Задачи к коллоквиуму

Задача 1. *Докажите, что отношение является отображением тогда и только тогда, когда в каждой строке матрицы отношения не более одной единицы. Докажите, что это отображение является сюръекцией, когда вдобавок в матрице нет нулевых столбцов. Дайте критерий инъективности отображения в терминах матрицы отношения.*

Задача 2. *Приведите пример такого отношения эквивалентности на множестве* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел, которое разбивает* $\mathbb{N}$ *на фактор–классы мощности 1, 2, 3, и т.д. (для любого натурального числа* n *есть ровно один класс мощности* n*).*

Задача 3. *Пусть* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *— многочлен. Скажем, что многочлен* P *делится нацело на многочлен* Q*, если найдется такой многочлен* R*, что* $P(x) = Q(x)R(x)$*. Например, многочлен* $x^3 + x^2 - x - 1$ *делится на* $x - 1$ *потому, что* $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x^2+2x+1)$*. Докажите, что отношение «*$Q \leq P$*, если* P *делится нацело на* Q*» является отношением порядка.*

Задача 4. *Докажите, что*

$$\frac{4^{n-1}}{e^n} < C_n^{n/2} < 2^n$$

при всех четных $n \geq 2$ *(формулу Стирлинга использовать нельзя).*

Задача 5. *Пусть* $a_1 = a_2 = 1$*, а далее* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ *для любого* $n \geq 2$ *(числа Фибоначи). По индукции докажите, что числа* a_{n+1} *и* a_n *взаимно просты (не имеют общих делителей, кроме единицы).*

Задача 6. *Пусть* $a_1 = a_2 = 1$*, а далее* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ *для любого* $n \geq 2$ *(числа Фибоначи). По индукции докажите, что*

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}, \qquad a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1.$$

Задача 7. *Пусть* $\Phi(n,k)$ *— число разбиений множества из* n *элементов на* k *непустых подмножеств. Докажите, что* $\Phi(n,2) = 2^{n-1} - 1$ *при всех* $n \geq 1$*.*

Задача 8. *Сложность функции* f *в системе* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *— это минимально возможное число операций из указанного списка, которые необходимо применить для реализации* f*. Например, сложность функции* $g(x,y) = \overline{x} \cdot \overline{y}$ *равна 2, т.к.* $g(x,y) = \overline{x \vee y}$ *(а меньшим числом операций точно нельзя обойтись — получатся только три функции системы). Найдите сложность функции* $f(x,y) = (x \Rightarrow y)$*.*

Задача 9. *Сложность функции* f *в системе* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *— это минимально возможное число операций из указанного списка, которые необходимо применить для реализации* f*. Например, сложность функции* $g(x,y) = \overline{x} \cdot \overline{y}$ *равна 2, т.к.* $g(x,y) = \overline{x \vee y}$ *(а меньшим числом операций точно нельзя обойтись — получатся только три функции системы). Найдите сложность функции* $f(x,y) = x \mid y$*.*

Задача 10. *Сложность функции* f *в системе* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *— это минимально возможное число операций из указанного списка, которые необходимо применить для реализации* f*. Например, сложность функции* $g(x,y) = \overline{x} \cdot \overline{y}$ *равна 2, т.к.* $g(x,y) = \overline{x \vee y}$ *(а меньшим числом операций точно нельзя обойтись — получатся только три функции системы). Докажите, что сложность функции* $f(x,y) = x \oplus y$ *равна четырем.*

Задача 11. *Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если при любой перестановке своих аргументов, ее значение не меняется. Докажите, что если f — симметрическая функция, не равная константе, то f не имеет фиктивных переменных.*

Задача 12. *Докажите, что если переменная x_i является существенной для функции f, то эта переменная является существенной и для двойственной функции f^*.*

Задача 13. *Докажите, что переменная x_i является существенной для функции f тогда и только тогда, когда x_i входит хотя бы в одно слагаемое полинома Жегалкина функции f.*

Задача 14. *Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если при любой перестановке своих аргументов, ее значение не меняется. Докажите, что класс симметрических функций не замкнут.*

Задача 15. *Пусть A — класс всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, равных 1 на наборе из нулей. Докажите, что класс A не замкнут.*

Задача 16. *Докажите, что если класс A замкнут, $A \neq \varnothing$ и $A \neq P_2$, то дополнение этого класса $P_2 \setminus A$ — незамкнутый класс.*

Задача 17. *Найдите $|L|$ (количество различных линейных функций от n переменных) и $|S|$ (количество различных самодвойственных функций от n элементов).*

Задача 18. *Докажите, что система $\{1,\ \wedge,\ \oplus\}$ — базис в P_2.*

Задача 19. *Докажите, что система $\{0,\ 1,\ \wedge,\ f\}$, где $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$, полна в P_2.*

Задача 20. *Докажите, что система $\{\oplus,\ 1\}$ —базис в классе L.*

Задача 21. *Докажите, что система $\{f,\ \neg\}$, где $f(x, y, z) = x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot \overline{z}$, не является минимальной.*

Указание: внимательно просмотреть задачи §2 главы II задачника Гаврилова, Сапоженко.

Задача 22. *Докажите, что базисом системы $\{f,\ \neg,\ g\}$, где $f(x, y, z) = x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot \overline{z}$, $g(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$, является одна функция f.*

Указание: внимательно просмотреть задачи §2 главы II задачника Гаврилова, Сапоженко.

Задача 23. *Докажите, что система $\{f\}$, где $f(x, y, z) = x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot \overline{z}$, является базисом в S.*

Указание: внимательно просмотреть задачи §2 главы II задачника Гаврилова, Сапоженко.

Задача 24. *Доказать, что система $\{f\}$, где $f(x, y, z) = xy \oplus z \oplus 1$, — базис в классе T_1.*

Задача 25. *Доказать, что система $\{0,\ 1,\ \wedge,\ \vee\}$ — базис в классе M монотонных функций.*

Указание: записать СДНФ функции $f \in M$ и заметить, что наряду с каждой конъюнкцией вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ СДНФ обязательно содержит все конъюнкции вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1 \geq \sigma_1,\ \alpha_2 \geq \sigma_2, \ldots,\ \alpha_n \geq \sigma_n$.

Задача 26. *Доказать, что если $f \in M$, то и $f^* \in M$.*

Задача 27. *Является ли полной система $\{\Rightarrow,\ \oplus\}$?*

Задача 28. *Из системы $\{0, \oplus, \Rightarrow\}$ выделить все возможные базисы.*