

ЭКЗАМЕН по ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ и ИНФОРМАТИКЕ

28.06.2023

ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Вариант 1

Задача 1. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, если $x_n = \frac{2^n - 3^n}{2 \cdot 3^n}$.

Задача 2. Найдите производную функции

$$f(x, y, z) = 2x^3z + 4xy^2 - z^2y$$

в точке $M(1, 1, 1)$ по направлению, задаваемому нормалью к плоскости $9x - 6y - 2z + 1 = 0$.

Задача 3. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 21y, \\ \dot{y} = 2x - 14y, \end{cases}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$.

а) Найдите общее решение системы.

б) Найдите решение системы, удовлетворяющее условию $x(0) = 1$, $y(0) = 22$.

в) Выясните, является ли тождественно нулевое решение устойчивым по Ляпунову. Является ли оно асимптотически устойчивым? Обоснуйте свой ответ.

Задача 4. На приемник в течение часа поступили два сигнала от двух спутников (по одному от каждого). Найдите вероятность того, что между этими сигналами пройдет не более 20 минут, если моменты времени поступления сигналов распределены равномерно и независимо друг от друга.

Задача 5. В пространстве \mathbb{R}^3 даны два вектора: $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

а) Проверьте, что \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 ортогональны, и найдите векторы $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|}$ и $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|}$.

б) Найдите такой вектор \mathbf{e}_3 , что тройка $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ является правым ортонормированным базисом в \mathbb{R}^3 .

в) Координаты вершин тетраэдра $ABCD$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ равны: $A(-1, -1, -1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 1, 2)$, $D(6, 1, -1)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$.

Задача 6. Последовательность натуральных чисел вводится с клавиатуры, разделена пробелами и заканчивается нулем. Напишите программу, которая выводит все ее четные элементы в порядке убывания.

Входные данные:

N натуральных чисел, ноль

Выходные данные:

Последовательность натуральных чисел, разделенная пробелами, состоящая из четных чисел исходной последовательности в порядке убывания.

Пример:

Ввод: 12345670

Вывод: 642

Задача 7. Назовем последовательность, состоящую из символов 0, a, b, 1, *правильной*, если она удовлетворяет условиям:

- пустая последовательность является *правильной*;
- если последовательность A — *правильная*, то последовательности $0A1$, aAb — *правильные*;
- если A и B — *правильные* последовательности, то последовательность AB — *правильная*.

Напишите программу, которая проверяет, является ли введенная последовательность *правильной*.

Входные данные:

Последовательность из символов 0, 1, a, b, содержащая не более 100000 символов.

Выходные данные:

Если данная последовательность *правильная*, то программа должна вывести строку *yes*, иначе строку *no*.

Примеры:

Ввод: 01ab

Вывод: yes

Ввод: 01ba

Вывод: no