,}0)$ (взяли $x = 1$, $y = z = 0$), а $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0{,}1,-1)$ (взяли $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$ и нормировали). При этом мы специально подбирали векторы так, чтобы они оказались ортогональными друг другу. При $\lambda = \lambda_3$ имеем систему

$$\begin{cases} 4x = 0, \\ 2y - 2z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = z, \end{cases}$$

т.е. $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0{,}1{,}1)$.
Шаг 3. Обратная замена имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы замены равен 1.
Шаг 4. Сделаем замену. Мы знаем, что квадратичная часть уравнения после замены должна принять вид $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$, так что просчитаем только линейную часть. Получим

$$2u^2 + 2v^2 - 2w^2 - 2\sqrt{2}w - 1 = 0.$$

Шаг 5. Остается сделать сдвиг, т.е. $\xi = u$, $\eta = v$, $\zeta = w + 1/\sqrt{2}$, а уравнение примет вид

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

Прямую замену находим, перейдя к обратной матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Выводы: поверхность есть прямой круговой конус с вершиной в точке $(0, -1/2, -1/2)$ и осью симметрии $x = 0$, $y = z$. Замена координат имеет вид

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z) \\ \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z + 1). \end{cases}$$

■

Упражнение 5. Напишите уравнение поверхности, полученной вращением кривой второго порядка $3x^2 + 4xy + 1 = 0$ вокруг оси $y + 2x = 0$.

Доказательство. Приведем кривую к каноническому виду. Найдем характеристические числа

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4,$$

т.е. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Найдем собственные векторы $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$. Перейдем к этому базису

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(u + 2v), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2u + v). \end{cases}$$

Уравнение кривой примет вид $-u^2 + 4v^2 + 1 = 0$, т.е. эта кривая — гипербола. Ось вращения примет вид $y + 2x = 0 \Leftrightarrow v = 0$, т.е. мы вращаем гиперболу вокруг одной из ее осей. При фиксированном u_0, $|u_0| \geqslant 1$, мы вращаем вокруг оси Ou две точки $\left(u_0, \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{u_0^2 - 1}\right)$ — получаем окружность с уравнением $4v^2 + 4z^2 = u_0^2 - 1$ в плоскости $u = u_0$. «Размораживая» параметр u_0, получаем поверхность $4v^2 + 4z^2 = u^2 - 1$ (двуполостный гиперболоид). Остается вернуться к начальным координатам. Обратная замена имеет вид

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y), \\ v = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y), \end{cases}$$

а уравнение поверхности $3x^2 + 4xy + 4z^2 + 1 = 0$. ■

Упражнение 6. Напишите уравнения прямых, лежащих на поверхности однополостного гиперболоида $4z^2 + xy + 2xz - yz - 4x - 3y - 6 = 0$ и проходящих через точку $A(3,5,2)$.

Доказательство. Прямую запишем параметрически $(3 + at, 5 + bt, 2 + ct)$. Подставим эти координаты в уравнение гиперболоида

$$t^2(4c^2 + ab + 2ac - bc) + t(5a - 2b + 17c) = 0.$$

На поверхности должна лежать вся прямая, т.е. должны сократиться коээфициенты при t^2 и t. Получаем систему

$$\begin{cases} 5a - 2b + 17c = 0, \\ 4c^2 + ab + 2ac - bc = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (5a + 17c)/2, \\ -9c^2 + 16ac + 5a^2 = 0. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на c^2 и получим квадратное уравнение относительно дроби a/c. Находим корни и получаем $a = \dfrac{-8 \pm \sqrt{109}}{5} c$. Возвращаемся к системе и получаем две прямые

$$\begin{cases} x = 3 + \frac{\sqrt{109}-8}{5} t, \\ y = 5 + \frac{\sqrt{109}+9}{2} t, \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \text{и} \begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{109}+8}{5} t, \\ y = 5 + \frac{9-\sqrt{109}}{2} t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

■

Занятие 14

Афинные и изометрические преобразования.

Определение 1. Линейным преобразованием в $\mathbb{R}^2$ называется отображение $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где A — матрица размера 2×2. Афинное преобразование имеет вид $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, т.е. является композицией линейного преобразования и сдвига (прибавление постоянного вектора $\mathbf{b}$).

Аналогично задаются линейное и афинное преобразование в $\mathbb{R}^3$ (матрица A имеет размер 3×3).

Определение 2. Изометрическое преобразование — частный случай афинного, когда матрица A ортогональна, т.е. $A \cdot A^t = E$.

Упражнение 1. Докажите, что ортогональная замена координат в $\mathbb{R}^2$ — переход к новому ортонормированному реперу $O'e_1'e_2'$ — геометрически есть композиция либо двух преобразований (поворот относительно точки O, параллельный перенос), либо трех преобразований (отражение относительно оси Ox, поворот относительно точки O, параллельный перенос). При этом, наличие или отсутствие отражения в ряду преобразований определяется ориентацией: если базис $\{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}'\}$ имеет правую ориентацию, то симметрии нет, а если левую, то есть.

Доказательство. Любая ортогональная замена на плоскости имеет вид

$$\mathbf{x}' = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ортогональна, т.е. $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Тогда можно ввести углы α и β так, что $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \sin\beta$, $d = \cos\beta$. Кроме того, $ac + bd = \sin(\alpha + \beta) = 0$. Возможны два случая: $\beta = -\alpha$ или $\beta = \pi - \alpha$. Введем на плоскости полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В первом случае

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha x - \sin\alpha y + b_1 = r\cos(\varphi + \alpha) + b_1, \\ y' = \sin\alpha x + \cos\alpha y + b_2 = r\sin(\varphi + \alpha) + b_2. \end{cases}$$

Получили композицию двух преобразований — поворот относительно O на угол α и параллельный перенос на вектор $\mathbf{b}$. При этом ориентация сохраняется. Во втором случае

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha x + \sin\alpha y + b_1 = r\cos(\varphi - \alpha) + b_1, \\ y' = \sin\alpha x - \cos\alpha y + b_2 = -r\sin(\varphi - \alpha) + b_2. \end{cases}$$

Получили композицию трех преобразований — изменение знака координаты y (отражеие относительно оси Ox), поворот относительно O на угол $-\alpha$ и параллельный перенос на вектор $\mathbf{b}$. При первом преобразовании ориентация меняется на отрицательную, а далее сохраняется. ■

Можно показать, что для произвольной афинной замены к цепочке преобразований добавляются две гомотетии — растяжение/сжатие по оси Ox и растяжение/сжатие относительно оси Oy. В пространстве $\mathbb{R}^3$ ортогональную замену координат всегда можно свести к трем поворотам (относительно Ox, Oy и Oz), параллельному переносу и (возможно) отражению. Для произвольной афиной замены в $\mathbb{R}^3$ необходимо добавить еще три гомотетии по трем координатным осям.

Упражнение 2. Вначале на плоскости провели симметрию относительно прямой $2x + y = 1$. Затем провели симметрию относительно точки (2,1) (уже в новых координатах). Затем провели гомотетию с коэффициентом растяжения 2 и центром $(-1, -2)$. Найдите итоговое афинное преобразование плоскости.

Доказательство. Если сделать ортогональную замену координат

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y - 1), \\ v = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y), \end{cases}$$

то прямая получит уравнение $u = 0$. Симметричная точка к точке (u,v) относительно этой вертикальной оси есть точка $(u',v') = (-u,v)$. Делая обратную замену

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2u' - v') + \frac{2}{5}, \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(u' + 2v') + \frac{1}{5}, \end{cases}$$

получим

$$x' = \frac{-2u - v}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}, \quad y' = \frac{-u + 2v}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}.$$

Подставим сюда формулы для u и v и получим

$$x' = \frac{-3x - 4y + 4}{5}, \quad y' = \frac{-4x + 3y + 2}{5}.$$

Теперь надо провести симметрию относительно точки (2,1). Сделаем сдвиг $w' = x' - 2$, $z' = y' - 1$. Теперь надо отразить точку (w',z') относительно начала координат — получим точку $(w'',z'') = (-w', -z')$. Поскольку обратный сдвиг имеет вид $x'' = 2 + w''$, $y'' = 1 + z''$, то получаем отображение

$$x'' = 4 - x', \quad y'' = 2 - y'.$$

Третье отображение — гомотетия с центром $(-1, -2)$. Вновь сделаем сдвиг $p'' = x'' + 1$, $q'' = y'' + 2$. Теперь проведем растяжение относительно нового начала координат $p''' = 2p''$, $q''' = 2q''$ и проведем обратную замену $x''' = p''' - 1$, $y''' = q''' - 2$. Получили отображение

$$x''' = 2x'' + 1, \quad y''' = 2y'' + 2.$$

Остается составить композицию трех отображений. Имеем

$$x''' = 2x'' + 1 = 9 - 2x' = \frac{6x + 8y + 37}{5}, \quad y''' = 2y'' + 2 = 6 - 2y' = \frac{8x - 6y + 26}{5}.$$

■

Упражнение 3. Пространство симметрично отразили относительно прямой ℓ, проходящей через точку $(1,-1,3)$ и имеющую направляющий вектор $\overrightarrow{e} = (1,2,-2)$. Затем пространство сдвинули вдоль этой прямой на 1, затем растянули в 2 раза вдоль и в 3 раза перпендикулярно прямой. Напишите итоговое преобразование.

Доказательство. Шаг 1. Введем новую систему координат, в которой наши преобразования будут выглядеть наиболее просто. Зададим ее ортонормированным репером $Oe_1e_2e_3$, где $O = (0,0,0)$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e}/|\overrightarrow{e}| = \frac{1}{3}(1,2,-2)$, а $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ перпендикулярны $\overrightarrow{e}$. Если $(x,y,z) \perp \overrightarrow{e}$, то $x + 2y - 2z = 0$. Например, можно взять $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$. Теперь вектор $\overrightarrow{e_3}$ надо взять ортогональным и $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. Если $\overrightarrow{e_3} = (x,y,z)$, то

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0, \\ 2x + z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 5x = 0, \\ z = -2x. \end{cases}$$

Тогда $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, -5, -4)$. Итак, формулы перехода имеют вид

$$\begin{cases} x = \frac{u}{3} + \frac{2v}{\sqrt{5}} + \frac{2w}{3\sqrt{5}}, \\ y = \frac{2u}{3} + \quad - \frac{5w}{3\sqrt{5}}, \\ z = -\frac{2u}{3} + \frac{v}{\sqrt{5}} - \frac{4w}{3\sqrt{5}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3}, \\ v = \frac{2x}{\sqrt{5}} + \quad + \frac{z}{\sqrt{5}}, \\ w = \frac{2x}{3\sqrt{5}} - \frac{5y}{3\sqrt{5}} - \frac{4z}{3\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Шаг 2. Теперь проведем все преобразования в новой системе координат. Симметрия относительно прямой ℓ — оси Ou — выглядит так: $(u',v',w') = (u, -v, -w)$. Затем провели сдвиг, т.е. $(u'',v'',w'') = (u'+1,v',w')$, затем растяжения $(u''',v''',w''') = (2u'',3v'',3w'')$. Итого, $(u''',v''',w''') = (2u+2, -3v, -3w)$.
Шаг 3. С помощью формул перехода переведем эти преобразования в координаты (x,y,z). Получаем

$$\begin{cases} x''' = \frac{u'''}{3} + \frac{2v'''}{\sqrt{5}} + \frac{2w'''}{3\sqrt{5}}, \\ y''' = \frac{2u'''}{3} + \quad - \frac{5w'''}{3\sqrt{5}}, \\ z''' = -\frac{2u'''}{3} + \frac{v'''}{\sqrt{5}} - \frac{4w'''}{3\sqrt{5}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''' = \frac{2u}{3} - \frac{6v}{\sqrt{5}} - \frac{2w}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}, \\ y''' = \frac{4u}{3} + \quad + \frac{5w}{\sqrt{5}} + \frac{4}{3}, \\ z''' = -\frac{4u}{3} - \frac{3v}{\sqrt{5}} + \frac{4w}{\sqrt{5}} - \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -22 & 10 & -10 \\ 7 & -7 & -20 \\ -10 & -20 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

■

Точка $\mathbf{x} = (x,y,z)$ называется инвариантной точкой отображения A, если $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Упражнение 4. В $\mathbb{R}^3$ задано отображение

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдите все инвариантные точки, прямые и плоскости.

Доказательство. Начнем с инвариантных точек. Запишем систему

$$\begin{cases} x = -x + 6y + 3z, \\ y = -3x - 3y - 2z, \\ z = 3x + 4y + 3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6y + 3z = 0, \\ -3x - 4y - 2z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

Третье уравнение дублирует второе — отбросим его. Получим

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = -2y. \end{cases}$$

Итак, любая точка вида $(0,y, -2y)$, $y \in \mathbb{R}$, инвариантна. Кроме того, мы нашли инвариантную прямую.
Поищем другие инвариантные прямые. Если прямая инвариантна, то ее направляющий вектор после преобразования должен быть ей параллелен, т.е. преобразовываться как $\overrightarrow{e} \mapsto k\overrightarrow{e}$. Запишем систему

$$\begin{cases} kx = -x + 6y + 3z, \\ ky = -3x - 3y - 2z, \\ kz = 3x + 4y + 3z. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение в точности тогда, когда матрица системы имеет нулевой определитель. Имеем

$$\begin{vmatrix} -1-k & 6 & 3 \\ -3 & -3-k & -2 \\ 3 & 4 & 3-k \end{vmatrix} = -k^3 - k^2 - 8k + 10 = 0.$$

Один корень $k = 1$ мы уже знаем. Других вещественных корней нет, т.к. $k^3 + k^2 + 8k - 10 = (k-1)(k^2 + 2k + 10)$. Итак, других инвариантных прямых нет.
Поищем инвариантную плоскость. Пусть она задается уравнением $Ax + By + Cz + D$. Тогда после преобразования мы должны получить то же уравнение с точностью до ненулевого множителя, т.е. $k(Ax' + By' + Cz' + D) = 0$. Подставим сюда наше преобразование. Получим

$$x(-kA - 3kB + 3kC) + y(6kA - 3kB + 4kC) + z(3kA - 2kB + 3kC) + kD = 0.$$

Если $D = 0$, то получаем систему

$$\begin{cases} -kA - 3kB + 3kC = A, \\ 6kA - 3kB + 4kC = B, \\ 3kA - 2kB + 3kC = C, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-1 - 1/k) - 3B + 3C = 0, \\ 6A + B(-3 - 1/k) + 4C = 0, \\ 3A - 2B + C(3 - 1/k) = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение в точности тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю, т.е. обозначив $\lambda = 1/k$,

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 3 \\ 6 & -3-\lambda & 4 \\ 3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 10 = 0.$$

Единственным вещественым корнем является $\lambda = 1$. При подстановке этого значения, получим

$$\begin{cases} -2A - 3B + 3C = 0, \\ 6A - 4B + 4C = 0, \\ 3A - 2B + 2C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = C. \end{cases}$$

Мы нашли инвариантную плоскость $y + z = 0$. Остался еще случай $D \neq 0$. Тогда $k = 1$, а именно это число и подходит (вспомним, что $\lambda = 1 = 1/k$). Значит, любая плоскость вида $y + z + D = 0$, $D \in \mathbb{R}$, инвариантна.
Ответ: отображение оставляет на месте все точки вида $(0{,}y, -2y)$, где $y \in \mathbb{R}$ — любое число; эти точки составляют прямую, которая, таким образом, отображается в себя; других таких прямых нет; отображение переводит любую плоскость вида $y+z+D = 0$, $D \in \mathbb{R}$ в себя; других таких плоскостей нет. ■

Упражнение 5. Пространство повернули на угол $\alpha = \operatorname{arctg}(3/4)$ вокруг прямой $x = y = 2z$ (направление поворота — по часовой стрелке, если смотреть из точки $(0{,}0{,}0)$ в сторону точки $(2{,}2{,}1)$). Запишите полученное афинное отображение.

Доказательство. Перейдем к ортонормированному реперу $Oe_1e_2e_3$, где $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{3}(2{,}2{,}1)$ (направляющий вектор нашей прямой), $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{3}(-2{,}1{,}2)$, $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{3}(1, -2{,}2)$. Тогда при повороте вектор $\overrightarrow{e_1}$ не изменится а на плоскости Oe_2e_3 возникнет поворот на α против часовой стрелки, если смотреть с вершины вектора $\overrightarrow{e_1}$. Матрица такого преобразования равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Переход

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

нам известен. Обратный переход задается обратной матрицей

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Значит, матрица отображения в исходном базисе равна

$$TAT^{-1} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 40 & -5 & 20 \\ 13 & 40 & -16 \\ -16 & 20 & 37 \end{pmatrix}$$

■

Конкретные числа здесь не так важны. Важно то, что *матрица линейного отображения в разных системах координат различна. Если в одной системе она равна A, а другая система получается заменой с матрицей перехода T, то матрица отображения в новой системе координат равна TAT^{-1}.*

Упражнение 6. Запишите отображение, полученное в предыдущей задаче, в виде композиции трех вращений — вокруг оси Ox, затем вокруг оси Oy, затем вокруг оси Oz.

Доказательство. Вращение вокруг оси Ox задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Аналогично, вращения вокруг Oy и Oz имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая эти матрицы, получаем, что отображение равно

$$CBA = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\sin\beta = -16/45$, $\beta \approx -20{,}8^o$. Аналогично находим $\alpha \approx 28{,}4^o$, $\gamma \approx 18{,}0^o$. ■

Углы α, β и γ называют *углами Эйлера*.