Факультет космических исследований

Аналитическая геометрия

Москва, 2019

Над книгой работали:
Бармин Максим Александрович,
Борисенко Дарья Владимировна,
Виннер Андрей Даниилович,
Катков Дмитрий Александрович,
Комаровский Александр Юрьевич,
Лаврухина Анастасия Дмитриевна,
Миронов Антон Сергеевич,
Нерубацкая Анастасия Ильинична,
Тарабрина Александра Кирилловна,
Филиппов Александр Алексеевич,
Шигин Глеб Сергеевич

Made by LaTeX

Это нулевое издание данной книги, здесь пока не так много полезного материала, но мы верим, что будущие поколения ФКИшников смогут дополнить это до полноценной книги, может, и мы найдем хорошие материалы...

Занятие 1

Векторы и декартовы координаты

Определение 1. *Координатами* называют числа, определяющие положение точки на плоскости $\mathbb{R}^2$ или в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или же в произвольном пространстве $\mathbb{R}^n$). Для удобства ограничимся $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Прямоугольные (*декартовы*) координаты точки на плоскости — снабжённые знаком *плюс* и *минус* расстояния от точки x до до двух взаимно перпендикулярных прямых Ox_1 и Ox_2 — *осей координат*, — точка пересечения которых считается началом координат. На рисунке (рис. 1.1) точка $x = \{x_1, x_2\}$ описывается двумя координатами x_1 и x_2. Горизонтальная x_1 — называется *абсциссой*, вертикальная x_2 — *ординатой*.

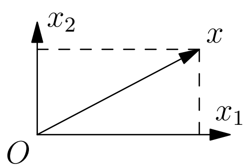


Рис. 1.1.

Систему декартовых координат в пространстве задают три взаимно перпендикулярные плоскости, относительно которых положение точки определяется тремя числами аналогично предыдущему, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Определение 2. Точку $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ также называют *вектором* либо *радиус–вектором*.

Определение 3. *Система координат* — объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

Упражнение 1. Даны точки $A(2,-3)$, $B(3{,}1)$ и $C(-1{,}5)$. Зная, что $ABCD$ — параллелограмм, найти координаты точки D.

Решение. Вектор $\overrightarrow{CD}$ равен вектору $\overrightarrow{BA}$ (вектору $\overrightarrow{AB}$ не равен!). Значит, если отложить вектор $\overrightarrow{BA}$ от точки C, то получим точку D. Чтобы найти координаты вектора, вычитаем координаты начала из координат конца

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты точки D, прибавляем координаты вектора $\overrightarrow{BA}$ к координатам точки C.
Ответ: $D = (-2{,}1)$. ■

Можно было считать другим способом: найти вектор $\overrightarrow{BC}$ и отложить его от точки A.

Упражнение 2. Даны точки $A(2,-3)$, $B(3{,}1)$ и $C(-1{,}5)$. Зная, что $ABCD$ — параллелограмм, найти координаты точки M — пересечения диагоналей AC и BD.

Решение. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересеченния пополам. Значит, необходимо отложить половину вектора $\overrightarrow{AC}$ от точки A

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $M = (1/2, 1)$. ■

Упражнение 3. Даны точки $A(2,-3)$, $B(3{,}1)$ и $C(-1{,}5)$. Найдите координаты точки E пересечения медиан треугольника ABC.

Решение. Сначала найдем координаты точки M — середины отрезка AB. Для этого просто возьмем полусумму координат концов отрезка

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\-1\end{pmatrix}.$$

Теперь вспомним, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит, надо разделить отрезок CM в отношении $2:1$, считая от точки C

$$E = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2{,}5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $E = (4/3, 1)$. ■

Вообще, если точка Z делит отрезок $[X,Y]$ в отношении $a:b$, считая от точки X, то

$$Z = X + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{XY} = X + \frac{a}{a+b}(Y - X) = \frac{b}{a+b}X + \frac{a}{a+b}Y.$$

Если про точку Z известно только то, что она лежит на отрезке $[X,Y]$, то числа a и b неизвестны. Тогда удобнее ввести параметр $t = \frac{a}{a+b} \in [0,1]$ и записать

$$Z = (1-t)X + tY.$$

При изменении параметра t от 0 к 1 точка Z «пробегает» отрезок $[X,Y]$ от точки X к точке Y.

Упражнение 4. Даны четыре точки $A(3,-1)$, $B(-1,6)$, $C(0,5)$ и $D(6,-8)$. Найдите координаты точки E пересечения отрезков AB и CD.

Решение. Точка E лежит на отрезке AB. Значит,

$$E = (1-t)A + tB = (1-t)\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-4t\\7t-1\end{pmatrix}$$

для некоторого $t \in [0,1]$. С другой стороны, точка E лежит на отрезке CD, т.е.

$$E = (1-s)C + sD = (1-s)\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6s\\5-13s\end{pmatrix}$$

для некоторого $s \in [0,1]$. Приравняем эти две записи точки E и получим систему уравнений

$$\begin{cases}3-4t = 6s\\7t-1 = 5-13s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4t+6s = 3\\7t+13s = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 0{,}3\\s = 0{,}3\end{cases}$$

Подставляя, например, значение t, найдем $E = (1{,}8,\ 1{,}1)$.
Ответ: $E = (1{,}8,\ 1{,}1)$. ■

Если разрешить параметру t в записи

$$Z = (1-t)X + tY$$

меняться на всей числовой оси, то точка Z «пробежит» всю прямую, проходящую через точки X и Y.

Упражнение 5. Даны точки $A(1,3,-1)$ и $B(-2,-4,1)$. Пересекает ли прямая AB ось Ox?

Решение. Пусть C — некоторая точка прямой AB. Тогда $C = (1-t)A + tB = (1-3t, 3-7t, -1+2t)$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Если потребовать дополнительно, что точка C лежит на оси Ox, то ее координаты по другим осям должны обратиться в ноль, т.е. $3-7t = -1+2t = 0$, что невозможно.
Ответ: Нет. ■

Можно заметить, что любая прямая (на плоскости или в пространстве) приобретает запись $(a_0 + at, b_0 + bt, c_0 + ct)$ с какими–то числами a_0, b_0, c_0, a, b, c и переменным параметром $t \in \mathbb{R}$.

Такое уравнение прямой называют *параметрическим*, а вектор (a,b,c) называют *направляющим вектором* этой прямой. Две прямые параллельны (или свопадают) в точности тогда, когда у них направляющие векторы коллинеарны.

Упражнение 6. Написать уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0$, проходящих через начало координат.

Решение. Прямая, проходящая через начало координат, имеет уравнение $y = kx$. Остается найти значение k. Будем искать общую точку прямой и окружности, т.е. подставим $y = kx$ в уравнение окружности. После упрощений получим уравнение на x

$$(1 + k^2)x^2 - (12 + 4k)x + 32 = 0.$$

Это уравнение может не иметь решений (прямая и окружность не пересекаются — нас этот случай не интересует), может иметь два решения (прямая является для окружности секущей — это нам тоже не подходит), а может иметь ровно одно решение (прямая касается окружности). Последний случай реализуется, если дискриминант квадратного уравнения равен нулю. Отсюда и находим k

$$(12 + 4k)^2 = 128(1 + k^2) \Leftrightarrow \; k = 1 \text{ или } k = -\frac{1}{7}.$$

Ответ: $y = x$ и $7y = -x$. ■

Занятие 2

Геометрическое место точек на плоскости и в пространстве

Определение 1. *Геометрическое место точек* — фигура, состоящая из всех точек пространства, обладающих определенным свойством, и не содержащая ни одной точки, не обладающей этим свойством.

Рассмотрим ГМТ на плоскости, обладающие простейшими и наиболее часто выражающимися свойствами:

1. ГМТ, отстоящих на данном расстоянии r от данной точки O, есть окружность с центром в точке O радиуса r.
2. ГМТ равноудаленных от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.
3. ГМТ равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через точку пересечения и делящих углы между данными прямыми пополам.
4. ГМТ, отстоящих на одинаковом расстоянии h от прямой, есть две прямые, параллельные этой прямой и находящиеся по разные стороны от нее на данном расстоянии h.
5. Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой m в данной на ней точке M, есть перпендикуляр к AB в точке M (кроме точки M).
6. Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней очке M, есть прямая, проходящая через точку M и центр данной окружности (кроме точек M и O).
7. ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, составляет две дуги окружностей, описанных на данном отрезке и вмещающих данный угол.
8. ГМТ, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в отношении $m : n$, есть окружность (называемая окружностью Аполлония).
9. Геометрическое место середин хорд, проведенных из одной точки окружности, есть окружность, построенная на отрезке, соединяющем данную точку с центром данной окружности, как на диаметре.
10. Геометрическое место вершин треугольников равновеликих данному и имеющих общее основание, составляет две прямые, параллельные основанию и проходящие через вершину данного треугольника и ему симметричного относительно прямой, содержащей основание.

Упражнение 1. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от точек $A(0{,}3)$ и $B(2,-1)$.

Решение. Пусть точка $C(x{,}y)$ равноудалена от A и B. Тогда

$$|AC| = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = |BC| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}.$$

Возводим в квадрат и упрощаем. Получаем равенство

$$x - 2y = -1.$$

Как и следовало ожидать, получилось уравнение прямой. Итак, геометрическое место точек, равноудаленных от A и B — это все точки $C(x{,}y)$, координаты которых связаны равенством $x - 2y = -1$.
Ответ: Прямая $x - 2y = -1$. ■

Упражнение 2. Найдите геометрическое место точек, которые в 2 раза ближе к точке $A(0{,}3)$, чем к точке $B(2,-1)$.

Решение. Пусть точка $C(x{,}y)$ в 2 раза ближе к точке A, чем к точке B. Тогда

$$|BC| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 2|AC| = 2\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = .$$

Возводим в квадрат и упрощаем. Получаем равенство

$$3x^2 + 4x + 3y^2 - 26y + 31 = 0.$$

Или, если выделить полные квадраты

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{80}{9}.$$

Получилась окружность.
Ответ: Окружность $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{80}{9}$. Пусть даны две точки A и B. Геометрическое место точек C, для которых сумма расстояний $|AC| + |BC|$ постоянна, называют *эллипсом.* При этом, если константа $|AC| + |BC|$ меньше, чем длина отрезка $|AB|$, то элллипс оказывается пустым. ■

Упражнение 3. Пусть $A = (0{,}3)$, а $B = (3{,}7)$. Найдите геометрическое место точек C, для которых $|AC| + |BC| = 5$.

Решение. Заметим, что $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. В треугольнике ABC сумма сторон $|AC| + |BC|$ не может равнятся третьей стороне. Значит, точка C лежит на прямой AB. Еще немного подумав, понимаем, что лежать она должна между точками A и B, т.е. искомое геометрическое место точек — отрезок $[A{,}B]$ (эллипся выродился в отрезок).
Можно решать «честно». Положим $C = (x{,}y)$. Тогда

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = 25.$$

Перенесем первый корень в правую часть, возведем в квадрат, упростим, еще раз возведем в квадрат, упростим и получим уравнение прямой AB. При этом условия на одинаковость знака правых и левых частей уравнения при возведения в квадрат, ограничат ответ до отрезка $[A{,}B]$. ■

Упражнение 4. Даны точки $A(1,-3)$, $B(4,-1)$ и $C(-1{,}3)$. Найдите геометрическое место точек X, для которых $|AX|^2 + |BX|^2 = |CX|^2$.

Решение. Пусть $X = (x{,}y)$. Тогда

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (x-4)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y+7)^2 = 68.$$

Значит, искомое геометрическое место точек — окружность. ■

Упражнение 5. Найти геометрическое место точек C, для которых длина отрезка $|AC|$, где $A = (-3{,}3)$, равна длине касательной, проведенной из точки C к окружности $x^2+y^2-6x-6y+14 = 0$.

Решение. Запишем уравнение окружности в виде $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$. Видим, что ее центр находится в точке $B(3{,}3)$, а радиус равен $r = 2$. Проведем секущую CB. Она пересечет окружность в каких–то точках M и N, причем $|CM| = |CB| - r$, а $|CN| = |CB| + r$. По теореме о длине касательной и секущей, квадрат длины касательной равен произведению $|CM| \cdot |CN| = |CB|^2 - r^2$. Тогда условие задачи имеет вид $|AC|^2 = |CB|^2 - r^2$. Положим $C = (x,y)$,

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 - 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: искомое место точек — прямая с уравнением $3x + 1 = 0$. ■

В последней задаче мы пришли к вопросу о точках C, для которых разность квадратов расстояний $|CB|^2 - |CA|^2$ постоянна. Геометрическое место точек, для которых постоянна разность $|CB| - |CA|$, называется *гиперболой*. Точнее, это условие описывает одну ветвь гиперболы. Вся гипербола — это геометрическое место точек C, для которых постоянна величина $||CB| - |CA||$. При этом точки A и B называют *фокусами* гиперболы.

Упражнение 6. Найдите фокусы гиперболы $y = 1/x$.

Решение. В силу симметрии относительно начала координат и симметрии относительно прямой $y = x$, фокусы должны иметь вид $A = (a,a)$ и $B = (-a,-a)$ для некоторого $a > 0$. Получаем уравнение гиперболы

$$\left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}\right| = c.$$

Переносим второй корень в правую часть и возводим в квадрат

$$\pm c\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = -2ax - 2ay - \frac{c^2}{2}.$$

Еще раз возводим в квадрат и упрощаем

$$c^2(x^2 + y^2) + 2a^2c^2 = 4a^2(x^2 + y^2) + 8a^2xy + \frac{c^4}{4}.$$

Для того, чтобы сократить слагаемые $x^2 + y^2$, положим $4a^2 = c^2$. Тогда уравнение примет вид $xy = \frac{a^2}{2}$, откуда $a = \sqrt{2}$.
Ответ: фокусы находятся в точках $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ и $B(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. ■

Занятие 3

Полярные, сферические и циллиндрические координаты

Упражнение 1. В полярных координатах даны точки $A(3,\pi/3)$ и $B(3\sqrt{3}/2,-\pi/6)$. Найдите полярные координаты точки C, полученной симметричным отражением точки A относительно точки B.

Решение. По определению цетральной симметрии $C = B + \overrightarrow{AB} = 2B - A$. Перейдем к декартовым координатам с помощью равенств

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда

$$A = \left(3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \qquad B = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{9}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Отсюда

$$C = \left(3, -3\sqrt{3}\right), \quad |C| = \sqrt{9+27} = 6, \quad \operatorname{tg}(\arg C) = -\frac{3\sqrt{3}}{3},$$

т.е. в полярных координатах $C = (6, -\pi/3)$. ■

Упражнение 2. Все точки плоскости повернули относительно начала координат на угол $-2\pi/3$, а затем сдвинули на вектор $(1,2)$. Найдите декартовы координаты образа точки A, если известны ее полярные координаты $A = (2,\pi/6)$.

Решение. Поворот удобно осуществлять в полярных координатах: после поворота получим точку $A' = (2,\pi/6-2\pi/3) = (2,-\pi/2)$. Сдвиг удобно вычислять в декартовых координатах. В этих координатах $A' = (2\cos(-\pi/2), 2\sin(-\pi/2)) = (0,-2)$. После сдвига получим $A'' = (0,-2)+(1,2) = (1,0)$ в декартовых координатах. ■

Упражнение 3. Написать уравнение прямой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, если в декартовых координатах эта прямая задана параметрически $\begin{cases} x = 1-2t, \\ y = 1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Решение. Выразим $t = 1-y$ и получим уравнение прямой $x = -1+2y$ в декартовых координатах. Теперь сделаем полярную замену и получим

$$r\cos\varphi = -1 + 2r\sin\varphi \;\Leftrightarrow\; r = \frac{1}{2\sin\varphi - \cos\varphi}.$$

Из условия положительности величины r выводим область определения этой функции $\varphi \in (\operatorname{arcctg} 2, \pi + \operatorname{arcctg} 2)$. ■

Упражнение 4. Какую кривую задает уравнение $r = \sin\varphi$ в полярных координатах?

Решение. Поскольку $r \geqslant 0$, то $\varphi \in [0,\pi]$. В верхней полуплоскости удобно переходить к декартовым координатам с помощью формул $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arcctg}(x/y)$. Но чтобы не вспоминать тригонометрическую формулу $\sin(\operatorname{arcctg} a) = ...$, домножим наше уравнение на r. Получим

$$r^2 = r\sin\varphi \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2 = y \;\Leftrightarrow x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Получилась окружность с центром в $(0,1/2)$ и радиусом $1/2$. ■

Упражнение 5. Запишите уравнение сферы $x^2+y^2+z^2 = 1$ в цилиндрических координатах.

Решение. По формулам перехода $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$, где $\varphi \in [-\pi,\pi)$, находим уравнение

$$r^2 + z^2 = 1.$$

■

Упражнение 6. Даны две точки $A = (1,0,\pi/4)$ и $B = (2,\pi, -\pi/4)$, заданные в сферической системе координат. Найдите сферические координаты середины отрезка $[A,B]$.

Решение. По формулам перехода $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\cos\theta, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$, где $\varphi \in [-\pi,\pi)$, $\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$, находим декартовы координаты точек $A = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ и $B = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$. Тогда середина отрезка имеет декартовы координаты $M = (-\sqrt{2}/4, 0, -\sqrt{2}/4)$. Найдем ее сферические координаты:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = y/x = 0, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = -1.$$

Тогда $\theta = -\pi/4$, а для φ имеем два варианта: $\varphi = -\pi$ или $\varphi = 0$. Поскольку знак координаты x совпадает со знаком $\cos\varphi$, то $\cos\varphi < 0$, т.е. $\varphi = -\pi$. Итак, в сферических координатах $M = (1/2, -\pi, -\pi/4)$. ■

Занятие 4

Линейные и афинные системы координат

Упражнение 1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{a} = (2{,}3)$ в линейном базисе $\overrightarrow{e_1} = (1{,}1)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2{,}1)$ (исходные координаты — стандартные декартовы).

Решение. Необходимо получить разложение $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ (числа x и y и есть искомые координаты в заданном базисе). Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2 = x - 2y, \\ 3 = x + y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2y, \\ 3 = 2 + 2y + y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

■

Упражнение 2. При каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\overrightarrow{e_1} = (\lambda{,}1{,}-1)$, $\overrightarrow{e_2} = (0{,}\lambda{,}2)$, $\overrightarrow{e_3} = (1{,}0{,}\lambda)$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$? (исходные координаты — стандартные декартовы).

Решение. Система является базисом, если произвольный вектор $\overrightarrow{a} = (x{,}y{,}z)$ можно единственным образом разложить в линейную комбинацию $\overrightarrow{a} = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + c_3\overrightarrow{e_3}$. Для получения такого разложения необходимо решить систему

$$\begin{cases} \lambda c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 = x, \\ c_1 + \lambda c_2 + 0 \cdot c_3 = y, \\ -c_1 + 2c_2 + \lambda c_3 = z. \end{cases}$$

Система линейных уравнение размера 3×3 имеет единственное решение для любой правой части тогда и только тогда, когда отличен от нуля ее определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

(см. доказательство этого утверждения в курсе алгебры). Приравняем этот определитель к нулю и получим уравнение

$$\lambda^3 + 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Ответ: система $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ является базисом в $\mathbb{R}^3$ при всех λ, кроме $\lambda = -1$. ■

Очевидно, что базис $\overrightarrow{e_1} = (1{,}0{,}0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0{,}1{,}0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0{,}0{,}1)$ задает классические декартовы координатами. По аналогии с классическим случаем, прямые, выходящие из начала координат с направляющими векторами $\overrightarrow{e_j}$, называют координатными осями. Для произвольного вектора $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ вектор $x\overrightarrow{e_1}$ называют проекцией $\overrightarrow{a}$ на первую координатную ось и т.д. Вектор $x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ называют проекцией на координатную плоскость Oe_1e_2 и т.д.

Упражнение 3. Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{a} = (1,3,-1)$ на координатную плоскость Oe_2e_3 в базисе $\overrightarrow{e_1} = (2,1,-1)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,2,2)$, $\overrightarrow{e_3} = (1,0,2)$.

Решение. Разложим вектор $\overrightarrow{a}$ по этому базису

$$\begin{cases} 2x + z = 1, \\ x + 2y = 3, \\ -x + 2y + 2z = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x, \\ y = 3/2 - x/2, \\ -x + 3 - x + 2 - 4x = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1, \\ y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Тогда искомая проекция равна

$$y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка: если все было найдено верно, то разность между исходным вектором и его проекцией должна быть коллинеарна вектору $\overrightarrow{e_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = xe_1, \quad \text{где } x = 1.$$

■

Для линейных координат началом отсчета всегда является точка $O = (0,0,0)$. Если мы хотим поместить начало отсчета в точку $O = (x_0,y_0,z_0)$, то к линейным комбинациям добавляется вектор сдвига (x_0,y_0,z_0).

Упражнение 4. Афинная система координат в $\mathbb{R}^2$ задана точкой отсчета $O = (2,1)$ и базисом $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (-1,1)$ (координаты всех этих векторов взяты в обычной декартовой системе). В **новой** системе координат Oe_1e_2 даны две точки $A = (1,2)$ и $B(4,-2)$. Найдите длину отрезка AB.

Решение. Пересчитаем точки A и B в стандартных декартовых координатах.

$$A = O + 1 \cdot \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$B = O + 4\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|AB| = \sqrt{(8-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{65}.$$

Обратите внимание, что формула для расстояния между точками в системе координат Oe_1e_2 не работает: $|AB| \neq \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = 5$. Это означает, что при линейных и афинных заменах координат метрические размеры (длины отрезков, площади, объемы и т.д.) могут меняться! ■

Упражнение 5. В условиях предыдущей задачи найдите координаты середины отрезка $[A,B]$ в системе координат Oe_1e_2.

Решение. Пересчитаем точки A и B в стандартных координатах $A = (1,3)$, $B = (8,-1)$. Тогда середина отрезка имеет координаты $C = \frac{A+B}{2} = (9/2,\ 1)$. Переведем этот вектор в новую систему координат. Запишем разложение $C = O + x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ и найдем числа x и y

$$\begin{cases} x - y = 5/2, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Итак, координаты середины отрезка в системе Oe_1e_2 равны $C = (5/2,0)$. Обратите внимание, что тот же ответ можно было получить гораздо проще. Не переходя к декартовым координатам и обратно,

$$C = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Все линейные соотношения между векторами сохраняются при переходе из одной афинной системы координат в другую. ■

Двух векторов в $\mathbb{R}^3$, конечно, не достаточно для того, чтобы ввести новые линейные координаты. Покажем, что афинная система координат $O'e_1e_2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ порождает плоскость.

Упражнение 6. Пусть $O=(0,0,0)$ — начало координат, O' — произвольная точка, а $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ — два произвольных не коллинеарных вектора в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{OD}$ можно представить в виде

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OO'}+c_1\overrightarrow{e_1}+c_2\overrightarrow{e_2}$$

тогда и только тогда, когда точка D лежит в плоскости, порождаемой парой пересекающихся прямых $O'B$ и $O'C$, где $B=O'+\overrightarrow{e_1}$, $C=O'+\overrightarrow{e_2}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OO'}+c_1\overrightarrow{e_1}+c_2\overrightarrow{e_2}$ для некоторых c_1 и c_2. Обозначим $B'=O'+c_1\overrightarrow{e_1}$ и $C'=O'+c_2\overrightarrow{e_2}$. Точка B' лежит на прямой $O'B$, а точка C' — на прямой $O'C$. Обозначим плоскость, порожденную этими прямыми, через π. Точка $M=O'+\frac{c_1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{c_2}{2}\overrightarrow{e_2}$ — середина отрезка $[B',C']$ лежит в π. Но тогда в π лежит и точка D, поскольку

$$D=O'+c_1\overrightarrow{e_1}+c_2\overrightarrow{e_2}=O'+2\overrightarrow{AM},$$

т.е. D лежит на прямой $O'M$.
Обратно. Пусть точки O', B, C и D лежат в одной плоскости. Тогда прямые $O'D$ и BC либо пересекаются, либо параллельны. В первом случае отметим точку M их пересечения. Имеем $D=(1-t)O'+tM$ для некоторого $t\in\mathbb{R}$. С другой стороны, $M=(1-s)B+sC$ для некоторого $s\in\mathbb{R}$. Подставляя, получим

$$D=(1-t)O'+t(1-s)B+tsC=O'+t(1-s)\overrightarrow{e_1}+ts\overrightarrow{e_2}.$$

Во втором случае $\overrightarrow{O'D}=k\overrightarrow{BC}$, откуда

$$D=A+\overrightarrow{O'D}=O'+k\overrightarrow{BC}=O'+kB-kC=O'+k(O'+\overrightarrow{e_1})-k(O'+\overrightarrow{e_2})=O'+k\overrightarrow{e_1}-k\overrightarrow{e_2}.$$

■

Занятие 5

Скалярное произведение

Упражнение 1. Векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b} = (1{,}3)$ перпендикулярны. Найдите $\overrightarrow{a}$, если $|\overrightarrow{a}| = 2$.

Решение.
$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow (a{,}b) = 0.$$

Пусть $\overrightarrow{a} = (x{,}y)$. Тогда $x + 3y = 0$, т.е. вектор $\overrightarrow{a}$ коллинеарен вектору $(3,-1)$. Остается только умножить этот вектор на подходящий коэффициент. Поскольку $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{10}$, то

$$4 = x^2 + y^2 = 9y^2 + y^2,$$

т.е. либо $\overrightarrow{a} = \left(-\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$, либо $\overrightarrow{a} = \left(\frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$. ■

Заметьте, что в качестве перпендикуляра к заданному вектору $(x{,}y)$ всегда можно взять вектор $(y,-x)$.

Упражнение 2. Известно, что $A = (-1{,}1)$, $B = (1,-3)$, $|AC| = |BC| = \sqrt{10}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение. **Первый способ.** Вначале найдем координанты точки C. Она равноудалена от A и B, а значит лежит на серединном перпендикуляре отрезка $[A{,}B]$. Найдем середину отрезка $M = (0,-1)$, найдем вектор $\overrightarrow{AB} = (2,-4)$, найдем перпендикуляр к нему $\overrightarrow{a} = (4{,}2)$. Умножим его на неизвестный пока коэффициент и отложим от точки M

$$C = M + k\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4k \\ -1+2k \end{pmatrix}.$$

Найдем длину отрезка AC

$$10 = |AC|^2 = (4k+1)^2 + (-2+2k)^2 \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}.$$

Итак, либо $C = (2{,}0)$, либо $C = (-2,-2)$. В первом случае $\overrightarrow{AC} = (3,-1)$, $\overrightarrow{BC} = (1{,}3)$, $(\overrightarrow{AC}{,}\overrightarrow{BC}) = 0$. Во втором случае $\overrightarrow{AC} = (-1,-3)$, $\overrightarrow{BC} = (-3{,}1)$, $(\overrightarrow{AC}{,}\overrightarrow{BC}) = 0$. В любом случае, ответ 0.
Второй способ. Найдем длину $|AB| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$. По теореме косинусов в треугольнике ABC

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos\gamma,$$

где γ — угол между сторонами AC и BC. Подставляя сюда данные задачи, видим, что $\gamma = \pi/2$. Тогда

$$(\overrightarrow{AC}{,}\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}{,}\overrightarrow{BC}) = |AC| \cdot |BC|\cos\gamma = 0.$$

■

Упражнение 3. Найдите точку H пересечения высот треугольника с вершинами $A(1,2,-1)$, $B(-2,2,3)$, $C(0,-2,5)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$, $\overrightarrow{BC}=(2,-4,2)$ и $\overrightarrow{AC}=(-1,-4,6)$. Пусть AK — высота треугольника. Вектор $\overrightarrow{AK}$ лежит в плоскости, порождаемой векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, значит он является линейной комбинацией этих векторов

$$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3x-y\\-4y\\4x+6y\end{pmatrix}.$$

Кроме того, этот вектор перпендикулярен $\overrightarrow{BC}$, т.е.

$$2(-3x-y)+16y+2(4x+6y)=0\Leftrightarrow x=-13y,\quad \overrightarrow{AK}=\begin{pmatrix}38y\\-4y\\-46y\end{pmatrix}.$$

Величину y искать не будем — все равно $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AK}$ с неизвестным k. Тогда $H=A+k\overrightarrow{AK}=(1+19t,2-2t,-1-23t)$, где $t=2ky$. Остается учесть, что $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ (третья высота автоматически пройдем через точку H). Итак,

$$\overrightarrow{BH}=\begin{pmatrix}3+19t\\-2t\\-4-23t\end{pmatrix},\quad (\overrightarrow{BH},\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow -3-19t+8t-24-138t=0\Leftrightarrow t=-\frac{27}{149}.$$

Ответ $H=\frac{4}{149}(-91,88,118)$. ■

Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана плоскость π и точка A, не лежащая в этой плоскости. Точка B этой плоскости, для которой расстояние $|AB|$ минимально, называется *ортогональной проекцией* точки A на плоскость π. Такая точка существует и единственна.

Упражнение 4. Докажите, что если B —ортогональная проекция точки A на плоскость π, то вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен π.

Решение. Нам надо доказать, что прямая AB перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости π и проходящей через точку B, т.е. что $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ для любой точки $C\in\pi$, $C\neq B$. Возьмем произвольную точку D на прямой BC. Тогда $D=B+t\overrightarrow{BC}$ для некоторого $t\in\mathbb{R}$. Найдем расстояние

$$|AD|^2=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD})=|AB|^2+2t(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+t^2|BC|^2.$$

Обозначим $a=|BC|^2>0$, $b=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$, $c=|AB|^2>0$. Выделим полный квадрат

$$|AD|^2=a\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$$

и вспомним, что $|AD|\geqslant|AB|$, т.е. $a\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}\geqslant c$ при всех t. Взяв $t=-\frac{b}{a}$, придем к неравенству $-\frac{b^2}{a}\geqslant 0$, что возможно только при $b=0$. ■

Упражнение 5. Пусть плоскость π порождена точкой $O'=(1,0,1)$ и векторами $\overrightarrow{e_1}=(0,1,1)$ и $\overrightarrow{e_2}=(1,1,0)$ (см. задачу 4). Для точки $A=(0,0,1)$ найдите ортопроекцию A на π, расстояние от A до π и угол между вектором $\overrightarrow{O'A}$ и плоскостью π.

Решение. Мы уже знаем, что для поиска проекции полезно найти вектор $\overrightarrow{n}$, перпендикулярный плоскости π (его называют *нормалью* к плокости). По теореме о трех перпендикулярах, достаточно потребовать перпендикулярности $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{e_2}$. Пусть $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$, тогда

$$\begin{cases}(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_1})=0,\\(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_2})=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=0,\\x+y=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-y,\\x=-y,\end{cases}$$

т.е. $\overrightarrow{n} = (-y,y,-y)$. Отложим этот вектор от точки A и подберем y так, чтобы точка $B = A + \overrightarrow{n}$ попала в плокость π — эта точка и будет искомой ортопроекцией. Согласно задаче 4, $B \in \pi$ в точности тогда, когда

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO'} + c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2}.$$

В координатах это равенство выглядит так

$$\begin{cases} -y = 1 + c_2, \\ y = c_1 + c_2, \\ -y = 1 + c_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -1 - y, \\ c_1 = -1 - y, \\ y = -2 - 2y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2/3, \\ c_1 = -1/3, \\ c_2 = -1/3. \end{cases}$$

Мы нашли ортопроекцию $B = A + \overrightarrow{n} = (2/3,-2/3,5/3)$. Расстояние от A до π — это длина отрезка $|AB| = |\overrightarrow{n}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Треугольник ABO' прямоугольный. Значит угол между вектором $\overrightarrow{O'A}$ и плоскостью π, равный углу между $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$ (обозначим его γ), можно найти так

$$\sin\gamma = \frac{|AB|}{|AO'|} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

■

Упражнение 6. Найдите направляющий вектор биссектрисы угла ABC в треугольнике $A = (1,0,1)$, $B = (1,1,1)$, $C = (-1,-1,0)$.

Решение. **Первый способ.** Найдем $\overrightarrow{BA} = (0,-1,0)$, $\overrightarrow{BC} = (-2,-2,-1)$. Обозначим неизвестный вектор $\overrightarrow{a} = (x,y,z)$. Пусть α — угол между $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{a}$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{a})}{|BA|\cdot|\overrightarrow{a}|}.$$

Аналогично

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{a})}{|BC|\cdot|\overrightarrow{a}|}.$$

Приравняем эти дроби и получим

$$-y = \frac{-2x - 2y - z}{3} \Leftrightarrow 2x - y + z = 0.$$

Теперь вспомним еще, что биссектриса должна лежать в плоскости ABC, т.е. $\overrightarrow{a} = c_1\overrightarrow{BA} + c_2\overrightarrow{BC}$. Тогда

$$\begin{cases} x = -2c_2, \\ y = -c_1 - 2c_2, \\ z = -c_2. \end{cases}$$

Подставим эти равенства в уравнение $2x - y + z = 0$ и получим $c_1 = 3c_2$. Про длину направляющего вектора в условии ничего не сказано. Значит, можем выбрать оставшееся неизвестное c_2 произвольно. Пусть $c_2 = 1$. Тогда $c_1 = 3$, $x = -2$, $y = -5$, $z = -1$. Искомый вектор $\overrightarrow{a} = (-2,-5,-1)$.

Второй способ. Вспомним про свойство биссектрисы треугольника делить противоположную сторону на отрезки, пропорциональные боковым сторонам. Найдем длины боковых сторон $|BA| = 1$, $|BC| = 3$. Значит, необходимо разделить отрезок $[A,C]$ в отношении $1:3$ считая от вершины A. Согласно задаче 1,

$$M = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}C = \frac{1}{4}(2,-1,3).$$

Значит, искомый вектор $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}(-2,-5,-1)$. С точностью до коэффициента, получили тот же ответ, что и в первом решении. ■

Занятие 6

Векторное и смешанное произведение, ориентация

Упражнение 1. Найдите площадь треугольника ABC, если $A = (1{,}3)$, $B = (-2, -1)$ и $C = (4, -3)$.

Решение. Допишем третью координату (равную нулю для каждой точки). Найдем векторы $\overrightarrow{BA} = (3{,}4{,}0)$ и $\overrightarrow{BC} = (6, -2{,}0)$. Теперь найдем векторное произведение

$$[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -30\mathbf{k}.$$

Значит, искомая площадь равна 15. ■

Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — два неколлинеарных вектора на плоскости. Отложим два этих вектора от точки O — получим два угла на плоскости (один из них меньше развернутого, другой больше). Если для прохождения меньшего угла от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ надо двигаться против часовой стрелки, то базис $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ называется *правым*, а если двигать надо по часовой стрелке, то *левым*.

Упражнение 2. Пусть векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ в $\mathbb{R}^2$ образуют правый базис. Какой базис тогда образуют векторы $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{f_2} = -2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$?

Решение. Для определения вида базиса можно использвать знак ориентированной площади параллелограмма (если площадь положительна, то базис правый, а если отрицательна, то левый). Найдем векторное произведение

$$[\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}] = [\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, -2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}] = -3[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] - 2[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}] = -[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}].$$

Произведение $[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] = \alpha\mathbf{k}$, где $\alpha > 0$ по условию. Значит, $[\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}] = -\alpha\mathbf{k}$, т.е. базис $\{\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}\}$ левый. ■

Легко видеть, что задачу можно обобщить — поставить произвольные коэффициенты в линейной замене

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$[\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}] = [a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2}, a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}] = a_{11}a_{22}[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] + a_{12}a_{21}[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}] = \det A \cdot [\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}].$$

Таким образом, все определяется знаком определителя матрицы замены.

Упражнение 3. Найдите объем пирамиды $ABCDS$, если известно, что $ABCD$ — параллелограмм, и $A = (-1, -1{,}0)$, $B = (0{,}1{,}1)$, $C = (1, -1{,}0)$, $S = (1{,}1{,}2)$.

Решение. Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{ABCD}h$ (h — длина высоты из S на плоскость $ABCD$), что в три раза меньше объема параллелепипеда, построенной на векторах $\overrightarrow{BA} = (-1, -2, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (1, -2, -1)$ и $\overrightarrow{BS} = (1,0,1)$. Последний объем найдем через смешанное произведение

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Ответ: 4/3. ■

Пусть векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Отложим все три вектора от точки O и посмотрим на плоскость векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ с вершины вектора $\overrightarrow{e_3}$. Если мы увидим на плоскости правый базис, то и базис $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ называется правым, а если увидим левый базис, то и базис $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ называется левым.

Упражнение 4. Найти ориентированный угол от вектора $\overrightarrow{a} = (1,3,1)$ до вектора $\overrightarrow{b} = (-2,-1,2)$ с точки зрения $\overrightarrow{c} = (0,0,1)$.

Решение. Пусть φ — искомый угол. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{-3}{3\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Осталось понять направление вращения от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ в их общей плоскости с точки зрения $\overrightarrow{c}$, т.е. надо определить вид базиса $\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}$. Для этого посмотрим на знак их смешанного произведения (знак «плюс» соответствует правому базису, а знак «минус» — левому). Имеем

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

Значит базис правый, вращение идет против часовой стрелки, а значит $\varphi = \arccos(-1/\sqrt{11})$. ■

Так же, как в задаче 6, можно проверить, что при линейных заменах базиса в $\mathbb{R}^3$ ориентация сохраняется или меняется в зависимости от знака определителя матрицы замены.

Упражнение 5. Пусть $\overrightarrow{e_1} = (1,1,2)$, а $\overrightarrow{e_2} = (1,1,-1)$. Найдите третий базисный вектор $\overrightarrow{e_3}$ длины $\sqrt{3}$, если известно, что он образует угол $\pi/4$ с вектором $\overrightarrow{e_1}$, вектор $\overrightarrow{e_2}$ ортогонален плоскости векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_3}$, а базис $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ правый.

Решение. Пусть $\overrightarrow{e_3} = (x,y,z)$. Тогда векторное произведение

$$[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}] = (z-2y, 2x-z, y-x)$$

коллинеарно $\overrightarrow{e_2}$, т.е. $z-2y = 2x-z = -(y-x)$. Отсюда $x+y-z=0$. Далее,

$$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3})}{|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_3}|} = \frac{x+y+2z}{\sqrt{18}}.$$

Тогда $x+y+2z=3$. Соединяя два полученных уравнения, получаем $z=1$, $y=1-x$. Наконец,

$$|\overrightarrow{e_3}|^2 = 3 = x^2 + (1-x)^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Находим векторное произведение

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & 1-x & 1 \end{vmatrix} = 1+2-2x-x-2x+1-x-1 = 3-6x > 0.$$

Отсюда $x = 1-\sqrt{2}$, т.е. искомый вектор $\overrightarrow{e_3} = (1-\sqrt{2},\sqrt{2},1)$. ■

Пусть $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ — базис в $\mathbb{R}^3$. Базис $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ называется *биортогональным* для базиса $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, если

$$(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{f_j}) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Упражнение 6. Проверьте, что формулы $\overrightarrow{f_1} = \dfrac{[\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}]}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$, $\overrightarrow{f_2} = \dfrac{[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}]}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$, $\overrightarrow{f_3} = \dfrac{[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}]}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$ задают биортогональный базис.

Решение. По свойствам векторного произведения $\overrightarrow{f_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{f_1} \perp \overrightarrow{e_3}$. По свойству смешанного произведения

$$(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{e_1}) = \frac{([\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}], \overrightarrow{e_1})}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})} = \frac{(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})}{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})} = 1.$$

Для двух других векторов рассуждения аналогичны. ■

Занятие 7

Прямые на плоскости

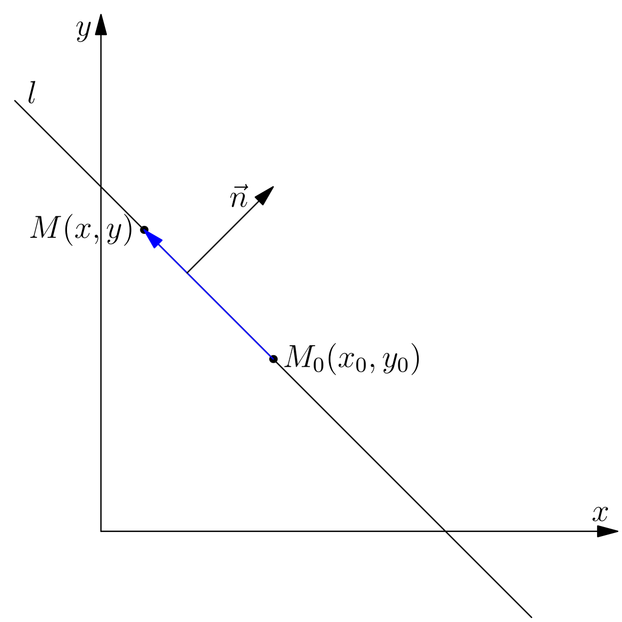
§ 7.1 Составление уравнения на прямой по различным способам ее задания

7.1.1 Общее уравнение прямой на плоскости

Определение 1. Ненулевой вектор $\overrightarrow{n}$, перпендикулярный заданной прямой, называется *нормальным вектором* (нормалью) для этой прямой.

Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через точку $M_0\,(x_0, y_0)$. Пусть вектор $\overrightarrow{n}(a, b)$ — нормаль к прямой ℓ. Точка $M(x, y)$ принадлежит заданной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$, то есть скалярное произведение данных векторов равно нулю:

$$(\mathbf{M_0M}, \overrightarrow{n}) = 0$$



Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\mathbf{M_0M}\,(x - x_0, y - y_0)$ и $\overrightarrow{n}(a, b)$:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Полученное уравнение задаёт прямую, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\overrightarrow{n}$. Раскроем в этом уравнении скобки и обозначим выражение $-a \cdot x_0 - b \cdot y_0$ буквой c.

Получим *общее уравнение прямой на плоскости*:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \tag{7.1}$$

7.1.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Угол α определяется углом наклона прямой к оси OX. Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой; его обычно обозначают буквой k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

Уравнение $y = k \cdot x + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*; k — угловой коэффициент, b — величина отрезка, который отсекает прямая на оси OY, считая от начала координат.

Если прямая задана общим уравнением

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$$

то её угловой коэффициент определяется по формуле

$$k = -\frac{A}{B}$$

Уравнение $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ является уравнением прямой, которая имеет угловой коэффициент k и проходит через точку $M_0\,(x_0, y)$.

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2$$

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Иначе говоря, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

7.1.3 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1), \tag{7.2}$$

где k - угловой коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2\,(x_2, y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению: $y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1)$. Отсюда находим $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение (7.2), получим *уравнение прямой, проходящей через точки* M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки $M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$ параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

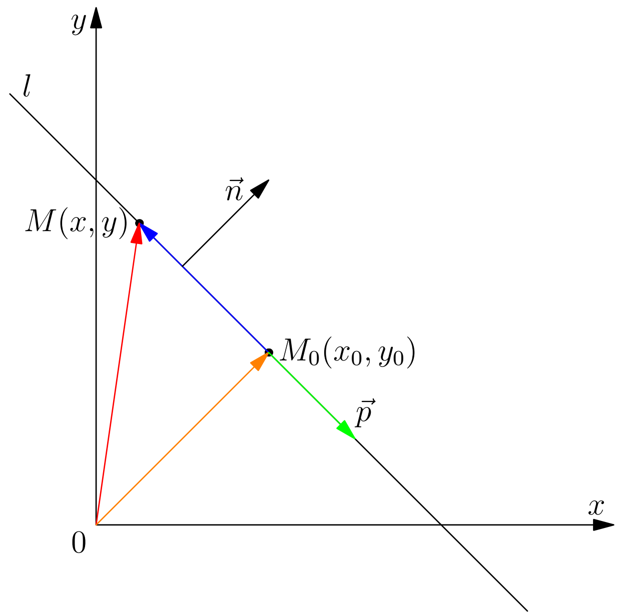
Если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

7.1.4 Параметрическое уравнение прямой

Сформулируем следующую задачу: пусть на координатной плоскости задана точка $M_0\,(x_0, y_0)$ и ненулевой вектор $\overrightarrow{p}\,(a, b)$. Необходимо составить уравнение прямой ℓ, проходящей через точку M_0 и коллинеарной $\overrightarrow{p}$.

Определение 2. Любой ненулевой вектор $\overrightarrow{p}$, параллельный прямой ℓ называется ее *направляющим вектором*.

Выберем на прямой ℓ произвольную точку $M(x, y)$. Заметим, что точка M принадлежит прямой ℓ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{M_0M}$ и $\overrightarrow{p}$ коллинеарны.



Запишем условие коллинеарности: $\mathbf{M_0M} = t \cdot \overrightarrow{p}$, где $t \in \mathbb{R}$ - параметр. С другой стороны, вектор $\mathbf{M_0M}$ можно выразить при помощи радиус-векторов $\mathbf{OM}$ и $\mathbf{OM_0}$: $\mathbf{M_0M} = \mathbf{OM} - \mathbf{OM_0}$. Получаем *векторное параметрическое уравнение прямой*:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM_0} + t \cdot \overrightarrow{p}$$

Или, переписывая в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases} \tag{7.3}$$

7.1.5 Каноническое уравнение прямой

Если из каждого уравнения системы (7.3) выразить параметр t, а затем исключить этот параметр:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = t, a^2 + b^2 \neq 0,$$

получим *каноническое уравнение прямой*, в котором a и b соответственно — координаты направляющего вектора прямой.

7.1.6 Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой (7.1) $a, b, c \neq 0$, то перенесем свободный член c в правую часть уравнения и разделим обе части на $-c$: $-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1$. Обозначим $x_1 = -\frac{c}{a}$, $y_1 = -\frac{c}{b}$ и получим *уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

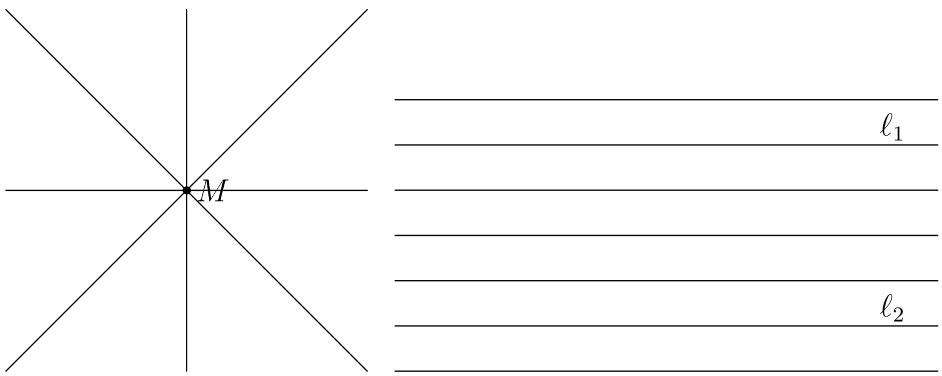
Абсолютные величины x_1 и y_1 равны отрезкам, отсекаемых прямой на осях OX и OY. Действительно, точки $(x_1, 0)$ и $(0, y_1)$ принадлежат прямой ℓ и расположены на осях координат.

Пример 1. Здесь будет пример

§ 7.2 Пучки прямых

Определение 3. *Собственным пучком прямых* на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через фиксированную точку (центр пучка).

Определение 4. *Несобственным пучком прямых* называется совокупность прямых, параллельных фиксированной прямой.



Любые две прямые ℓ_1 и ℓ_2 однозначно задают пучок, содержащий данные прямые. Соответственно, если данные прямые пересекаются, то точка их пересечения является центром пучка. Если прямые не пересекаются, то они задают несобственный пучок параллельных прямых.

Пусть заданы уравнения двух прямых: $\ell_1 : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и $\ell_2 : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$.

Определение 5. *Линейной комбинацией* уравнений прямых ℓ_1 и ℓ_2 называется уравнение:

$$\lambda_1 \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1) + \lambda_2 \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0, \tag{7.4}$$

где числа λ_1 и λ_2 — коэффициенты линейной комбинации.

При любых допустимых значениях параметров λ_1 и λ_2 уравнение (7.4) задает прямую, принадлежащую пучку, и наоборот, для любой прямой из пучка найдутся такие значения λ_1 и λ_2, что данное уравнение будет задавать эту прямую.

7.2.1 Взаимное положение прямых на плоскости

1. Если прямые пересекаются и заданы общим уравнением:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0; \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0, \end{aligned}$$

   то угол между ними можно найти по формуле:

$$\varphi = \frac{A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

2. Если прямые пересекаются и заданы уравнением с угловым коэффициентом:

$$\begin{aligned} y = k_1 \cdot x + b_1; \\ y = k_2 \cdot x + b_2, \end{aligned}$$

   то угол между ними можно найти по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

3. Расстояние d от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ вычисляется по формуле:

$$\frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Упражнение 1. Прямая задана своим параметрическим уравнением $l = (1+2t, 2-5t)$, $t \in \mathbb{R}$. Напишите общее уравнение этой прямой, ее каноническое уравнение и уравнение в отрезках. Найдите направляющий вектор и нормаль.

Решение. По условию, $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 5t$. Отсюда сразу видно каноническое уравнение $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-5}$. Вернемся к условию, умножим равенство $x = 1 + 2t$ на 5, равенство $y = 2 - 5t$ на 2 и сложим: $5x + 2y = 9$. Тогда общее уравнение прямой (одно из) имеет вид $5x + 2y - 9 = 0$, а уравнение в отрезках $\dfrac{x}{1{,}8} + \dfrac{y}{4{,}5} = 1$. Направляющий вектор (один из) виден непосредственно из условия $\overrightarrow{l} = (2, -5)$, а нормаль — перпендикулярный ему вектор $\overrightarrow{n} = (5, 2)$. ■

Упражнение 2. Верно ли, что прямая AB, где $A = (1,3)$, $B = (-2,1)$ и прямая CD, где $C = (-6/7, -3/7)$, $D = (12/7, 9/7)$ параллельны? Верно ли, что прямые AB и BC перпендикулярны?

Решение. Чтобы провести прямую, проходящую через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), пользуемся равенством

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тогда уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{1-3} \Leftrightarrow\ -2x + 2 = -3y + 9\ \Leftrightarrow 2x - 3y + 7 = 0.$$

Вектор нормали к этой прямой равен $(2, -3)$, тогда направляющий вектор $(3,2)$. Для прямой CD получаем

$$\frac{x + 6/7}{12/7 + 6/7} = \frac{y + 3/7}{9/7 + 3/7} \Leftrightarrow\ \frac{7x+6}{18} = \frac{7y+3}{12}\ \Leftrightarrow\ 14x - 21y + 3 = 0.$$

Вектор нормали к этой прямой равен $(14, -21)$, а направляющий вектор $(21,14)$. Видим, что он коллинеарен вектору $(3,2)$, т.е. прямые параллельны. Наконец, для прямой BC имеем уравнение

$$\frac{x+2}{-6/7+2} = \frac{y-1}{-3/7-1} \Leftrightarrow\ 5x + 4y + 6 = 0.$$

Вектор нормали равен $(5,4)$, он не коллинеарен направляющему вектору $(3,2)$ прямой AB, т.е. прямые AB и BC не перпендикулярны. ■

Вообще можно заметить, что две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ параллельны (или совпадают), если матрица $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ имеет ранг 1. При этом прямые совпадают, если матрица $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ также имеет ранг 1. Если же ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ равен 2 (тогда и вторая матрица имеет ранг 2 — почему?), то прямые пересекаются.

Три прямые на плоскости могут расположиться большим числом способов:

1) все три прямые совпадают;
2) две прямые совпадают, а третья им параллельна;
3) две прямые совпадают, а третья их пересекает;
4) все три прямые параллельны;
5) две прямые параллельны, а третья их пересекает;
6) все три прямые различны и пересекаются в одной точке;
7) прямые образуют треугольник.

В случаях 4) и 6) говорят, что прямые образуют *пучок*, причем в случае 6) он называется *собственным*, а в случае 4) *несобственным*.

Упражнение 3. К какому из семи случаев относится расположение прямых $l_1:\ x-2y+5=0$, $l_2:\ \frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=-\frac{1}{4}$ и $l_3:\ x=1+t,\ y=3-t$?

Решение. Запишем общие уравнения прямых: $l_1:\ x-2y+5=0$, $l_2:\ 2x-y+1=0$, $l_3:\ x+y-4=0$. Имеем

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2,$$

т.е. l_1 и l_2 различны и пересекаются. Далее,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2,$$

т.е. l_1 и l_3 тоже различны и пересекаются. Далее,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2,$$

т.е. l_2 и l_3 опять же различны и пересекаются. Наконец,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}=2,$$

т.е. существует точка, удовлетворяющая всем трем уравнениям.
Ответ: случай 6). ■

Упражнение 4. Опишите совместное расположение на плоскости треугольника ABC, $A(1{,}7)$, $B(-2{,}3)$, $C(0,-4)$ и прямой $l:\ 2x-5y+7=0$.

Решение. Подставим в уравнение прямой координаты каждой точки

$$A:\ 2-35+7<0,\qquad B:\ -4-15+7<0,\qquad C:\ 0+20+7>0.$$

Значит, точки A и B лежат по одну сторону от прямой, а точка C — по другую сторону. Вывод: прямая l пересекает стороны BC и AC треугольника, а сторону AB не пересекаает. Остается выяснить, пересекает ли l продолжение этой стороны за точку A, продолжение этой стороны за точку B или вообще не пересекает прямую AB. Для этого напишем параметрическое уравнение прямой AB, взяв за начальную точку A. Направляющим вектором сделаем $\overrightarrow{AB}$, так чтобы при увеличении параметра t точка двигалась по прямой от A к B:

$$\begin{cases}x=1-3t,\\ y=7-4t.\end{cases}$$

Попробуем найти точку пересечения прямых AB и l

$$\begin{cases}x=1-3t,\\ y=7-4t,\\ 2x-5y+7=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}2-6t-35+20t+7=0,\\ x=1-3t,\\ y=7-4t,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{13}{7},\\ x=-\frac{32}{7},\\ y=-\frac{3}{7}.\end{cases}$$

Точка пересечения есть и находится за точкой B, т.к. $t=13/7>1$. Ответ: прямая l пересекает стороны BC и AC треугольника и продолжение стороны AB за точку B. ■

Упражнение 5. Среди всех касательных к окружности $c:\ x^2+y^2-4x+12y+11=0$ найдите ту, которая наиболее удалена от точки $A(-2{,}4)$. Найдите расстояние от точки A до этой прямой и ортопроекцию точки A на эту прямую.

Решение. **Шаг 1:** найдем точку B на окружности c, для которой расстояние $|AB|$ максимально. Запишем уравнение окружности в виде $(x-2)^2+(y+6)^2=29$. Обозначим $O'=(2,-6)$ — центр окружности, $R=\sqrt{29}$ ее радиус и φ — угол между векторами $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$. По теореме косинусов

$$|AB|^2=|O'A|^2+|O'B|^2-2|O'A||O'B|\cos\varphi=116+29-2\sqrt{116}\cdot\sqrt{29}\cos\varphi.$$

Это выражение максимально при $\varphi = \pi$, т.е. точка B должна лежать на продолжении отрезка AO' за точку O'. Параметризуем прямую AO' с помощью точки A и вектора $\overrightarrow{AO'}$

$$\begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t. \end{cases}$$

Добавим к этим равенствам уравнение окружности и решим полученную систему

$$\begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t, \\ (x-2)^2 + (y+6)^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t, \\ 116t^2 - 232t + 87 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 4 - 10t, \\ t = 1/2 \text{ или } t = 3/2. \end{cases}$$

Поскольку $t \in [0,1]$ соответствует точкам отрезка $[A,O']$, то выбираем корень $t = 3/2$, откуда $B = (4,-11)$.

Шаг 2: докажем, что касательная l, проходящая через точку B — искомая.

Раз l — касательная в точке B, то $l \perp O'B$. Но $\overrightarrow{O'B}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$, т.е. $l \perp \overrightarrow{AB}$. Это означает, что B и есть ортопроекция точки A на прямую l. Тогда $\rho(A,l) = |AB|$. Если же мы проведем касательную m в какой–либо другой точке C окружности, то $\rho(A,m) \leqslant |AC|$ (расстояние от точки A до прямой m — это длина перпендикуляра, опущенного из A на m, а отрезок AC может не оказаться таким перпендикуляром, так что написанное неравенство — это условие «в прямоугольном треугольника длина гипотенузы больше длины катета»). С другой стороны, $|AC| < |AB|$ (ведь точка B — самая далекая от A точка окружности). А еще, $\rho(A,l) = |AB|$, так что $\rho(A,m) \leqslant |AC| < |AB| = \rho(A,l)$, т.е. среди всех касательных, именно l наиболее удалена от A.

Шаг 3: найдем уравнение l.

Вектор $\overrightarrow{AB} = (6,-15)$ является для l нормалью, а значит l можно задать уравнением $6x - 15y + C = 0$. Число C подберем так, чтобы прямая прошла через точку $B = (4,-11)$, т.е. $24 + 165 + C = 0$, $C = -189$. Сокращаяя на 3, получаем $l: \ 2x - 5y - 63 = 0$.

Ответ: прямая имеет вид $l: \ 2x - 5y - 63 = 0$, ортопроекцией A на l является точка $B = (4,-11)$, а расстояние равно $\rho(A,l) = |AB| = 3\sqrt{29}$. Проверка: по формуле для расстояния от точки (x_0,y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$,

$$\rho(A,l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4-20-63|}{\sqrt{4+25}} = \frac{87}{\sqrt{29}} = 3\sqrt{29}.$$

■

Упражнение 6. На плоскости даны две прямые: ℓ_1, проходящая через точки $(-1,2)$ и $(2,3)$, и $\ell_2: \ 3x + y + 1 = 0$. Найдите уравнение прямой ℓ_3, которая проходит через точку $(0,2)$ так, что ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 образуют равнобедренный треугольник.

Решение. Сначала запишем общее уравнение прямой ℓ_1

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow \ x - 3y + 7 = 0.$$

Теперь найдем угол между ℓ_1 и ℓ_2

$$\varphi = \arccos \frac{|3-3|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\pi}{2},$$

т.е. $\ell_1 \perp \ell_2$. Двух прямых углов в треугольнике быть не может, т.е. равные углы образуются при пересечении $\ell_1 \cap \ell_3$ и $\ell_2 \cap \ell_3$. Пусть (A,B) — вектор нормали к прямой ℓ_3. Тогда

$$\frac{|A-3B|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3A+B|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow \ |A-3B| = |3A+B|.$$

Возможны два случая: $A = -2B$ или $B = 2A$. В первом случае положим $B = 1$, $A = -2$, а коэффициент C найдем из условия $(0,2) \in \ell_3$, откуда $C = -2$. Во втором случае $A = 1$, $B = 2$,

$C = -4$. Итак, либо $\ell_3: \ -2x + y - 2 = 0$, либо $\ell_3: \ x + 2y - 4 = 0$. Остается проверить, что в обоих случаях тройка прямых образует треугольник (а не пучок прямых, другие случаи невозможны, т.к. параллельных и совпадающих прямых среди ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 нет — почему?). Имеем

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3, \qquad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 3,$$

т.е. оба случая идут в ответ. ■