ЭКЗАМЕН по ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

21.07.2021

ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Вариант 1

Задача 1. *Дано матричное уравнение*

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

где X — неизвестная матрица.
а) Докажите, что уравнение имеет единственное решение.
б) Найдите матрицу X.

Ответ. $\begin{pmatrix} -3/2 & -7/4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Критерии проверки:
а) + есть доказательство существования и единственности решения или предъявлен явный алгоритм решения;
− все остальное.
б) + матрица найдена верно;
± арифметические ошибки при верном ходе решения;
− все остальное.

Задача 2. *Дискретная случайная величина X принимает значение $x_1 = 1$ с вероятностью p_1, значение $x_2 = 2$ с вероятностью p_2 и значение $x_3 = 5$ с вероятностью p_3. Известно, что математическое ожидание $E(X) = 2$, дисперсия $D(X) = 1,2$. Найдите p_1, p_2 и p_3.*

Ответ. $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,6$, $p_3 = 0,1$.

Критерии проверки:
+ верно найдены все три вероятности;
± верно составлена система из трех уравнений, но ответ неверный вследствие арифметических ошибок;
∓ система содержит только два верных уравнения, дальше решение, возможно, обрывается;
− все остальное.

Задача 3. *Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}.$$

а) Найдите общее решение соответствующего однородного уравнения.
б) Найдите общее решение неоднородного уравнения.
в) Найдите решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

Ответ. а) $e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$;
б) $e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + xe^{-x}$;
в) $e^{-x}(x - \sin x)$.

Критерии проверки:
а) + верно найдено общее решение однородного уравнения;
+. арифметические ошибки при нахождении общего решения однородного уравнения или есть ошибки при записи ответа через экспоненты с комплексным показателем (при этом через тригфункции ответ записан верно);
$\pm$ ошибка при нахождении корней характеристического уравнения, структура ответа верная;
$\mp$ корни характеристического уравнения найдены верно, ошибка в структуре решения;
$-$ все остальное.
б) + верно найдено общее решение неоднородного уравнения;
+. арифметические ошибки при нахождении частного решения неоднородного уравнения или в методе вариации постоянной;
$\pm$ ошибки при дифференцировании, структура частного решения верная;
$\mp$ ошибки в структуре частного решения;
$-$ все остальное.
в) + верно подставлены начальные условия в общее решение неоднородного уравнения, найденное в пункте б) (даже если оно было найдено с ошибкой);
+. арифметические ошибки при подстановке начальных условий;
$-$ все остальное.

Задача 4. *Докажите, что функции $x_1(t) = t$ и $x_2(t) = \cos(2 \arccos t)$ ортогональны в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, с введенным на нем скалярным произведением $(x, y) := \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.*

Критерии проверки:
+ доказательство верное, без пробелов;
+. есть ошибки при интегрировании, не влияющие на ответ;
$\pm$ есть утверждение о том, что интеграл должен быть равен нулю, но процесс интегрирования не завершен;
$\mp$ есть только утверждение о том, что интеграл должен быть равен нулю, больше ничего;
$-$ все остальное.

Задача 5. *Переменная x_i булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется* ***существенной****, если найдется такой набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j = 0$ либо $\alpha_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, что*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Найдите все существенные переменные функции

$$f(x, y, z) = ((\overline{x} \vee (y \wedge \overline{z})) \Rightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \vee z).$$

Ответ. x и z.

Критерии проверки:
+ верно указаны все существенные переменные, решение полностью обосновано;
+. верно указаны все существенные переменные, есть пробелы в обосновании;

$\pm$ есть ошибки в таблице истинности или при упрощении функции, вследствие чего ответ неверный;
$\mp$ есть продвижения (составлена часть таблицы истинности или полинома Жегалкина), но решение не завершено, ответ не получен;
$-$ все остальное.

Задача 6. *Дан двумерный массив, содержащий одинаковое количество строк и столбцов, элементами которого являются нули и единицы. Найдите длину (количество элементов) самого длинного отрезка (по горизонтали или вертикали), состоящего из идущих подряд единиц.*
Входные данные. *Вводится чило N — размер массива.*
Через пробел вводятся элементы каждой строки. После ввода каждой строки нажимается клавиша enter.
Выходные данные. *Одно число — длина отрезка.*
Пример. Входные данные. 5
0 0 **1** *1 0*
0 0 **1** *0 1*
1 0 **1** *0 1*
1 1 0 0 0
1 1 1 0 1
Выходные данные. 3.

Критерии проверки: за задачу выставлялись баллы с учетом тестирования программы, максимум 20.
19 – 20 — нетривиальное решение (не полный перебор);
15 – 18 — полный перебор без ошибок;
10 – 15 — полный перебор с ошибками;
5 – 10 — есть идея решения полным перебором, программа не работает или работает неправильно;
0 – 5 — есть попытки решения, программа не работает.
Перевод технических оценок в баллы в зависимости от задачи:
Задачи 1а, 1б, 3а, 3б, 3в:
$+$ 5 баллов;
$+.$ 4 балла;
$\pm$ 3 балла;
$\mp$ 1 балл;
$-$ 0 баллов.
Задачи 2, 4:
$+$ 10 баллов;
$+.$ 8 баллов;
$\pm$ 6 баллов;
$\mp$ 3 балла;
$-$ 0 баллов.
Задача 5:
$+$ 15 баллов;
$+.$ 12 баллов;
$\pm$ 9 баллов;
$\mp$ 5 баллов;
$-$ 0 баллов.
Итоговая оценка по формуле: сумма баллов за все задачи $+20$ *базовых баллов.*

ЭКЗАМЕН по ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

21.07.2021

ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Вариант 2

Задача 1. *Дано матричное уравнение*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

где X *— неизвестная матрица.*
а) Докажите, что уравнение имеет единственное решение.
б) Найдите матрицу X*.*

Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & 1/3 \\ 12 & 1/3 \end{pmatrix}$

Задача 2. *Дискретная случайная величина* X *принмает значение* $x_1 = -2$ *с вероятностью* p_1*, значение* $x_2 = 2$ *с вероятностью* p_2 *и значение* $x_3 = 8$ *с вероятностью* p_3*. Известно, что математическое ожидание* $E(X) = 1$*, дисперсия* $D(X) = 9$*. Найдите* p_1*,* p_2 *и* p_3*.*

Ответ. $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,1$.

Задача 3. *Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$y'' + 4y' + 5y = xe^{-2x}.$$

а) Найдите общее решение соответствующего однородного уравнения.
б) Найдите общее решение неоднородного уравнения.
в) Найдите решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$*,* $y'(0) = 1$*.*

Ответ. а) $e^{-2x}(\mathrm{C}_1 \sin x + C_2 \cos x)$;
б) $e^{-2x}(\mathrm{C}_1 \sin x + C_2 \cos x) + xe^{-2x}$;
в) xe^{-2x}.

Задача 4. *Докажите, что функции* $x_1(t) = \cos t$ *и* $x_2(t) = \sin(2 \arcsin t)$ *ортогональны в пространстве функций, непрерывных на отрезке* $[-1, 1]$*, с введенным на нем скалярным произведением* $(x, y) := \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$*.*

Задача 5. *Переменная* x_i *булевой функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется* ***существенной****, если найдется такой набор* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$*, где* $\alpha_j = 0$ *либо* $\alpha_j = 1$*,* $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$*, что*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Найдите все существенные переменные функции

$$f(x, y, z) = ((x \wedge (\overline{y} \vee z)) \Rightarrow ((x \vee z) \Rightarrow y)) \Rightarrow (y \vee z).$$

Ответ. x, y, z.

Задача 6. *Дан двумерный массив, содержащий одинаковое количество строк и столбцов, элементами которого являются нули и единицы. Найдите длину (количество элементов) самого длинного отрезка (по горизонтали или вертикали), состоящего из идущих подряд единиц.*
Входные данные. *Вводится чило* N *— размер массива.*
Через пробел вводятся элементы каждой строки. После ввода каждой строки нажимается клавиша enter.
Выходные данные. *Одно число — длина отрезка.*
Пример. Входные данные. 5
0 0 **1** *1 0*
0 0 **1** *0 1*
1 0 **1** *0 1*
1 1 0 0 0
1 1 1 0 1
Выходные данные. 3.