Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова»

Факультет космических исследований

Аннотация к курсовой работе

Численное решение обратной спектральной задачи с использованием методов машинного обучения

Выполнил студент 4 курса группы 401
Беляков Никита Викторович [1]

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук А.М.Савчук [2]

Москва 2022

[1]МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: MSUBelyakovNV@yandex.ru
[2]МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: artem_savchuk@mail.ru

Аннотация доклада

В настоящем докладе рассматривается операция Хилла

$$l[y] = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

с вещественным периодическим $(q(x) \equiv q(x+\pi))$ потенциалом $q(x) \in L_2[0,\pi]$.

Хорошо известно, что спектр этого оператора полуограничен снизу и имеет лакунарную структуру. Границы полос спектра определяются собственными значениями операторов

$$-y'' + q(x)y, \quad x \in (0,\pi) \tag{2}$$

с периодическими $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$ и антипериодическими $y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$ краевыми условиями.

Обозначим собственные значения периодической задачи $\Lambda^{Per} = \left\{\lambda_n^{Per}\right\}_{n\geqslant 1}$ и антипериодической задачи $\Lambda^{Aper} = \left\{\lambda_n^{Aper}\right\}_{n\geqslant 1}$ — они вещественны и перемежаются

$$\lambda_0^{Per} < \lambda_1^{Aper} \leqslant \lambda_2^{Aper} < \lambda_1^{Per} \leqslant \lambda_2^{Per} < \lambda_3^{Aper} \leqslant \lambda_4^{Aper} < \lambda_3^{Per} \leqslant \lambda_4^{Per} \ldots,$$

образуя отрезки непрерывного спектра и лакуны $l_{2n} = \left[\lambda_{2n-1}^{Per}, \lambda_{2n}^{Per}\right]$, $l_{2n-1} = \left[\lambda_{2n-1}^{Aper}, \lambda_{2n}^{Aper}\right]$, $n \geqslant 1$. Для них известны асимптотики

$$\lambda_{2n}^{Per} = (2n)^2 + \alpha + \kappa_{2n}, \quad \lambda_{2n-1}^{Per} = (2n)^2 + \alpha + \kappa_{2n-1}, n \to \infty, \quad \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)dt, \quad \{\kappa_n\} \in l_2.$$

Аналогично, $\lambda_{2n}^{Aper} = (2n-1)^2 + \alpha + \tilde{\kappa}_{2n}$, $\lambda_{2n-1}^{Aper} = (2n-1)^2 + \alpha + \tilde{\kappa}_{2n-1}$. Кроме этого известно, что по спектральным данным $\Lambda^{Aper}, \Lambda^{Per}$ можно однозначно восстановить функцию $q(x)$.

В настояще работе предлагается алгоритм численного решения этой обратной задачи в классе потенциалов вида

$$q(x) = acos(2x) + bcos(4x),$$

где a, b — положительные коэффициенты, с ограничением $(a + b \leqslant 60)$, по конечным наборам собственных значений $\Lambda_N^{Aper} = \left\{\lambda_n^{Aper}\right\}_{n=1}^N, \Lambda_N^{Per} = \left\{\lambda_n^{Per}\right\}_{n=1}^N$

Для коэффициентов в заданном диапазоне с равномерной сеткой разбиения сгенерирован набор из 50000 массивов спектральных данных первых 200 собственных значений периодической и антипериодической задач (т.е. $N = 100$). На данном наборе спектральных данных обучен и протестирован ансамбль нейросетей, представляющих собой многослойные полносвязные перцептроны. Для повышения точности предсказаний нейросетей, задача разбита на две последовательных: решение задачи мультиклассификации амплитуд коэффициентов потенциала $q(x)$ с последующей регрессией внутри класса амплитуд, после чего получается начальное приближения (a_0, b_0). Следующим шагом для более точного восстановления потенциала $q(x)$ является применение методов Ньютона–Гаусса и Левенберга–Марквардта и их модификаций с начальным приближением (a_0, b_0), полученным после результата предсказаний ранее обученного ансамбля нейросетей.