ЭКЗАМЕН по ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

24.07.2019

ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Вариант 1

Задача 1. *Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми*

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3x - 1 \qquad и \qquad y = x^2 - \frac{9x}{2} + 5.$$

Задача 2. *Найдите наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x,y,z) = 4x^2+3y^2+z^2$ *на множестве* $x^2+y^2+z^2 \le 5$.

Задача 3. *В* $\mathbb{R}^3$ *задано отображение*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдите
а) точку,
б) прямую,
в) плоскость,
которые под действием этого отображения переходят в себя.

Задача 4. *Три спутника движутся по круговой орбите радиуса* R *вокруг планеты. В данный момент времени каждый из спутников может находиться в любой точке орбиты с равной вероятностью, не зависящей от положения других спутников. Каждый из спутников* ***может связаться*** *с другим спутником, если длина кратчайшей дуги орбиты между ними не превосходит* $\frac{\pi R}{2}$. *Найдите вероятность того, что в данный момент времени каждый из трех спутников может связаться хотя бы с одним из двух других.*

Задача 5. *Функция* $y(x)$ *дифференцируема на луче* $[2, +\infty)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$(x^2-1)y' = x + 2y - 1.$$

Найдите $y(x)$, *если* $y(2) = 1$.

Задача 6. *Запишите булеву функцию* $f(x,y,z) = xy \oplus xz \oplus yz$ *в базисе* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *из отрицания, дизъюнкции и конъюнкции*
а) произвольным способом,
б) с наименьшей возможной сложностью.

Задача 7. *Функцию* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *необходимо приблизить на отрезке* $x \in [-2; 2]$ *с погрешностью не выше* $0,1$ *системой сплайнов первого порядка. Укажите точки разбиения и уравнения всех сплайнов. Обоснуйте свой ответ.*

Задача 8. *Вася готовится к олимпиаде. Уровень подготовки Васи измеряется одним целым положительным числом V. Начальное значение V задано. Учитель дал Васе N, $1 \le N \le 100\,000$, задач для тренировки. Для каждой из этих задач известно, каким уровнем подготовки нужно обладать для ее решения. А именно, пусть i — номер задачи, тогда нам известо целое положительное число a_i. Если $V < a_i$, то Вася не может в данный момент решить задачу i, а если $V \ge a_i$, то может. Кроме того, после решения i–ой задачи Васино умение V увеличивается на целое положительное число b_i (эти числа также заданы). Решать данные учителем задачи Вася может в произвольном порядке. Какое максимальное количество задач он сможет решить, если выберет самый лучший порядок их решения?*

Входные данные

Программа должна вначале ввести с клавиатуры два целых числа N, $1 \le N \le 100\,000$, — количество задач, и начальное значение V, $0 \le V \le 100$. Далее надо ввести с клавиатуры N пар целых чисел a_i, b_i, $1 \le a_i, b_i \le 100$ — соответственно, сколько умения нужно для решения i–ой задачи и сколько умения прибавится после ее решения.

Выходные данные

Выведите одно число — максимальное количество задач, которые Вася сможет решить.

Пример

Введены $N = 3$, $V = 5$, $a_1 = 7$, $b_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_2 = 2$, $a_3 = 10$, $b_3 = 3$. Программа выведет 2, так как Вася может вначале решить вторую задачу, что увеличит его умение до 7. Затем Вася может решить первую задачу, что увеличит его умение до 9. Третью задачу он решить не сможет.

Напишите требуемую программу на любом известном Вам языке программирования.

ЭКЗАМЕН по ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

24.07.2019

ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Вариант 2

Задача 1. *Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми*

$$y = -x^2 + \frac{5}{2}x - 4 \qquad \text{и} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 5.$$

Задача 2. *Найдите наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x, y, z) = x^2+2y^2+3z^2$ *на множестве* $x^2 + y^2 + z^2 \le 10$.

Задача 3. *В* $\mathbb{R}^3$ *задано отображение*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдите
а) точку,
б) прямую,
в) плоскость,
которые под действием этого отображения переходят в себя.

Задача 4. *Три спутника движутся по круговой орбите радиуса* r *вокруг планеты. В данный момент времени каждый из спутников может находиться в любой точке орбиты с равной вероятностью, не зависящей от положения других спутников. Каждый из спутников* ***не может связаться*** *с другим спутником, если длина кратчайшей дуги орбиты между ними больше, чем* $\frac{\pi r}{2}$. *Найдите вероятность того, что в данный момент времени есть хотя бы один спутник, который может связаться с двумя другими.*

Задача 5. *Функция* $y(x)$ *дифференцируема на луче* $[3, +\infty)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$(x^2 - 4)y' = 2x + 4y - 4.$$

Найдите $y(x)$, *если* $y(3) = 1$.

Задача 6. *Запишите булеву функцию* $f(x, y, z) = (x \vee y) \oplus (x \vee z) \oplus (y \vee z)$ *в базисе* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *из отрицания, дизъюнкции и конъюнкции*
а) произвольным способом,
б) с наименьшей возможной сложностью.

Задача 7. *Функцию* $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$ *необходимо приблизить на отрезке* $x \in [-2; 2]$ *с погрешностью не выше* $0,1$ *системой сплайнов первого порядка. Укажите точки разбиения и уравнения всех сплайнов. Обоснуйте свой ответ.*

Задача 8. *Тёма готовится к универсиаде. Уровень подготовки Тёмы измеряется одним целым положительным числом V. Начальное значение V задано. Научный руководитель посоветовал Тёме решить N, $1 \leq N \leq 100\,000$, задач для тренировки. Для каждой из этих задач известно, каким уровнем подготовки нужно обладать для ее решения. А именно, пусть i — номер задачи, тогда нам известо целое положительное число a_i. Если $V < a_i$, то Тёма не может в данный момент решить задачу i, а если $V \geq a_i$, то может. Кроме того, после решения i–ой задачи Тёмино умение V увеличивается на целое положительное число b_i (эти числа также заданы). Решать предложенные руководителем задачи Тёма может в произвольном порядке. Какое максимальное количество задач он сможет решить, если выберет самый лучший порядок их решения?*

Входные данные

Программа должна вначале ввести с клавиатуры два целых числа N, $1 \leq N \leq 100\,000$, —количество задач, и начальное значение V, $0 \leq V \leq 100$. Далее надо ввести с клавиатуры N пар целых чисел a_i, b_i, $1 \leq a_i, b_i \leq 100$ — соответственно, сколько умения нужно для решения i–ой задачи и сколько умения прибавится после ее решения.

Выходные данные

Выведите одно число — максимальное количество задач, которые Тёма сможет решить.

Пример

Введены $N = 3$, $V = 5$, $a_1 = 7$, $b_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_2 = 2$, $a_3 = 10$, $b_3 = 3$. Программа выведет 2, так как Тёма может вначале решить вторую задачу, что увеличит его умение до 7. Затем Тёма может решить первую задачу, что увеличит его умение до 9. Третью задачу он решить не сможет.

Напишите требуемую программу на любом известном Вам языке программирования.