Факультет космических исследований

Алгебра

Москва, 2020

Над книгой работали:
Костин А.А.,
Мальцева А.В.,
Моисеева А.И.,
Осипова Л.Г.,
Прошкин М.А.,
Рабцевич М.А.,
Саакян М.Н.,
Сабаев Д.Д.,
Столяров О.Р.,
Тарасова Н.С.

Made by LaTeX

Под общей редакцией И. В. Садовничей

Содержание

Лекция 1
Матрицы и действия над ними

Определение 1. *Матрица – прямоугольная таблица чисел. Матрицы принято обозначать заглавными латинскими буквами.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{— \textit{матрица размера}} \quad m \times n \quad (m \quad \textit{строк,} \quad n \quad \textit{столбцов}).$$

Кратко пишут: $A = (a_{ij}), \quad m \times n, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$

1 Виды матриц

- Квадратные: $m = n$.
- Прямоугольные: $m \neq n$.
- Вектор–строка: $m = 1$.
- Вектор–столбец: $n = 1$.

Выделяют следующие частные виды матриц:

• Единичные матрицы — квадратные матрицы, у которых на главной диагонали (так называют элементы a_{ii} матрицы) стоят единицы, а все остальные элементы нули.

• Нулевые — все элементы равны нулю.

• Диагональные — квадратные матрицы, у которых все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.

• Верхнетреугольные — квадратные матрицы, у которых все элементы под главной диагональю равны нулю.

• Нижнетреугольные — догадайтесь сами!

Есть еще огромное колличество матриц специфического вида — ступенчатые, симметрические, блочно–диагональные, обратимые, вырожденные, положительные, отрицательные, ортогональные, унитарные, нормальные, эрмитовы, жордановы, якобиевые, теплицевы, ..., но об этом потом.

2 Операции с матрицами

- *Сложение матриц.* Матрицы складываются поэлементно (сложение определено только для матриц одного размера). Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Тогда

  $$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

  Пример.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

  Операция сложения матриц обладает свойством коммутативности: $A + B = B + A$ и ассоциативности: $A + (B + C) = (A + B) + C$. Это сразу следует из определения и соответствующих свойств вещественных чисел.

- *Умножение матрицы на число.*

  $$\text{Пусть} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{тогда по определению} \quad \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Из определения сразу следует, что $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность), $\mu(\lambda A) = (\mu\lambda)A$ (ассоциативность).

- *Произведение матриц.* Можно перемножать матрицы A и B, если A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times k$ (т.е. количество столбцов матрицы A должно совпадать с количеством строк матрицы B). По определению

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

— матрица $m \times k$, где

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Почему умножение матриц разумно определять именно так, станет ясно чуть позже.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц можно описать следующим образом. Договоримся вначале, что произведение строки длины n на столбец высоты n (перемножаем мы их именно в таком порядке: левый множитель — строка, правый множитель — столбец) есть сумма попарных произведений их элементов. Теперь мысленно представим матрицу A как набор из m строк, а матрицу B как набор из k столбцов. Матрицу $C = AB$ размера $m \times k$ составим из элементов c_{ij} — произведений i–ой строки матрицы A на j–ый столбец матрицы B.

Операция умножения матриц обладает свойством ассоциативности: $A(BC) = (AB)C$ (следует из определения).

Говорят, что матрицы A и B *коммутируют (являются перестановочными)*, если:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Заметим, что не любые матрицы являются перестановочными. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Видно, что данные матрицы не являются перестановочными. Значит, свойством коммутативности операция умножения матриц не обладает.

Сложение и умножение связаны свойством дистрибутивности: $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$. Проверьте это самостоятельно, опираясь на определения.

- *Транспонирование матриц.* При транспонировании меняются ролями строки и столбцы.

$$\text{Если} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$\text{Пусть} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Преобразования строк и столбцов матрицы

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей данной системы.* Мы можем производить над уравнениями следующие действия:

- умножать какое–либо уравнение на ненулевое число,
- менять уравнения местами,
- складывать уравнения.

Чуть позже мы докажем, что такие действия являются эквивалентными переходами. Этим переходам соответствуют элементарные преобразования строк матрицы системы.

Определение 2. *Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования следующего вида*

- *Умножение строки на число, отличное от нуля:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

- *Транспозиция двух строк:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

- *Сложение одной строки с другой:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Матрицы элементарных преобразований — это матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что каждое элементарное преобразование строк некоторой матрицы может быть представлено в виде произведения одной из матриц элементарных преобразования и данной:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \quad - \quad \text{транспозиция строк,}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} \quad - \quad \text{умножение строки на ненулевое число,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \quad - \quad \text{сложение двух строк.}$$

Мы разобрали сейчас простейший случай матриц размера 2×2. В общем случае, когда A имеет размер $m \times n$, матрицы элементарных преобразований (они здесь размера $m \times m$) следующие.
Матрица, умножающая i–ую строку на λ, есть единичная матрица, у которой i–ый элемент диагонали заменили на λ.
Матрица, переставляющая i–ую и j–ую строки, есть единичная матрица, у который i–ую и j–ую единички диагонали заменили нулями, а единички записали по адресам[1] $(i,\, j)$ и $(j,\, i)$.
Матрица, складывающая i–ую и j–ую строки, есть единичная матрица, у который по адресу $(i,\, j)$ нолик заменили единицей.

На практике удобно третье преобразование расширить: буем к одной строке прибавлять другую, умноженную на произвольный множитель λ. Матрица этого преобразования есть единичная матрица, у который по адресу $(i,\, j)$ нолик заменили на λ. Легко видеть, что такое преобразование есть просто последовательность трех преобразований: умножили i–ую строку на λ, прибавили результат к j–ой строке, i–ую строку обратно поделили на λ (деление на любое ненулевое число также является элементарным преобразованием, поскольку деление на число $\lambda \neq 0$ — это умножение на число $1/\lambda$)

Аналогично можно определить элементарные преобразования столбцов матрицы, а также матрицы элементарных преобразований столбцов. Заметим, что после транспонирования матрицы элементарные преобразования над ее строками становятся элеметнарными преобразованиями над столбцами.

4 Метод Гаусса

Метод Гаусса применяется для решения систем линейных уравнений. Метод состоит в последовательных преобразованиях матрицы системы. При этом используются три элементарных преобразования: транспозиция строк, умножение строки на ненулевой коэффициент, сложение двух строк. Для удобства дальнейшего решения системы эти преобразования проводят с расширенной матрицей системы.

Определение 3. *Расширенной матрицей системы* (1) *называется матрица вида*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

включающая в себя правые части уравнений системы.

[1] При индексации элемента матрицы всегда вначале пишут номер строки, а затем номер столбца.

Пример. Пусть дана система
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$
Матрица этой системы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Расширенная матрица: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

Цель наших преобразований — привести матрицу к ступенчатому виду.

Определение 4. *Назовем ведущим элементом ненулевой строки матрицы ее первый отличный от нуля элемент. Матрица называется ступенчатой, если выполнены два условия:*
1) номера ведущих элементов ее ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность;
2) нулевые строки, если они есть, стоят внизу.

Пример. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ступенчатая, а $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ — нет. У A ведущие элементы стоят по адресам (1, 1), (2, 3) и (3, 4), последовательность $\{1, 3, 4\}$ возрастает. У B ведущие элементы строк имеют индексы (1, 1), (2, 3) и (3, 3), последовательность $\{1, 3, 3\}$ возрастающей не является.

Теорема 1. *Всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду элементарными преобразованиями ее строк.*

Доказательство. Если данная матрица A нулевая, то она уже ступенчатая. Пусть A — ненулевая матрица. Тогда существует номер j такой, что все столбцы с номерами 1, ... $j-1$ являются нулевыми, а столбец с номером j —нет (возможно, $j = 1$, то есть первый столбец уже является ненулевым). Переставим строки так, чтобы элемент $a_{1j} \neq 0$. После этого к каждой строке, начиная со второй, прибавим первую строку, умноженную на подходящее число, с таким расчетом, чтобы все элементы j—го столбца, кроме a_{1j}, стали равны нулю.

Получим матрицу вида
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$
Обозначим через A_1 матрицу, стоящую в правом нижнем углу: $A_1 = \begin{pmatrix} a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и применим к ней рассуждения, аналогичные приведенным выше. И так далее, за конечное число шагов придем к ступенчатой матрице. □

Теорема 2 (равносильность систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях). *Система линейных уравнений, полученная из данной с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы системы, эквивалентна исходной.*

Доказательство. Достаточно показать, что система, полученная из данной каким-либо элементарным преобразованием, эквивалентна исходной. Рассмотрим все три типа элементарных преобразований.
1) Транспозиция строк соответствует перестановке местами двух уравнений. Очевидно, что это не меняет множества решений системы.
2) Умножение строки на ненулевое число соответствует умножению обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число. Уравнение, полученное при этом, эквивалентно исходному, следовательно, и множество решений системы не изменится.

3) Сложение двух строк соответствует сложению двух уравнений системы. Рассмотрим систему, состоящую только из этих двух уравнений. Если мы одно из уравнений оставим без изменений, а вместо другого рассмотрим сумму исходных уравнений, то полученная система будет эквивалентна исходной. Действительно, если набор $x_1, \ldots, x_n$ является решением каждого из двух уравнений, то он является и решением их суммы и разности. Значит, и при элементарном преобразовании третьего типа множество решений системы не меняется. $\square$

Пример. Решим систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и проделаем элементарные преобразования строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \text{меняем местами первую и вторую строчки} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \text{прибавляем к тертьей строчке первую, а из второй вычитаем первую, умноженную на два} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \text{делим третью строчку на три, меняем её местами со второй} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{добавим к третьей строчке вторую, умноженную на три} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \text{делим третью строчку на четыре} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Получилась ступенчатая матрица! Записываем систему с новой марицей, видим, что она заметно упростилась:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Замечание. Квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю — нули, называют *невырожденной верхней треугольной.* Если после приведения матрицы системы линейных уравнений к ступенчатому виду получилась невырожденная верхняя треугольная матрица, то ее элементарными преобразованиями строк можно привести к единичной. А именно, сначала к каждой строке, кроме последней, прибавим последнюю строку с таким коэффициентом, чтобы все элементы последнего столбца, кроме последнего, стали равны нулю. Затем таким же образом сделаем равными нулю все элементы предпоследнего столбца, кроме предпоследнего. И так далее, в результате получим диагональную матрицу. Умножа ее строки на подходящие числа, получим единичную матрицу. Этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса.* Теперь общее решение системы просто считывается с полученной матрицы.

Пример. Возьмем ступенчатую матрицу из предыдущего примера и проведем обратный ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда сразу получаем решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Лекция 2
Определители

5 Определитель квадратной матрицы

Дадим сначала общее определение определителя квадратной матрицы размера $n \times n$.

Определение 5. *Перестановкой из n элементов называется набор $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$, расположенных в каком-либо порядке. Перестановка $(1, 2, \dots, n)$ называется тривиальной.*

Говорят, что пара чисел образует инверсию в заданной перестановке, если большее из них стоит левее меньшего. Перестановка называется четной (нечетной), если число инверсий в ней четно (нечетно).

Пример. Перестановка (3, 2, 1) имеет три инверсии: $2 < 3$, $1 < 3$ и $1 < 2$, и потому нечетна. Перестановка (2, 1, 4, 3) имеет две инверсии и потому четна.

Определение 6. *Определителем (детерминантом) квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, называется число*

$$\det A = |A| = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} \cdot a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}, \tag{2}$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$, а выражение $N(k_1, k_2, \dots, k_n)$ означает число инверсий в перестановке $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Это определение тяжело для применения на практике, поэтому удобно использовать следующие формулы:

- Для матриц размера 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(легко запомнить: рисуем андреевский флаг, числа на диагоналях перемножаем, из первого произведения вычитаем второе).

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

- Для матриц 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(тоже несложно запомнить: дописываем к матрице справа первый и второй ее столбцы, рисуем три андреевских флага, числа на диагоналях перемножаем, из каждого первого произведения вычитаем второе).

- Для матриц размера $4 \times\ 4$ и больше можно использовать разложение по столбцу (строке).

Определение 7. *Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i–той строки и j–того столбца. Числа M_{ij} называются минорами матрицы A. Также минорами матрицы называются определители всех матриц, полученных из данной вычеркиванием произвольных k строк и k столбцов. Порядком минора называется размер квадратной матрицы, полученной после вычеркивания.*

Пример. У матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ есть девять миноров первого порядка — собственно, элементы матрицы: $\quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad 0, \quad 2, \quad 0;$
девять миноров второго порядка:

$$M_{3\,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M+3\,2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{3\,1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$
$$M_{2\,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, M_{2\,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{2\,1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$
$$M_{1\,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{1\,2} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{1\,1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

один минор третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 2 - 0 = 2.$$

Теорема 3 (разложение определителя по столбцу (строке))**.** *Для любой квадратной матрицы A:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj},$$

где k — любое число от 1 до n, A_{jk} — алгебраическое дополнение к элементу a_{jk}.

Доказательство.[2] Проведем доказательство для первой строки. Сумма (2) содержит $n!$ слагаемых (число перестановок на n элементах). Каждое слагаемое есть произведение n чисел. Это произведение составляется так: в каждой строке матрицы выбирается ровно одно число, причем так, чтобы все выбранные числа стояли в разных столбцах. Теперь поймем, какие слагаемые содержат множитель a_{11}. Ясно, что другие множители в таком слагаемом выбираются уже из не первой строки и не первого столбца. Причем перебираются все возможные такие варианты выбора. При этом число инверсий в перестановке $(1, k_2, \dots, k_n)$ очевидно равно числу инверсий в перестановке $(k_2, \dots, k_n)$. Значит, группируя в сумме (2) слагаемые с множителем a_{11} и вынося его в этой группе за скобку, получим в скобках M_{11}. Теперь сгруппируем все слагаемые с множителем a_{12}. Заметим, что число инверсий в перестановке $(2, k_2, \dots, k_n)$ отличается от числа инверсий в перестановке $(k_2, \dots, k_n)$ ровно на одну (инверсия $2 < 1$). Ну а множители в таких произведениях выбираются не из первой строки и не из второго столбца. Получаем $-a_{12}M_{12}$. Далее все аналогично. В результате мы представим сумму (2) в виде

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

$\square$

[2] При первом прочтении это доказательство можно пропустить.

Пример.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{(разложение по последнему столбцу)} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(0 - 4 - 4 - 12 - 0 - 1) + (2 + 0 + 0 + 1 + 6 + 0) = 42 + 9 = 51.$$

Как видим, удобнее раскладывать по той строке (столбцу), которая содержит большое количество нулей.

Прежде, чем обсуждать свойства определителей, поговорим о том, откуда возник этот объект и для чего он нужен. Поясним на геометрических примерах.

а) Рассмотрим пару неколлинеарных векторов на плоскости $\vec{a}_1 = \{a_{11}, a_{12}\}$ и $\vec{a}_2 = \{a_{21}, a_{22}\}$. Заметим сразу, что если обозначить $\vec{e}_1 = \{1, 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0, 1\}$, то можно записать:

$$\vec{a}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2, \quad \vec{a}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2.$$

Назовем пару $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ *положительно ориентированной*, если поворот от $\vec{a}_1$ к $\vec{a}_2$ на угол, меньший π, происходит в положительном направлении (против часовой стрелки).

Обозначим теперь через $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (то есть площадь, взятую со знаком «$+$», если пара $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ориентирована положительно, и со знаком «$-$» иначе). Очевидно, что если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, то $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = 0$. Таким образом, величина $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ является мерой неколлинеарности (линейной независимости) векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Кроме того, она обладает следующими свойствами:

1. $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ линенйна по $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$;
2. $S\{\vec{a}_2, \vec{a}_1\} = -S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$;
3. $S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = 1$.

Второе и третье свойства очевидны, проверим первое. Представим площадь параллелограмма как произведение стороны на высоту: $S = |\vec{a}_1| \cdot h_2$, где h_2 — проекция вектора $\vec{a}_2$ на прямую, ортогоналюную вектору $\vec{a}_1$. Поскольку операция проектирования обладает свойством линейности, то площадь линейна по $\vec{a}_2$. Аналогично для $\vec{a}_1$.

Пользуясь свойствами 1 – 3, можем вычислить $S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Действительно,

$$S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = S\{a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2, a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2\} = S\{a_{11}\vec{e}_1, a_{21}\vec{e}_1\} + S\{a_{12}\vec{e}_2, a_{21}\vec{e}_1\} + S\{a_{11}\vec{e}_1, a_{22}\vec{e}_2\} +$$
$$+ S\{a_{12}\vec{e}_2, a_{22}\vec{e}_2\} = a_{11}a_{21}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_1\} + a_{12}a_{21}S\{\vec{e}_2, \vec{e}_1\} + a_{11}a_{22}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + a_{12}a_{22}S\{\vec{e}_2, \vec{e}_2\} =$$
$$0 - a_{12}a_{21}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + a_{11}a_{22}S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + 0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Видим, что ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, в точности совпадает с определителем матрицы, составленной из координат этих векторов:

$$S\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

б) Назовем тройку векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ в трехмерном пространстве *положительно ориентированной*, если поворот от $\vec{a}_1$ к $\vec{a}_2$ происходит в положительном направлении при взгляде с конца вектора $\vec{a}_3$. Обозначим через $V\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ в трехмерном пространстве. Можно показать, что он обладает свойствами:

1. линеен по каждому из аргументов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$;

2. меняет знак при перестановке любых двух аргументов;

3. $V\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = 1$,

где $\vec{e}_1 = \{1,0,0\}$, $\vec{e}_2 = \{0,1,0\}$, $\vec{e}_3 = \{0,0,1\}$. Пользуясь этими свойствами можем вычислить $V\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ и убедиться в том, что он в точности совпадает с определителем матрицы A, в которой по строкам записаны координаты векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Ясно, что $V\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \neq 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ некомпланарны (линейно независимы).

- **Свойства определителя.**

1) При транспонировании матриц ее определитель не меняется. Свойства строк и столбцов одинаковы.
2) Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.
3) Если все элементы некоторой строки (столбца) матрицы умножить на число $\lambda \neq 0$, то ее определитель тоже умножится на число λ.
4) При перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
5) Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю. Если матрица содержит две пропорциональные строки (столбца), то ее определитель равен нулю.
6) Если к одной из строк (столбцов) матрицы прибавить другую строку (столбец), умноженную на число $\lambda \neq 0$, то определитель матрицы не изменится.
7) Определитель произведения матриц равен произведению их определителей:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

8) («фальшивое» разложение по столбцу или строке) Для любой квадратной матрицы A:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{lj} = 0, \quad \text{если} \quad k \neq l.$$

9) Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.
Для матриц 2×2 и 3×3 все эти свойства можно проверить непосредственными вычислениями. Доказательства для общего случая приведены ниже (при первом прочтении их можно пропустить).
Доказательство. 1) Для матриц 2×2 очевидно, а далее по индукции. Разложим определитель матрицы размера $n \times n$ по первой строке $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$, а определитель матрицы A^T по первому столбцу $\det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{j1}^T$. Для матриц размера $(n-1)\times(n-1)$ мы считаем свойство доказанным, т.е. $M_{j1}^T = M_{1j}$.
2) Разложим определитель по этой строке (столбцу) и получим ноль.
3) Разложим определитель по этой строке (столбцу) и увидим, что каждое слагаемое приобрело множитель λ.
4) Пусть матрица A' получена из матрицы A перестановкой i–ой и j–ой строк, $i < j$. В сумме (2) для $\det A'$ произведения будут отличаться от произведений суммы $\det A$ перестановкой множителей, т.е. будут совпадать. А вот знак перед этими произведениями будет другой. Чтобы это понять, надо заметить, что число инверсий в перестановке $(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \ldots, k_n)$ отличается от числа инверсий в перестановке $(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_j, k_{i+1}, \ldots, k_{j-1}, k_i, k_{j+1}, \ldots, k_n)$ ровно на $2(j-i)+1$, т.е. на нечетное число.[3]
5) Поменяем местами одинаковые строки. С одной стороны, определитель не должен измениться (поскольку не изменилась матрица). С другой стороны, он должен поменять знак (свойство 4).

[3]Попробуйте доказать это самостоятельно, если очень хочется.

Следовательно, он равен нулю. Второе утверждение следует из первого и из свойства 3).
6) Пусть j–ая строка матрицы A' есть сумма i–ой (умноженной на λ) и j–ой строки матрицы A. Разложим $\det A'$ по j–ой строке $\det A' = \sum_{j=1}^{n}(a_{jk} + \lambda a_{ik})A_{jk}$ и получим две суммы — первая равна $\det A$, а вторая равна определителю матрицы, у которой j–ая строка равна i–ой, умноженной на λ. По свойству 5) такой определитель равен нулю.
7) Положим $C = AB$. Пусть для простоты матрица A невырождена. Вспомним, что такую матрицу A мы можем элементарными преобразованиями привести к единичной. Каждое элементарное преобразование можно записать в виде умножения на матрицу этого преобразования, т.е. $C = M_1 \dots M_N B$. Заметим, что определитель матрицы, отвечающей за умножение строки на λ, равен λ. Определитель матрицы, отвечающей за перестановку строк, равен -1. Определитель матрицы, отвечающей за сложение строк, равен 1. Но изменение определителя при элементарных преобразованиях мы уже знаем (свойства 3), 4) и 6)). Получаем $\det A = \det M_1 \cdot \dots \cdot \det M_N$. Точно так же, произведение $M_1 \dots M_N B$ есть результат применения уже к матрице B элементарных преобразований (правда в обратном порядке). Тогда $\det(M_1 \dots M_N B) = \det M_1 \cdot \dots \cdot \det M_N \cdot \det B = \det A \cdot \det B$.
8) Сразу следует из теоремы 3 о разложении определителя по столбцу (строке) и свойства 5).
9) Это следует непосредственно из определения: в указанной в определении сумме может быть только одно ненулевое слагаемое, отвечающее тривиальной перестановке. □

- **Вычисление определителя матрицы с помощью метода Гаусса.**

Элементарными преобразованиями приводим матрицу к ступенчатому виду. Как при этом меняется определитель, мы знаем из свойств 3), 4) и 6). Квадратная ступенчатая матрица является верхнетреугольной. Определитель такой матрицы есть просто произведение ее диагональных элементов. Тогда определитель исходной матрицы равен определителю полученной, с учётом всех преобразований.

Пример.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{меняем местами 1–ю и 3–ю строки} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{к 3–й строке прибавляем 1–ю, из 4–й вычитаем удвоенную 1–ю} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{из 3–й строки вычитаем три 2–х, к 4–й прибавляем восемь 2–х} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 21 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{к 4–й строке прибавляем 3–ю, умноженную на } \frac{7}{3} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17/3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1) \cdot (1) \cdot (-9) \cdot (17/3) = 51.$$

Лекция 3
Решение уравнений с помощью матриц

6 Метод Крамера

Определение 8. *Система линейных уравнений называется совместной, если у нее существует хотя бы одно решение. Система называется определенной, если ее решение существует и единственно.*

Есть несколько методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Первый из них называется методом Крамера. Он базируется на вычислении определителей, составленных специальным образом из коэффициентов системы.

Рассмотрим вначале систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Будем считать, что матрица системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ отлична от нулевой, иначе решать нечего. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Возможны следующие случаи:

1) $\begin{cases} \Delta = 0 \\ (\Delta_1)^2 + (\Delta_2)^2 \neq 0 \end{cases} \implies$ *система несовместна* (решений нет),

2) $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_1 = \Delta_2 = 0 \end{cases} \implies$ система *совместна*, но *не определена* (решений бесконечно много),

3) $\Delta \neq 0 \implies$ система *совместна* и имеет единственное решение: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases}$

Доказательство. Пусть сначала $\Delta = 0$. Так как матрица системы ненулевая, то можно считать, что первая строка матрицы ненулевая (иначе поменяем уравнения местами). Можно даже считать, что $a_{11} \neq 0$ (иначе перенумеруем переменные в обратном порядке). Равенство $\Delta = 0$ означает, что $a_{21} = ka_{11}$, $a_{22} = ka_{12}$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$. Если $b_2 = kb_1$, то второе уравнение системы просто повторяет первое. Тогда второе уравнение можно отбросить, а решений у линейного уравнения с двумя переменными бесконечно много. Таким образом, система совместна, но не определена.
Если $b_2 \neq kb_1$, то вычтем из второго уравнения первое, умноженное на k, получим равенство $0 = b_2 - kb_1 \neq 0$. Система несовместна.
Если $\Delta \neq 0$, то левые части уравнений не являются пропорциональными, и можем решить систему

методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1, \\ -a_{11}a_{21}x_1 - a_{11}a_{22}x_2 = -a_{11}b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases}$$

□

Аналогичные рассуждения можно применять к системам любого размера $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Пример. Продемонстрируем на примере системы размера 3×3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 8 - 2 + 2 + 2 = 12,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 + 2 + 2 = 6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 + 2 - 0 + 1 = 6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 4 - 2 - 1 - 0 = -6,$$

следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Теорема 4 (формулы Крамера)**.** *Если* $\Delta = \det A \neq 0$ *то система* (3) *имеет единственное решение* $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ *где* Δ_i *— определительматрицы* A_i*, полученной из матрицы* A *подстановкой вместо* i*−го столбца столбца правых частей системы.*

Доказательство. При любом элементарном преобразовании системы (3) в матрицах A и A_i одновременно происходит соответствующее элементарное преобразование строк, следовательно, отношение $\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ при этом не меняется. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями к единичному виду (это возможно: поскольку определитель матрицы не равен нулю, то после приведения ее к ступенчатому виду получаем невырожденную верхнюю треугольную матрицу; затем обратным ходом метода Гаусса приводим ее к единичной). Пусть $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \ldots, \widetilde{b}_n$ — правые части системы после приведения, тогда система, очевидно, имеет решение $x_i = \widetilde{b}_i$. $i = 1, 2, \ldots, n$.

С другой стороны, у приведенной системы $\widetilde{\Delta} = 1$, $\widetilde{\Delta}_i = \widetilde{b}_i$, следовательно,

$$x_i = \widetilde{b}_i = \frac{\widetilde{\Delta}_i}{\widetilde{\Delta}} = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

$\square$

7 Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица $n \times n$.

Определение 9. *Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E — единичная матрица.

Определение 10. *Матрица называется вырожденной, если её определитель равен нулю.*

Заметим, что поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, а определитель единичной матрицы равен 1, то *матрица имеет обратную тогда и только тогда когда она не вырождена* (критерий существования обратной матрицы).

Действительно, если матрица вырождена, то ее определитель равен нулю. Тогда у нее не может быть обратной, потому что иначе мы бы имели противоречивую цепочку соотношений

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 0 \cdot \det A^{-1} = 0.$$

Для того, чтобы провести доказательство в обратную сторону, то есть показать, что любая невырожденная матрица обратима, достаточно предъявить алгоритм вычисления обратной матрицы. Приведем несколько способов.

Способы нахождения обратной матрицы:

1) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathcal{A}^T$, где $\mathcal{A}$ — матрица алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда

$$A \cdot \mathcal{A}^T = (b_{ij}), \quad \text{где} \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

в силу теоремы 3 о разложении определителя по строке. Значит, $\dfrac{1}{\det A}A\mathcal{A}^T = E$. Аналогично показывается, что $\dfrac{1}{\det A}\mathcal{A}^T A = E$. $\square$

2) Записываем матрицу A и рядом единичную матрицу, разделив их вертикальной чертой. Далее, путём элементарных преобразований, приводим матрицу A к единичной, тогда матрица справа будет являться обратной к матрице A. То есть решение будет иметь следующий вид

$$(A|E) \to \dots \to (E|A^{-1}).$$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу.

Вычислим определитель: $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Теперь найдем алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det(4) = 4, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \det(3) = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det(2) = -2, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \det(1) = 1.$$

Тогда

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ транспонируем } \mathcal{A} \text{ и находим } A^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Пример. Расмотрим матрицу размера 3×3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель: $\det B = 2 + 0 + 0 - (1 + 0 + 0) = 1$ и алгебраические дополнения

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad B_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad B_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad B_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Матрица алгебраических дополнений

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$B^{-1} = \mathcal{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдём матрицу, обратную матрице из предыдущего примера, путём элементарных преобразований (методом Гаусса):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\text{Вновь } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5 (существование и единственность обратной матрицы)**.** *Пусть матрица A является невырожденной. Тогда у нее существует, причем единственная, обратная матрица*

Доказательство. Существование доказано выше: если $\det A \neq 0$, то существует $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathcal{A}^T$. Докажем единственность. Пусть $A^{-1} = A_1$ и $A^{-1} = A_2$, тогда

$$A_1 = A_1 \cdot E = A_1 \cdot (A \cdot A^{-1}) = (A_1 \cdot A) \cdot A^{-1} = (A_1 \cdot A) \cdot A_2 = (A^{-1} \cdot A) \cdot A_2 = E \cdot A_2 = A_2.$$

$\square$

8 Свойства обратной матрицы

- $E^{-1} = E$ (очевидно);
- $(A^{-1})^{-1} = A$ (следует из определения);
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (следует из определения);
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  Доказательство. Действительно,

  $$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E; \quad (B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E.$$

  □

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ (следует из того, что определитель произведения равен произведению определителей, то есть $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$).

9 Матричные уравнения

Пусть дано уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad X \in \mathbb{R}_{2\times 2}.$$

Способ 1. Запишем его в виде $AX = B$. Домножим обе части уравнения на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Примечание: в случае уравнения $XA = B$ домножение на обратную матрицу A^{-1} выглядело бы так:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}.$$

Если матрица A — невырожденная, то из теоремы о существовании и единственности обратной матрицы сразу следует теорема о существовании и единственности решения матричного уравнения вида $AX = B$ (или $XA = B$).

Способ 2. Запишем неизвестную нам матрицу X в виде $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Тогда $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a + 2c = 5 \\ b + 2d = 6 \\ 3a + 4c = 7 \\ 3b + 4d = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \\ c = 4 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Примечание: Если матрицы A и B вырожденные, то можно решить это матричное уравнение с помощью способа 2 (способ 1 не подходит). Ответ будет не единственным.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 2 \\ 2b + 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2c \\ b = -2d, \end{cases} \qquad \text{где } c \text{ и } d \text{ — произвольные.}$$

В случае, когда матрица A — вырожденная, а матрица B — нет, матричное уравнение $A \cdot X = B$ не имеет решений. В случае же, когда матрица A — невырожденная, а матрица B — вырожденная, решение есть: $X = A^{-1} \cdot B$.

Точно так же можно решать и матричные уравнения вида:

$$A \cdot X \cdot B = C, \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Уравнения типа $X^2 = A$ решаются гораздо сложнее и требуют отдельного разговора.

Пример. Дано уравнение

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Кроме очевидных решений

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

уравнение имеет ещё и такие:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$$

и еще много других.

Замечание. Отметим, что с помощью обратной матрицы можно решать СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений).

Запишем СЛАУ в виде матричного уравнения $AX = B$, где A — это матрица коэффицентов системы, X — матрица переменных, B — матрица свободных переменных.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Предположим, что матрица A — невырожденная. Тогда

$$X = A^{-1}B \quad - \quad \text{единственное решение системы.}$$

Если же матрица A вырождена, то ее определитель равен нулю, следовательно, СЛАУ либо несовместна, либо не определена. В этом случае метод обратных матриц не подходит, и следует применять метод Гаусса.

Лекция 4
Системы линейных алгебраических уравнений.

10 Предварительные соображения

Расмотрим произволюную систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из m уравнений с n неизвестными. Приведем ее расширенную матрицу к ступенчатому виду. Обозначим через r число ненулевых строк (ступенек) матрицы системы, а через $\widetilde{r}$ — число ненулевых строк расширенной матрицы. Очевидно, что возможны две ситуации: $\widetilde{r} = r$ или $\widetilde{r} = r+1$. Далее возможны следующие три принципиально разных случая.
1) $\widetilde{r} = r+1$. Тогда система содержит уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, где $b \neq 0$, следовательно, является несовместной.
2) $\widetilde{r} = r = n$. В этом случае после отбрасывания нулевых уравнений получаем систему из n уравнений с n неизвестными. Матрица полученной системы является квадратной, ступенчатой и не содержит нулевых строк, следовательно, на ее диагонали нет нулевых элементов (матрица является невырожденной верхнетреугольной). Значит, система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

причем $a_{jj} \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда из последнего уравнения можно однозначно выразить x_n, подставить полученное значение в предпоследнее уравнение, после чего однозначно найти x_{n-1}, и так далее. Получаем, что система имеет единственное решение.
3) $\widetilde{r} = r < n$. Пусть в этом случае j_1, j_2, ... , j_r — номера ведущих коэффициентов ненулевых уравнений системы. Переменные x_{j_1}, x_{j_2}, ... x_{j_r} назовем *главными* (*базисными*), а остальные — *свободными*. Отбросим все нулевые уравнения и перенесем слагаемые со свободными переменными в правую часть. Получим невырожденную верхнетреугольную систему относительно главных неизвестных. Применив к ней рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 2, найдем выражения главных неизвестных через свободные. Эти выражения называют *общим решением системы*. Все решения системы получаются из общего подстановкой вместо свободных неизвестных каких-то конкретных значений. Поскольку эти значения могут выбираться произвольно, то система имеет бесконечно много решений.
Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получаем, что $\widetilde{r} = r = 3 < 4 = n$, следовательно, система совместна, но не определена. Возьмем в качестве базисных переменных x_1, x_2 и x_4; x_3 — свободная переменная. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 - x_3, \\ x_2 - x_4 = 2 - x_3, \\ x_4 = -5. \end{cases}$$

Получаем, что общее решение системы имеет вид: $x_1 = x_3 + 8$, $x_2 = -x_3 - 3$, $x_4 = -5$, где $x_3 \in \mathbb{R}$ — произвольно.

11 Линейная независимость

Определение 11. *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - строки некоторой матрицы X. Их линейной комбинацией с коэффициентами $c_1, c_2, \dots, c_n$ называется сумма*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X_k.$$

Линейная комбинация называется тривиальной, если все коэффициенты $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Определение 12. *Строки матрицы называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.*

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3. \end{pmatrix}$$

Обозначим

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что $X_1 - X_2 + X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, строки матрицы A являются линейно зависимыми, поскольку существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Аналогичное определение можно дать для столбцов матрицы.

12 Ранг матрицы

Определение 13. *Минор $r-$го порядка матрицы A называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ этой матрицы равны нулю.*

Определение 14. *Рангом матрицы A называется порядок r ее базисного минора. Обозначение:* $\operatorname{rang} A$.

Пример. У матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ все миноры порядка 3, очевидно, равны нулю. В то же время, у нее есть базисные миноры порядка 2, например:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$.

Свойства ранга матрицы:

- При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

  Доказательство. Из определения элементарных преобразований следует, что строки матрицы A', полученной из матрицы A каким-либо элементарным преобразованием, линейно выражаются через строки матрицы A. Отсюда и из свойств определителя следует, что если какой-либо минор матрицы был равен нулю, то он останется равным нулю и после элементарного преобразования. Значит, увеличиться ранг не может.

  Но и наоборот, матрица A может быть получена из матрицы A' элементарным преобразованием, обратным исходному, следовательно, ее строки линейно выражаются через строки матрицы A'. Значит, уменьшится ранг тоже не может. Следовательно, ранги матриц A и A' равны. □

- Ранг транспонированной матрицы равен рангу исходной (это очевидно)

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T.$$

- Существуют эквивалентные определения ранга матрицы.

  Теорема 6 (о ранге матрицы)**.** *Ранг матрицы A равняется максимально возможному количеству ее линейно независимых строк.*

  Доказательство. Приведем матрицу A к ступенчатому виду. Получим матрицу $\widetilde{A}$ вида:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{rj_r} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

  где $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r$, $a_{kj_k} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Поскольку ранг не менялся при элементарных преобразованиях, то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = r$ (очевидно, что у матрицы $\widetilde{A}$ есть отличный от нуля минор $r-$го порядка — он составлен из первых r строк и столбцов с номерами j_1, $j_2, \ldots$, j_r, а все миноры порядка $r+1$ содержат нулевую строку и потому равны нулю).

  Но и максимальное количество линейно независимых строк не меняется при элементарных преобразованиях матрицы (строки матрицы A', полученной из матрицы A каким-либо элементарным преобразованием, линейно выражаются через строки матрицы A, и наоборот). Покажем, что у матрицы $\widetilde{A}$ это количество равно r, а именно, что ее первые r строк линейно независимы. Предположим, что линейная комбинация строк матрицы $\widetilde{A}$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ равна нулю. Тогда, поскольку $a_{1j_1} \neq 0$, то $\lambda_1 = 0$. Поскольку $a_{2j_2} \neq 0$, то $\lambda_2 = 0$. И так далее, наконец, $\lambda_r = 0$. Значит, эта линейная комбинация тривиальна, то есть строки линейно независимы. Отсюда следует, что и у матрицы A максимальное количество линейно независимых строк равно r. □

  Из этой теоремы и свойства $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$ следует

  Теорема 7. *Ранг матрицы равен максимально возможному количеству ее линейно независимых столбцов.*

- Ранг суммы не превосходит суммы рангов:

$$\operatorname{rang}(A + B) \leqslant \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

Доказательство. Обозначим $C = A+B$. Составим матрицу D, приписав к матрице C справа матрицу A, а затем — матрицу B:

$$D = (C|A|B).$$

Поскольку ранг матрицы равен максимальному количеству ее линейно независимых столбцов (см. теорему 7), то $\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} D$. Далее, поскольку каждый столбец матрицы C есть линейная комбинация (сумма) соответствующих столбцов матриц A и B, то $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang}(A|B)$. Очевидно, что $\operatorname{rang}(A|B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$, следовательно, $\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$. $\square$

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rang} A = 2$, поскольку третья строка этой матрицы является линейной комбинацией первых двух, а первая и вторая строки не пропорциональны, то есть линейно независимы.

Внимательный читатель заметит также, что у матрицы A линейная комбинация столбцов с коэффициентами -17, 7, -1 равна нулю, то есть столбцы матрицы A являются линейно зависимыми.

$$-17\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

При этом два столбца матрицы A являются линейно независимыми, то есть $\operatorname{rang} A = 2$.

Способы вычисления ранга матрицы:

- Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения этой матрицы к ступенчатому виду методом Гаусса.

  Пример. Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{III}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\cdot\text{IV}]{3\cdot\text{III}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 12 & 3 & -3 & 18 \\ 6 & -15 & 9 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{IV}-\text{I}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 0 & -11 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{\text{IV}-\text{II}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Получили матрицу ступенчатого вида с двумя ненулевыми строками, следовательно,

$$\operatorname{rang} A = 2.$$

- Ранг матрицы равен максимальному порядку минора (см. определение 7), отличного от нуля.

  Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

  Очевидно, что у нее есть нелулевые миноры порядка 1. Рассмотрим минор порядка 2, стоящий в левом верхнем углу (такой минор называется *главным*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0.$$

Мы нашли ненулевой минор порядка 2, значит, $\operatorname{rang} A \geq 2$. Приступим к поиску ненулевого минора порядка 3. Если все миноры третьего порядка окажутся равны нулю, то можно будет сделать вывод, что $\operatorname{rang} A = 2$. Иначе $\operatorname{rang} A = 3$ (поскольку матрица имеет всего три строки).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 5 + 4 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 10 - 8 = -4.$$

Значит, $\operatorname{rang} A = 3$.

13 Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Запишем для нее расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Теорема 8 (Кронекер — Капелли)**.** *Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы ее коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть система совместна. Тогда найдутся числа x_1, x_2, ... , x_n такие, что

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Это означает, что столбец $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \vdots & b_m \end{pmatrix}^T$ является линейной комбинацией остальных столбцов матрицы с коэффициентами x_1, x_2, ... , x_n. Следовательно, если мы добавим этот столбец в матрицу коэффициентов системы, то ее ранг не изменится (см теорему 7). Значит, ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы коэффициентов.

Достаточность. Пусть ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы. Введем обозначения $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \vdots & a_{mi} \end{pmatrix}^T$, $i = \overline{1, n}$. Перенумеровав переменные, всегда можно считать, что первые r столбцов линейно зависимы, а остальные являются их линейными комбинациями. Это означает, что существуют числа x_1, x_2, ... , x_r такие, что $x_1 a_1 + x_2 a_2 \ldots + \ldots + x_r a_r = b$. Добавим к этой сумме оставшиеся столбцы, умноженные на коэффициенты $x_{r+1} = 0 \ldots x_n = 0$, получим

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 \ldots + \ldots + x_r a_r + x_{r+1} a_{r+1} + \ldots + x_n a_n = b.$$

Следовательно, числа x_1, x_2, ... , x_n являются решением нашей системы. $\square$

14 Однородные и неоднородные системы

Определение 15. *Система линейных алгебраических уравнений называется однородной, если все её свободные члены равны нулю.*

Для удобства записи будем обозначать далее решения СЛАУ: $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Свойства решений однородной системы

- Однородная система является совместной, поскольку всегда имеет тождественно нулевое решение.

- Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются решениями однородной системы, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.

- Если однородная система с m неизвестными содержит n уравнений, причем $m > n$, то она имеет нетривиальное (не тождественно нулевое) решение.

  Доказательство. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду методом Гаусса. Поскольку число неизвестных больше числа уравнений, то часть неизвестных окажутся свободными (базисными будут не более n переменных, следовательно, свободных переменных будет $\geq m-n$). Перенесем члены со свободными переменными в правую часть, получим выражения базисных переменных через свободные. Теперь достаточно придать свободным переменным произвольные ненулевые значения, чтобы получить нетривиальное решение системы. □

Фундаментальная система решений

Определение 16. *Система $X = \{\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^n}\}$ линейно независимых решений* ***однородной*** *СЛАУ называется фундаментальной (ФСР — фундаментальная система решений), если произвольное решение этой СЛАУ является линейной комбинацией элементов системы X. Таким образом,*

$$\mathbf{x}_{\textit{общее однородной}} = \lambda_1 \mathbf{x^1} + \lambda_2 \mathbf{x^2} + \ldots + \lambda_k \mathbf{x^k}.$$

Определение 17. *Система линейных алгебраических уравнений называется неоднородной, если хотя бы один её свободный член не равен нулю.*

Свойство решений неоднородной системы

- Разность двух решений $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ неоднородной системы есть решение однородной: из $A\mathbf{x} = B$ и $A\mathbf{y} = B$ следует, что $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{y} = 0$.

Теорема 9. *Общее решение неоднородной СЛАУ можно представить в виде суммы общего решения однородой СЛАУ и частного решения неоднородой СЛАУ:*

$$\mathbf{x}_{\textit{общее неоднородной}} = \mathbf{x}_{\textit{общее однородной}} + \mathbf{x}_{\textit{частное неоднородной}}. \tag{4}$$

Доказательство. Воспользуемся свойством решений неоднородной системы и определением фундаментальной системы решений однородной СЛАУ. Зафиксируем какое-либо частное решение $\mathbf{x^1}$ неоднородной системы. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольное решение неоднородной системы. Вычтем из него $\mathbf{x^1}$, получим $\mathbf{x^0} = \mathbf{x} - \mathbf{x^1}$ — решение однородной СЛАУ.

Обратно, пусть $\mathbf{x^0}$ — произвольное решение однородной СЛАУ. Добавим к нему $\mathbf{x^1}$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x^0} + \mathbf{x^1}$ удовлетворяет соотношениям

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{x^0} + \mathbf{x^1}) = A\mathbf{x^0} + A\mathbf{x^1} = 0 + B = B,$$

то есть является решением неоднородной системы.

Значит, левая и правая части соотношения (4) совпадают в смысле равенства множеств. □

Пример. Найдем общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}:(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим однородную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_1, x_2 x_3 — базисные переменные, x_4 — свободная переменная. Тогда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = x_4.$$

Положим, например, $x_4 = 1$, получим, что ФСР состоит из одного вектора: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. Очевидно, что любое другое решение однородной системы получается из решения $\mathbf{x}$ умножением на константу. Следовательно, общее решение однородной системы записывается в виде

$$\mathbf{x}_{oo} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Найдем частное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$ (будем считать, что мы его просто угадали). Значит, общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\mathbf{x}_{он} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пример. Найдем общее решение системы: $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 2. \end{cases}$ Сначала найдем фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы. Приведем матрицу системы $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду. Заметим, что все элементы первого столбца отличны от единицы, что не очень удобно для применения метода Гаусса. Можно, конечно, разделить любую строку на первый элемент, но тогда придется работать с дробями. В данном случае удобнее, например, вычесть из второй строки первую, а затем поменять первую и вторую строки местами.

Так мы добъемся единицы в качестве первого элемента первой строки:

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 5 & 3\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix}2 & -4 & 5 & 3\\ 1 & -2 & -1 & -1\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 3\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{III}-4\cdot\text{I}]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 21 & 15\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-3\cdot\text{II}} \begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получаем систему $\begin{cases}x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0,\\ 7x_3 + 5x_4 = 0.\end{cases}$ Пусть x_1 и x_3 — базисные переменные, x_2 и x_4 — свободные переменные. Имеем:

$$\begin{cases}x_1 = 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4,\\ x_3 = -\dfrac{5}{7}x_4.\end{cases}$$

Поскольку у нас две свободные переменные, то ФСР будет содержать два линейно независимых решения $\mathbf{x^1}$ и $\mathbf{x^2}$. Удобно положить в решении $\mathbf{x^1}$: $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, а в решении $\mathbf{x^2}$ наоборот: $x_2 = 0$, $x_4 = 1$. Это гарантирует линейную независимость $\mathbf{x^1}$ и $\mathbf{x^2}$. А еще лучше, чтобы не возникало дробей, взять $x_2 = 0$, $x_4 = 7$ в $\mathbf{x^2}$. Получим, что

$$\mathbf{x^1} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x^2} = \begin{pmatrix}2\\0\\-5\\1\end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение однородной системы имеет вид:

$$\mathbf{x}_{oo} = \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\0\\-5\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Частное решение неоднородной системы в данном случае легко подбирается: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$. Таким образом, общее решение неоднородной системы записывается в виде

$$\mathbf{x}_{он} = \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\0\\-5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Лекция 5

15 Линейное пространство

Определение 18. *Линейным пространством (над полем K, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется множество V произвольных элементов (векторов), в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие следующим аксиомам:*
1) любым двум векторам $x, y \in V$ поставлен в соответствие элемент из V, обозначаемый $x + y$ и называемый суммой элементов x и y;
2) любому вектору $x \in V$ и любому $\lambda \in K$ поствлен в соответствие элемент из V, обозначаемый λx и называемый поизведением числа λ и элемента x; причём справедливы следующие аксиомы:
1. $x + y = y + x \ \ \forall\, x, y \in V$ — коммутативность сложения;
2. $(x + y) + z = x + (y + z) \ \ \forall\, x, y, z \in V$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists\, 0_V \in V, \ \ \forall\, x : \ \ x + 0_V = 0_V + x = x$ — существование нейтрального элемента по сложению;
4. $\forall x \in V \ \ \exists\, (-x) \in V : \ \ x + (-x) = 0_V$ — существование обратного элемента по сложению;
5. $\forall\, \lambda \in K, \forall\, x, y \in V : \ \ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ — дистрибутивность;
6. $\forall\, \lambda, \mu \in K, \forall\, x \in V : \ \ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ — дистрибутивность;
7. $\forall\, \lambda, \mu \in K, \ \ \forall\, x \in V : \ \ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ — ассоциативность умножения;
8. $\forall\, x \in V : \ \ 1 \cdot x = x$ — свойство единицы.

Мы пишем 0_V, чтобы подчеркнуть, что это не число 0, а нулевой вектор.

Примеры линейных пространств

- Векторы–столбцы (или векторы–строки) с n координатами.
- Совокупность матриц фиксированного размера $m \times n$ с операциями сложения и умножения на число.
- Множество решений однородной системы линейных уравнений $AX = 0$.
- Множество алгебраических многочленов одной переменной степени $\leq n$.

Примеры нелинейных пространств

- Векторы с целочисленными координатами.
- Отрезок $[0, 1]$.
- Множество решений неоднородной системы линейных уравнений $AX = B$.

16 Вектор как элемент линейного пространства

Определение 19. *n–мерным действительным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, называемых компонентами вектора, которая обозначается*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Два вектора называются равными, если они равны покомпонентно:

$$\vec{x} = \vec{y}, \quad \text{где} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \text{если} \quad x_i = y_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Несложно проверить, что совокупность всех $n-$мерных действительных векторов с введенными на них операциями сложения и умножения на скаляр образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. По определению, сумма двух векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{где} \quad \vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \text{если} \quad z_i = x_i + y_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Умножение вектора на число $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{z} = \lambda\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \text{если} \quad z_i = \lambda x_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Определение 20. *Вектор $\vec{x}$ назывется линейной комбинцией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, если найдутся такие λ_1, λ_2,…,$\lambda_m \in \mathbb{R}$, что $\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m$*

Определение 21. *Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ называется линейно зависимой, если существуют такие константы λ_1, λ_2,…,$\lambda_m \in \mathbb{R}$, не все одновременно равные нулю, что*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = 0. \tag{5}$$

Определение 22. *Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ линейно независима, если соотношение* (5) *выполняется только при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$,…,$\lambda_m = 0$.*

Свойства линейной зависимости:

1) Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

2) Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ есть два равных вектора, то эти векторы линейно зависимы.

   Доказательство. Пусть $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, тогда соотношение (5) верно при

   $$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

   □

3) Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ есть два пропорциональных вектора, то эти векторы линейно зависимы.

4) Если некоторая подсистема $\{\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \ldots, \vec{a}_{j_k}\}$ системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

   Доказательство. Пусть векторы $\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \ldots, \vec{a}_{j_k}$ линейно зависимы ($k < m$), тогда

   $$\lambda_{j_1}\vec{a}_{j_1} + \lambda_{j_2}\vec{a}_{j_2} + \ldots + \lambda_{j_k}\vec{a}_{j_k} = 0.$$

   $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = 0$, где $\lambda_i = 0$, если $i \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$. □

5) Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в качестве линейной комбинации остальных.

   Доказательство. Раз векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно зависимы, то существуют постоянные $\lambda_1, \ldots \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = 0$. Пусть $\lambda_k \neq 0$, тогда из последнего соотношения можем выразить вектор $\vec{a}_k$ через остальные. □

   Заметим, что из линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ не следует, что *любой* из них может быть представлен линейной комбинацией остальных.

Определение 23. *Пусть S — какое-либо подмножество линейного пространства V. Линейной оболочкой множества S называется совокупности всех конечных линейных комбинаций векторов множества S. Обозначение: $Lin\{S\}$. Говорят, что пространство V порождается множеством S, если $Lin\{S\} = V$.*

Определение 24. *Векторное пространство V называется конечномерным, если оно порождается множеством S, содержащим конечное число векторов, и бесконечномерным в противном случае.*

Определение 25. *Базисом линейного пространства V называется любая линейно независимая система векторов, порождающая это пространство.*

Теорема 10. *Всякое конечномерное линейное пространство V обладает базисом. Более точно, из всякого конечного множества векторов S, порождающего пространство V, можно выбрать базис этого пространства.*

Доказательство. Если множество S линейно независимо, то оно само является базисом. Если оно линейно зависимо, то можем выбрать из него вектор, линейно выражающийся через остальные. Отбросим его, получим множество S_1, которое содержит на один вектор меньше, но по-прежнему порождает пространство V. Применим к нему аналогичные рассуждения. И так далее, в конце концов получим множество линейно независимых векторов, порождающее пространство V. Это и будет базис. $\square$

Лемма 1. *Если векторное пространство V порождается системой S, содержащей n векторов, то любая система из m векторов в пространстве V, где $m > n$, будет линейно зависимой.*

Доказательство. Пусть $S = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$. Возьмем систему $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ векторов пространства V, где $m > n$, и покажем, что она линейно зависима. Выразим векторы системы B через векторы системы S:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \mu_{11}\vec{a}_1 + \mu_{12}\vec{a}_2 + \ldots + \mu_{1n}\vec{a}_n, \\ &\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \vec{b}_m &= \mu_{m1}\vec{a}_1 + \mu_{m2}\vec{a}_2 + \ldots + \mu_{mn}\vec{a}_n. \end{aligned}$$

Тогда для произвольных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_m\vec{b}_m = (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21} + \ldots + \lambda_m\mu_{m1})\vec{a}_1 + \ldots + (\lambda_1\mu_{1n} + \lambda_2\mu_{2n} + \ldots + \lambda_m\mu_{mn})\vec{a}_n.$$

Рассмотрим однородную систему из n уравнений с m неизвестными

$$\begin{cases} \mu_{11}x_1 + \mu_{21}x_2 + \ldots + \mu_{m1}x_m = 0, \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \mu_{1n}x_1 + \mu_{2n}x_2 + \ldots + \mu_{mn}x_m = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Число уравнений в ней меньше числа неизвестных, следовательно, она имеет нетривиальное решение (см. свойства решений однородной системы). Значит, найдется ненулевой набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, являющийся решением системы (6). Но тогда $\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_m\vec{b}_m = 0$, то есть система векторов B линейно зависима. $\square$

Теорема 11. *Все базисы конечномерного пространства V содержат одинаковое число векторов.*

Доказательство. Предположим, что в пространстве V есть два базиса с различным числом векторов. Рассмотрим тот, который содержит большее количество векторов. Из леммы следует, что он является линейно зависимым. Это противоречит определению базиса. Следовательно, наше предположение неверно, и число векторов во всех базисах пространства V одинаково. $\square$

Определение 26. *Количество векторов в любом из базисов линейного вектороного пространства V называется его размерностью и обозначается* $\dim V$.

Замечание. Пространство, состоящее из одного нулевого вектора считается обладающим «пустым» базисом. Его размерность по определению равна нулю.

Пример. 1) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
2) Пусть V — пространство многочленов степени не выше n. Тогда $\dim V = n + 1$. В качестве базиса можно взять систему $S = \{p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2, \ldots, p_n(t) = t^n\}$.
3) Пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ бесконечномерно.

17 Скалярное произведение

Определение 27. *Скалярное произведение — это отображение* $(\cdot,\cdot): V\times V\mapsto\mathbb{R}$ *, которое каждой паре векторов сопоставляет вещественное число и обладает свойствами:*

1) $\forall x\in V\ (x,x)\geqslant 0$ *и* $(x,x)=0\Longleftrightarrow x=0$ *— положительная определенность.*

2) $\forall x,\, y\in V:(x,y)=(y,x)$ *— симметричность.*

3) $\forall x_1,\, x_2,\, y\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha(x_1,y)+\beta(x_2,y)$ *— линейность по первому аргументу.*

Замечание. Из второй и третьей аксиом следует линейность по второму аргументу

$$\forall x,\, y_1,\, y_2\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha(x,y_1)+\beta(x,y_2).$$

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ введём скалярное произведение с помощью равенства

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

Очевидно, что все три аксиомы выполнены.

Пример. В линейном пространстве многочленов на отрезке $[0,1]$ введём скалярное произведение с помощью равенства

$$(P,Q)=\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$

Например, если $P(x)=x+1$, а $Q(x)=x^2-x$, то

$$(P,Q)=\int_0^1(x+1)(x^2-x)\,dx=\int_0^1 x^3-x\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{4}.$$

Очевидно, что все три аксиомы выполнены.

Из курса аналитической геометрии нам известно, что в первом примере скалярное произведение векторов x и y можно вычислить так:

$$(x,y)=|x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi,$$

где $|x|$, $|y|$ — длины векторов x и y, а φ — угол между ними.

Пример. Найдём угол φ между векторами $x=(1,0,1)$ и $y=(1,1,0)$. Имеем $|x|=|y|=\sqrt{2}$, тогда

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Пример. Найдем угол φ между многочленами $P(x)=x$ и $Q(x)=x^2$ на отрезке $[-1,1]$.

$$|P(x)|=\sqrt{\int_{-1}^1(P(x))^2dx}=\sqrt{\int_{-1}^1 x^2dx}=\sqrt{\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^1}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$|Q(x)|=\sqrt{\int_{-1}^1(P(x))^2dx}=\sqrt{\int_{-1}^1 x^4dx}=\sqrt{\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^1}=\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$(P(x),Q(x))=\int_{-1}^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^1=0$$

$\cos\varphi=\dfrac{(P(x),Q(x))}{|P(x)|\cdot|Q(x)|}=\dfrac{0}{\sqrt{4/15}}=0\Longleftrightarrow\varphi=0$, следовательно, многочлены «перпендикулярны».

18 Скалярное произведение в декартовых координатах

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ всех $n-$мерных действительных векторов вида $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Введем скалярное произведение по правилу:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Проверим выполнение аксиом:
1) $(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
2) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n = (\vec{y}, \vec{x})$.
3) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) z_n = \alpha(x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n) +$
$+\beta(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n) = \alpha(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z})$.

Теорема 12 (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}).$$

Доказательство. Если $\vec{x} = 0$, то обе части неравенства обращаются в ноль, и неравенство очевидно. Пусть $\vec{x} \neq 0$, тогда $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$. Возьмем произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$ и запишем цепочку преобразований, пользуясь аксиомами скалярного произведения:

$$0 \leq (\lambda\vec{x} + \vec{y}, \lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda^2(\vec{x}, \vec{x}) + \lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda(\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) = \lambda^2(\vec{x}, \vec{x}) + 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}).$$

Получили квадратный трехчлено относительно λ вида $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$, где $a = (\vec{x}, \vec{x})$, $b = (\vec{x}, \vec{y})$, $c = (\vec{y}, \vec{y})$. Этот трехчлен принимает только неотрицательные значения, его старший коэффициент положителен, следовательно, дискриминант должен быть неположительным:

$$0 \geq D/4 = b^2 - ac = (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}).$$

□

19 Процесс ортогонализации Грама — Шмидта

Определение 28. *Система векторов* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ *в линейном векторном пространстве* V *называется ортонормированной, если любые два вектора системы ортогональны друг другу:* $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ *при* $i \neq j$, *и все векторы нормированы:* $(\vec{x}_j, \vec{x}_j) = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $S = \{\vec{x}_k\}_{k=1}^n$ — произвольная линейно независимая система векторов пространства V. Покажем, что ее можно привести к ортонормированной системе S' с помощью *процесса ортогонализации Грама — Шмидта*, не меняя линейной оболочки, т.е. $Lin\{S\} = Lin\{S'\}$:

1. положим $\vec{\varphi}_1 = a_{11}\vec{x}_1$, где число a_{11} определяется из условия

$$(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_1) = a_{11}^2(\vec{x}_1, \vec{x}_1) = 1, \quad \text{следовательно,} \quad a_{11} = \frac{\pm 1}{(\vec{x}_1, \vec{x}_1)}.$$

2. Далее действуем по индукции. Пусть построены $\vec{\varphi}_1$, ... , $\vec{\varphi}_{n-1}$ такие, что

$$\vec{\varphi}_k = a_{k1}\vec{x}_1 + \cdots + a_{kk}\vec{x}_k, \quad a_{kk} \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n-1; \qquad (7)$$

$$\vec{x}_k = b_{k1}\vec{\varphi}_1 + \cdots + b_{kk}\vec{\varphi}_k, \quad b_{kk} \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n-1; \qquad (8)$$

   причем $\{\vec{\varphi}_1, \ldots \vec{\varphi}_{n-1}\}$ — ортонормированная система.

3. Тогда запишем уравнение на числа b_{nk} и вектор $\vec{h}_n$

$$\vec{x}_n = b_{n1}\vec{\varphi}_1 + \cdots + b_{n,n-1}\vec{\varphi}_{n-1} + \vec{h}_n,$$

где мы хотим добиться равенств $(\vec{h}_n, \vec{\varphi}_k) = 0$ для всех $k = 1, \dots, n-1$. Коэффициенты b_{nk} и вектор $\vec{h}_n$ определяются из условий

$$0 = (\vec{h}_n, \vec{\varphi}_k) = (\vec{x}_n - b_{n1}\vec{\varphi}_1 - b_{n2}\vec{\varphi}_2 - \dots - b_{n,n-1}\vec{\varphi}_{n-1}, \vec{\varphi}_k) = (\vec{x}_n, \vec{\varphi}_k) - b_{nk}.$$

Значит, $b_{nk} = (\vec{x}_n, \vec{\varphi}_k)$, $k = 1, \dots, n-1$. Теперь вектор $\vec{h}_n$ также определяется однозначно. Заметим, что $\vec{h}_n \neq 0$ (иначе система $\{\vec{x}_k\}$ была бы линейно зависимой). Положим $\vec{\varphi}_n = \frac{\vec{h}_n}{(\vec{h}_n, \vec{h}_n)}$. Теперь $\vec{\varphi}_n$ нормирован и перпендикулярен всем $\vec{\varphi}_k$ с $k < n$, а равенство (8) выполнено для $k = n$. С другой стороны,

$$\vec{\varphi}_n = \frac{\vec{x}_n - b_{n,1}\vec{\varphi}_1 - \dots - b_{n,n-1}\vec{\varphi}_{n-1}}{(\vec{h}_n, \vec{h}_n)},$$

и заменяя здесь все $\vec{\varphi}_k$ с $k < n$ на суммы (7), получим равенство (7) для $\vec{\varphi}_n$

В итоге получаем ортонормированную систему $\{\vec{\varphi}_k\}_{k=1}^n$. При этом, равенства (7) показывают, что любая линейная комбинация векторов $\vec{\varphi}_k$ есть линейная комбинация векторов $\vec{x}_k$, а равенства (8) показывают, что верно и обратное. Это означает, что $Lin\{S\} = Lin\{S'\}$.

Пример. Применим процесс ортогонолизации к системе векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ в пространстве $\mathbb{R}^4$, где $\vec{x}_1 = (1, 0, -1, 1)^T$, $\vec{x}_2 = (0, 2, 1, 1)^T$, $\vec{x}_3 = (-1, 1, 0, 0)^T$. Прежде всего, проверим, что эта система является линейно независимой. Для этого запишем координаты векторов как строки матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что у матрицы A есть ненулевой минор третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 1 - 0 - 0 = -2 \neq 0,$$

следовательно, $\operatorname{rang} A = 3$. Значит, матрица A имеет три линейно независимые строки, то есть векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ линейно независимы. Проведем процесс ортогонализации.

1. Положим $\vec{\varphi}_1 = a_{11}\vec{x}_1$, где число $a_{11} = \dfrac{1}{(\vec{x}_1, \vec{x}_1)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Получим, что $\vec{\varphi}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}},\right)^T$.

2. Запишем $\vec{x}_2 = b_{21}\vec{\varphi}_1 + \vec{h}_2$, где $b_{21} = (\vec{x}_2, \vec{\varphi}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 0$, следовательно, $\vec{h}_2 = \vec{x}_2$. Отсюда $\vec{\varphi}_2 = \dfrac{\vec{x}_2}{(\vec{x}_2, \vec{x}_2)} = \left(0, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$.

3. Наконец, $\vec{x}_3 = b_{31}\vec{\varphi}_1 + b_{32}\vec{\varphi}_2 + \vec{h}_3$, где $b_{31} = (\vec{x}_3, \vec{\varphi}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $b_{32} = (\vec{x}_3, \vec{\varphi}_2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$. Значит,

$$\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пронормируем вектор $\vec{h}_3$, получим $\vec{x}_3 = \dfrac{\vec{h}_3}{(\vec{h}_3, \vec{h}_3)} = \dfrac{\vec{h}_3}{1} = \vec{h}_3$. Окончательно получаем ортонормированную систему: $\{\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \vec{\varphi}_3\}$, где

$$\vec{\varphi}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \quad \vec{\varphi}_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \quad \vec{\varphi}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)^T.$$

Лекция 6

20 Комплексные числа

Определение 29. *Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y — действительные числа, i — мнимая единица. Число x называется действителной частью комплексного числа z и обозначается* $\operatorname{Re} z$. *Число y называется мнимой частью числа z и обозначается* $\operatorname{Im} z$.

Можно воспринимать любое комплексное число как *упорядоченную пару* (x, y) двух вещественных чисел. Ниже будут введены арифметические операции над комплексными числами, с помощью которых будет определен объект «мнимая единица».

- Если $x = 0$, $y \neq 0$, то $z = x + iy$ называется чисто мнимым числом.
- Если $y = 0$, то $z = x$ — действительное число.
- Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, $z = 0$, если $x = 0$, $y = 0$.
- Множество комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.
- Геометрическое представление комплексного числа: $z = x + iy$ — это точка M на плоскости с координатами (x, y). Часто удобно ставить в соответствие комплексному числу вектор $\vec{OM}$ Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + i \cdot 0 = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно действительной и мнимой осями.

21 Арифметические операции над комплексными числами

1) **Сумма (разность)** комплексных чисел. По определению: $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$.

   Свойства операции сложения:

   a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — коммутативность;
   b) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ — ассоциативность;
   c) $\exists!\, 0_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}, 0_{\mathbb{C}} = 0 + i \cdot 0 : \forall z \in \mathbb{C}\ \ z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = 0$ (далее $0_{\mathbb{C}}$=0) — нейтральный элемент;
   d) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy, \quad \exists!(-z) \in \mathbb{C} : z + (-z) = 0$ — обратный элемент. Легко видеть, что $-z = -x - iy$.

2) **Произведение** комплексных чисел. По определению: $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i \cdot (x_1y_2 + x_2y_1)$.

   Замечание. $i^2 = i \cdot i = (0 + i \cdot 1) = -1 + i \cdot 0 = -1$. Таким образом, можем воспринимать комплексные числа как алгебраические двучлены с обычными арифметическими операциями, если положить по определению $i^2 = -1$.

   Свойства операции умножения:

   a) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ — коммутативность.
   b) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ — ассоциативность.
   c) $\exists!\, 1_{\mathbb{C}} = 1 + i \cdot 0 : \forall z \in \mathbb{C}\ \ z \cdot 1_{\mathbb{C}} = z$ (далее $1_{\mathbb{C}} = 1$) — нейтральный элемент.

d) $\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy \neq 0,\ \ \exists! z^{-1} : z \cdot z^{-1} = 1$ — обратный элемент. Проверим, что

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Действительно, $z \cdot z^{-1} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + i \cdot \dfrac{-xy+xy}{x^2+y^2} = 1 + i \cdot 0 = 1.$

3) **Деление** комплексных чисел ($z_2 \neq 0$).:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1)(x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2)(x_2 - i \cdot y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i \cdot (x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Замечание. Операции сложения и умножения связаны свойством дистрибутивности:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Пример. Пусть $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 + 2i$. Тогда

$$z_1 + z_2 = (2+i) + (1+2i) = 3 + 3i;$$

$$z_1 - z_2 = (2+i) - (1+2i) = 1 - i;$$

$$z_1 z_2 = (2+i) \cdot (1+2i) = 2 + 4i + i + 2i^2 = 2 - 2 + 5i = 5i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{1+2i} = \frac{(2+i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{2+i-4i-2i^2}{1-4i^2} = \frac{4-3i}{5} = 0,8 - 0,6i.$$

22 Комплексно сопряжённые числа

Определение 30. *Два комплексных числа называются комплексно сопряжёнными, если их действительные части равны, а мнимые противоположны по знаку. Число, сопряжённое числу $z = a + bi$, обозначается как $\overline{z} = a - bi$.*

Свойства операции комплексного сопряжения:

1) Сумма и произведение двух комплексно сопряжённых чисел являются действительными числами:

$$z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a \in \mathbb{R} \qquad \text{и} \qquad z \cdot \overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

2) Произведение двух комплексно сопряжённых чисел является квадратом модуля любого из этих чисел:

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2.$$

3) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

5) $\overline{\overline{z}} = z$.

23 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Запись $z = x + iy$ обычно называют *алгебраической формой* записи комплексного числа z. Это форма не всегда является удобной. В частности, как мы видим, операции умножения и деления выглядят довольно громоздко. Еще более сложно возводить в степень и извлекать корни из комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.

Рассмотрим другой способ записи комплексных чисел. Обозначим через φ и r ($r \geq 0$) полярные координаты точки $M(x, y)$, считая начало координат полюсом, а положительное направление оси Ox — полярной осью. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Следовательно, комплексное число можно представить в форме:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Это выражение называется **тригонометрической формой комплексного числа**.

- Радиус–вектор $\vec{OM}$, длина которого равна r, называется **модулем** комплексного числа $z = x + iy$. Обозначается: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Угол φ, образованный радиус–вектором $\vec{OM}$ и положительным направлением оси OX, называется **аргументом** комплексного числа z. Обозначается: $\operatorname{Arg} z := \left\{\varphi : \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \sin\varphi = \dfrac{y}{r}\right\}$.

Замечание. $\operatorname{Arg} z$ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, где $k \in Z$. Из значений $\operatorname{Arg} z$ выделяется главное значение $\arg z$ такое, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $k \in Z$. По умолчанию обычно полагают, что $\arg z \in (-\pi, \pi]$. $\operatorname{Arg} 0$ не определен.

Пример. $\arg 2 = 0$; $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arg(1 - i) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Свойства модулей и аргмуентов комплексных чисел.

1. При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиус–векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.
2. Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а его аргумент — сумме (разности) аргументов этих чисел.

   Действительно, пусть $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_1(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

   (применили тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы). Далее,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

   согласно тригонометрическим формулам косинуса и синуса разности.

3. При возведении комплексного числа в натуральную степень n его модуль возводится в степень n, а аргумент увеличивается в n раз.

   Действительно, пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда согласно правилу умножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеем:

$$z^n = z\cdot z\cdot\ldots\cdot z = (r\cdot r\cdot\ldots\cdot r)(\cos(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)).$$

Извлечение корня $n-$й степени из комплексного числа. Пусть известно, что $\zeta^n = z$, где[4]

$$\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Задача: зная r и φ, найти ρ и ψ, то есть извлечь корень $n-$й степени из числа z. Заметим сразу, что эта задача не такая простая, как возведение в степень. Запишем соответствующие уравнения:

$$\rho^n = r, \qquad \cos(n\psi) = \cos\varphi, \quad \sin(n\psi) = \sin\varphi.$$

Модуль находится однозначно: поскольку r и ρ — неотрицательные числа, то $\rho = \sqrt[n]{r}$. С аргументом сложнее: из того, что у некоторых двух углов совпадают синус и косинус не следует, вообще говоря, что эти углы совпадают. Они могут отличаться на $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad \text{следовательно,} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Значит, аргумент ψ определяется не единственным образом. Сколько различных значений может принимать ψ? Поскольку при добавлении целого числа периодов 2π к аргументу точка на плоскости переходит в себя, то количество различных значений будет равняться n: $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, окончательный ответ следующий: *корень из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ определен не однозначно. Существуют n различных комплексных чисел $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$, каждое из которых является значением корня $n-$й степени из z*:

$$\zeta_k^n = z, \qquad \zeta_k = \sqrt[n]{r}(\cos\psi_k + i\sin\psi_k), \qquad \psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда следует, что $\sqrt[n]{z}$ является *многозначной функцией*. Подробно такие функции будут изучаться в курсе комплексного анализа.
Пример. Вычислим $\sqrt[4]{1}$. Запишем в тригонометрической форме $1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$, тогда $r = 1$, $\varphi = 0$. Значит, $\rho = 1$, $\psi = \dfrac{2\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Таким образом,

$$\zeta_0 = 1, \quad \zeta_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad \zeta_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \quad \zeta_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Заметим, что если изобразить полученные четыре точки на плоскости и последовательно соединить друг с другом, то получим квадрат. Вообще, корни $n-$й степени из числа $z \neq 0$ всегда образуют на плоскости правильный $n-$угольник.

24 Показательная форма записи комплексного числа

Есть еще один способ записи комплексных чисел — он удобен тем, что является наиболее компактным и позволяет легко работать с операциями возведения в степень и извлечения корня. Это способ записи числа в *показательной форме.* Основан на следующей идее: мы знаем, что для любого вещественного числа x справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$. Оказывается (это

[4]Случай $z = 0$ тривиален — получаем $\zeta = 0$.

будет строго доказано в курсе комплексного анализа), что аналогичный факт справедлив и для комплексных чисел: для любого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ выполнено $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$. Положим по определению: $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. При этом, очевидно, если $z = x + i\cdot 0$ — действительное число, то $e^z = e^x$. Более того, функция e^z обладает свойствами, аналогичными свойствам обычной экспоненты:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}, \quad (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1\cdot z_2}.$$

Положим теперь $z = i\varphi$, тогда $e^z = e^0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, следовательно,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad - \quad \text{формула Эйлера.}$$

Приходим к показательной форме записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Отсюда и из свойств операций над комплексными числами в тригонометрической форме сразу получаем, что

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad z_1 : z_2 = r_1 : r_2 e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пример. Решим уравнение $z^2 = 3 - 4i$.
Запишем число $3 - 4i = re^{i\varphi}$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{3^2+4^2} = 5, \qquad \cos\varphi = \frac{3}{5}, \qquad \sin\varphi = -\frac{4}{5}.$$

Тогда $|z| = \sqrt{r} = \sqrt{5}$, а $\operatorname{Arg} z = \{\varphi/2 + \pi k\}$. Мы помним, что корней должно быть два. Впрочем, второй корень отличается от первого всего лишь знаком, так что можно сосредоточиться на случае $\arg z = \varphi/2 \in (-\pi, \pi]$. Теперь небольшое упражнение по тригонометрии:

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\cos\varphi + 1}{2} = \frac{4}{5}, \qquad \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1-\cos\varphi}{2} = \frac{1}{5}.$$

Определимся со знаками: число $3 - 4i$ лежит в четвертой четверти, т.е. $\varphi \in (-\pi/2, 0)$, а значит, $\cos(\varphi/2) > 0$, $\sin(\varphi/2) < 0$. Окончательно,

$$z = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \pm\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{i}{\sqrt{5}}\right) = \pm(2-i).$$

Лекция 7

25 Алгебра многочленов

Определение 31. *Многочленом называется функция вещественной переменной x вида*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \text{где} \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Число n называется степенью многочлена $P(x)$. Пишут $\deg P(x) = n$. Если многочлен представляет из себя константу, отличную от нуля, то его степень равна нулю. Многочлен, тождественно равный нулю, называют нулевым многочленом. Его степень не определена (иногда полагают, что степень нулевого многочлена равна $-\infty$).

Теорема 13. *Многочлены $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ совпадают при любом значении переменной x тогда и только тогда, когда у них равны все коэффициенты при соответствующих степенях: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_n = b_n$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $R(x) = P(x) - Q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. Если у многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны все коэффициенты при соответствующих степенях, то у многочлена $R(x)$ все коэффициенты равны нулю, следовательно, он принимает нулевые значения при всех значениях переменной x. Но это и означает, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают при всех значениях x.

Докажем обратное. Пусть многочлен $R(x)$ принимает значение 0 при всех значениях переменной x. Возьмем произвольные различные вещественные числа[5] x_1, x_2, ... , x_{n+1} и запишем равенства $R(x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n+1$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n = 0, \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \ldots + c_n x_2^n = 0, \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ c_0 + c_1 x_{n+1} + c_2 x_{n+1}^2 + \ldots + c_n x_{n+1}^n = 0. \end{cases}$$

Получили систему из $n+1$ линейного уравнения относительно $n+1$ неизвестного c_0, c_1, ... , c_{n+1}. Ее определитель равен

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Это так называемый *определитель Вандермонда*, он обозначается $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ и равен

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j). \tag{9}$$

Поскольку в нашем случае все числа x_1, x_2, ... , x_{n+1} различны, то $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \neq 0$. Значит, однородная система имеет единственное тривиальное решение, то есть $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. □

Теорема 14 (деление многочленов с остатком)**.** *Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, причем многочлен $Q(x)$ не является тождественно нулевым. Тогда найдется такой многочлен $T(x)$ (возможно, тождественно нулевой), для которого будет выполнено равенство*

$$P(x) = T(x)Q(x) + R(x), \quad \text{где} \quad R(x) - \text{многочлен}, \quad \deg R(x) < \deg Q(x).$$

При этом многочлены $T(x)$ и $R(x)$ определены однозначно.

---

[5] Можно пойти другим путем. Подставим $x = 0$ и увидим, что $c_0 = R(0) = 0$. Продифференцируем $R(x)$ и получим $R'(x) = nx^{n-1} + \ldots + c_1 \equiv 0$, т.к. производная тождественно нулевой функции вновь есть тождественный ноль. Подставим опять точку 0 и получим $c_1 = R'(0) = 0$. Снова продифференцируем, подставим $x = 0$ и получим $2c_2 = R''(0) = 0$. Проделав это n раз, увидим, что все $c_k = 0$.

Нахождение таких многочленов $T(x)$ и $R(x)$ называется *делением с остатком* многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$. Многочлен $T(x)$ называется *неполным частным*, $R(x)$ — *остатком*. Возможно, $R(x) \equiv 0$, тогда говорят, что многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $Q(x)$, а многочлен $T(x)$ называют *частным* от деления.

Доказательство. Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то можно взять $T(x) \equiv 0$, $R(x) = P(x)$.

Пусть $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, тогда

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0, \quad n \geq m.$$

Рассмотрим многочлен

$$P_1(x) = P(x) - T_1(x)Q(x), \quad \text{где} \quad T_1(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.$$

Очевидно, что $\deg P_1(x) \leq n-1$. Если $\deg P_1(x) < m$, то положим $T(x) = T_1(x)$, $R(x) = P_1(x)$.

Если нет, то применим к многочлену $P_1(x)$ рассуждения, аналогичные приведенным выше, и получим многочлены $T_2(x)$ и $P_2(x)$. И так далее, за конечное число шагов получим многочлены $T_k(x)$ и $P_k(x)$ такие, что

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) - T_k(x)Q(x), \quad \deg P_k(x) < \deg Q(x).$$

Тогда положим

$$R(x) = P_k(x), \quad T(x) = T_1(x) + \ldots + T_{k-1}(x) + T_k(x).$$

Покажем, что многочлены $T(x)$ и $R(x)$ определены однозначно. Пусть

$$P(x) = T(x)Q(x) + R(x) = \widetilde{T}(x)Q(x) + \widetilde{R}(x).$$

Тогда $R(x) - \widetilde{R}(x) = (T(x) - \widetilde{T}(x))Q(x)$. Предположим, что $T(x) \neq \widetilde{T}(x)$, тогда

$$\deg(R(x) - \widetilde{R}(x)) = \deg((T(x) - \widetilde{T}(x))Q(x)) \geq \deg Q(x),$$

что противоречит построению многочлена $R(x)$.

Значит, $T(x) = \widetilde{T}(x)$, тогда $R(x) = \widetilde{R}(x)$. Единственность доказана. □

Пример. Разделим с остатком многочлен $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ на многочлен $Q(x) = x^2 - x + 1$. Положим $T_1(x) = 2x^3$. Тогда

$$P_1(x) = P(x) - T_1(x)Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 - (2x^5 - 2x^4 + 2x^3) = -x^4 - x^3 - x^2 + x + 2.$$

Степень $P_1(x)$ больше, чем у $Q(x)$, поэтому продолжаем процесс: $T_2(x) = -x^2$,

$$P_2(x) = P_1(x) - T_2(x)Q(x) = -x^4 - x^3 - x^2 + x + 2 - (-x^4 + x^3 - x^2) = -2x^3 + x + 2.$$

Степень $P_2(x)$ больше, чем степень $Q(x)$, поэтому положим $T_3(x) = -2x$,

$$P_3(x) = P_2(x) - T_3(x)Q(x) = -2x^3 + x + 2 - (-2x^3 + 2x^2 - 2x) = -2x^2 + 3x + 2.$$

Степень $P_3(x)$ равна степени $Q(x)$, значит, $T_4(x) = -2$,

$$P_4(x) = P_3(x) - T_4(x)Q(x) = -2x^2 + 3x + 2 - (-2x^2 + 2x - 2) = x + 4.$$

Значит, $P(x) = T(x)Q(x) + R(x)$, где $T(x) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 2$, $R(x) = P_4(x) = x + 4$.

Заметим, что гораздо быстрее и компактнее оформлять процесс деления как стандартное деление «уголком».

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -3x^4 & +x^3 & -x^2 & +x & +2 & x^2-x+1 \\ \cline{7-7}
2x^5 & -2x^4 & +2x^3 & & & & 2x^3-x^2-2x-2 \\ \cline{1-3}
 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & +x & +2 & \\
 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^3 & & +x & +2 & \\
 & & -2x^3 & +2x^2 & -2x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x^2 & +3x & +2 & \\
 & & & -2x^2 & +2x & -2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & x & +4 &
\end{array}
$$

Следствие 1 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на линейный двучлен $(x-c)$ равен $P(c)$.*

Доказательство. Положим в теореме $Q(x) = x - c$. Тогда $\deg R(x) = 0$, то есть $R(x) = R \in \mathbb{R}$. Значит,

$$P(x) = T(x)(x-c) + R, \quad \text{следовательно,} \quad P(c) = R.$$

□

Определение 32. *Число $c \in \mathbb{R}$ называется (вещественным) корнем многочлена $P(x)$, или алгебраического уравнения $P(x) = 0$, если выполняется равенство $P(c) = 0$.*

Следствие 2. *Число $c \in \mathbb{R}$ является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на двучлен $(x - c)$.*

Теорема 15. *Число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.*

Доказательство. Пусть c_1 — корень многочлена $P(x)$. Тогда $P(x)$ делится на $x - c_1$, то есть $P(x) = (x - c_1)P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен. Далее, пусть c_2 — корень многочлена $P_1(x)$, тогда $P_1(x) = (x - c_2)P_2(x)$, где $P_2(x)$ — многочлен. И так далее, наконец получаем, что

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_m)Q(x), \tag{10}$$

где многочлен $Q(x)$ не имеет вещественных корней. Значит, степень многочлена $P(x)$ больше или равна, чем степень многочлена $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_m)$, то есть $\deg P(x) \geq m$. При этом числа c_1, ... , c_m являются корнями многочлена $P(x)$ (поскольку $P(c_k) = 0$, $k = 1, \ldots, m$), и других корней у $P(x)$ нет. □

Определение 33. *Корень c многочлена $P(x)$ называется простым, если $P(x)$ делится на $(x-c)$, но не делится на $(x - c)^2$.*

Корень c многочлена $P(x)$ называется кратным, если существует натуральное число $k \geq 2$ такое, что $P(x) = (x - c)^k Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен $Q(c) \neq 0$. Число k в этом случае называется кратностью корня k.

Пример. Многочлен $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$ можно разложить на множители:

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)^2(x-2).$$

Значит, он имеет простой корень $c_1 = 2$ и два корня кратности 2: $c_2 = c_3 = -1$, $c_4 = c_5 = 1$.

Теорема 16. *Число корней ненулевого многочлена с учетом их кратности (т. е. каждый корень считается столько раз, какова его кратность) не превосходит степени многочлена. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда многочлен разлагается на линейные множители.*

Доказательство. Пусть многочлен $P(x)$ имеет корни $c_1, \dots, c_m$ (возможно, не все они различны). Перепишем равенство (10) в виде

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_j)^{k_j}Q(x),$$

где $c_1 = \dots = c_{k_1} = \alpha_1$, $c_{k_1+1} = \dots = c_{k_1+k_2} = \alpha_2$, ... , $c_{k_1+\dots+k_{j-1}} = \dots = c_m = \alpha_j$, а все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ различны (объединили вместе скобки с кратными корнями). Отсюда сразу видим, что число корней многочлена $P(x)$ с учетом кратности равно m, что не превосходит степени n многочлена $P(x)$. При этом $m = n$ тогда и только тогда, когда $\deg Q(x) = 0$, то есть когда $P(x)$ разлагается на линейные множители. □

Заметим, что многочлен положительной степени может вовсе не иметь вещественных корней. Например, у многочлена x^2+1 нет корней, принадлежащих $\mathbb{R}$ (в таком случае говорят, что многочлен *не имеет корней над полем вещественных чисел* $\mathbb{R}$). Ситуация меняется, если вместо вещественных чисел $\mathbb{R}$ рассмотреть комплексные числа $\mathbb{C}$. Над полем комплексных чисел многочлен x^2+1 имеет два корня: $\pm i$. Справедлив общий факт:

Теорема 17 (основная теорема алгебры; без доказательства). *Над полем комплексных чисел любой многочлен (с вещественными или комплексными коэффициентами) положительной степени имеет хотя бы один корень.*

Следствие 3. *Любой многочлен степени $n \geq 1$ над полем комплексных чисел имеет ровно n корней.*

Доказательство. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n. По основной теореме алгебры, у него есть комплексный корень α_1. Тогда $P(x)$ делится на $x-\alpha_1$ без остатка, т.е. $P(x) = (x-\alpha_1)P_1(x)$, где степень многочлена P_1 равна $n-1$. Применим к нему те же рассуждения и получим $P_1(x) = (x-\alpha_2)P_2(x)$, где $\deg P_2 = n-2$. Проделаем так $n-1$ раз и получим $P(x) = (x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n-1})P_{n-1}(x)$, где $\deg P_{n-1} = n-(n-1) = 1$. Значит, $P_{n-1}(x) = a(x-\alpha_n)$ и следствие доказано. □

Пример. Пусть $P(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$. Очевидно, что у него есть корень $c_1 = 0$. Разложим на множители, получим

$$P(x) = x(x^4 + 3x^2 - 4) = xP_1(x).$$

Многочлен $P_1(x)$ обращается в ноль в точке 1, следовательно, он имеет вещественный корень $c_2 = 1$. Разделим $P_1(x)$ на двучлен $(x-1)$, получим

$$P_1(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 4) = (x-1)P_2(x).$$

Многочлен $P_2(x)$ обращается в ноль в точке -1, следовательно, имеет корень $c_3 = -1$. Разделим $P_2(x)$ на двучлен $x+1$, получим

$$P_2(x) = (x+1)(x^2+4) = (x+1)P_3(x).$$

Очевидно, что многочлен $P_3(x)$ принимает положительные значения при любом вещественном x, следовательно, он не имеет вещественных корней. Однако у него есть два комплексных корня: $c_4 = 2i$, $c_5 = -2i$.

Таким образом, многочлен $P(x)$ имеет над полем комплексных чисел 5 корней: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 2i$, $c_5 = -2i$.Его разложение на множители над полем вещественных чисел имеет вид

$$P(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+4),$$

а над полем комплексных чисел:

$$P(x) = x(x-1)(x+1)(x-2i)(x+2i).$$

Лекция 8

26 Алгебраические структуры: группы, кольца, поля

Определение 34. *Группой называется множество G с введенной на нем операцией $\circ$, обладающей следующими свойствами:*

1. *для любых a, $b \in G$ выполнено: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ — ассоциативность;*
2. *существует элемент $e \in G$ такой, что $a \circ e = e \circ a = a$ для любого $a \in G$ — существование нейтрального элемента;*
3. *для любого $a \in G$ существует $a^{-1} \in G$ такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ — существование обратного элемента.*

Группа называется абелевой (коммутативной), если для любых $a, b \in G$ выполнено: $a \circ b = b \circ a$.

Из определения сразу вытекает единственность нейтрального и обратного элементов. Действительно, пусть e_1 и e_2 — два нейтральных элемента. Тогда по определению

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$

Аналогично, пусть a_1, a_2 — два обратных элемента к элементу a. Тогда

$$a_1 = a_1 \circ e = a_1 \circ (a \circ a_2) = (a_1 \circ a) \circ a_2 = e \circ a_2 = a_2.$$

Группы, в которых групповая операция $\circ$ являестя сложением, называют *аддитивными*. Группы, в которых $\circ$ — это умножение, называют *мультипликативными*.

Примеры.

1. Числовые множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ являются аддитивными абелевыми группами. Роль нейтрального элемента в них выполняет 0, роль обратного элемента к числу a — противоположное число $(-a)$.
2. Числовые множества $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются мультипликативными абелевыми группами. Роль нейтрального элемента в них выполняет число 1, роль обратного к числу a — число $\dfrac{1}{a}$.
3. Множество векторов (плоскости или пространства) является абелевой группой относительно обычной операции сложения векторов.
4. Множество всех невырожденных квадратных матриц фиксированного размера $n \times n$ образует мультипликативную группу относительно операции умножения матриц. Роль нейтрального элемента выполняет единичная матрица E, роль обратного элемента к матрице A — обратная матрица A^{-1}. Как мы знаем, умножение матриц не коммутативно, поэтому данная группа не является абелевой.
5. Конечное множество $G = \{e, a, b, c\}$ с операцией $\circ$ будет абелевой группой, если положить по определению: e — нейтральный элемент,
$$a \circ a = e, \quad b \circ b = e, \quad c \circ c = e, \quad a \circ b = b \circ a = c, \quad a \circ c = c \circ a = b, \quad b \circ c = c \circ b = a.$$
6. Возьмем произвольное абстрактное множество E и рассмотрим систему всех его подмножеств. На этой системе введем операцию объединения $A \circ B = A \cup B$. Получим группу — ассоциативность очевидна, единицей является само множество E, так как $A \cup E = A$, а обратным элементом для A является разность $E \setminus A$.

7. На множестве $\{0,\ 1\}$ введем операцию логического сложения $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Получим группу, в которой нейтральным элементом является 0, а обратным элементом для 0 является 0, а для 1 является 1. Эту группу обозначают $\mathbb{Z}_2$.

8. На множестве $\{0,\ 1,\ 2\}$ введем обычную операцию сложения, но слегка подправим ее: $1+2 = 2+1 = 0$, $2+2 = 1$. Смысл этой операции такой — мы проводим сложение по модулю 3, т.е. вначале складываем числа, а затем вычисляем остаток от деления получившейся суммы на 3. Ассоциативность очевидна (из ассоциативности операции сложения). Нейтральным является число 0. Обратным для каждого числа k будет число $3-k$ (имеется в виду обычная разность). Эту группу обозначают $\mathbb{Z}_3$.

9. Поступим точно так же с произвольным натуральным n. Будем складывать числа $\{0,\ 1, \ldots,\ n-1\}$ по правилу: вычисляем обычную сумму, а потом находим остаток от деления ее на n. Эту группу называют *группой вычетов по модулю n* и обозначают $\mathbb{Z}_n$. Заметим, что для любого n наша группа абелева.

10. Можно поступить так же с дробными числами. Например, рассмотрим вещественные числа $x \in [0, 1]$ и введем групповую операцию по правилу: вычисляем обычную сумму, а потом находим ее дробную часть. Нейтральный элемент 0, а обратный к x есть $1 - x$.

11. Мы уже говорили о перестановках на n объектах. Поскольку природа этих объектов нам сейчас не важна, будем считать, что мы переставляем числа $\{1,\ 2, \ldots,\ n\}$. Для ясности, каждую перестановку будем записывать в *развернутом виде* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$. Логично ввести на множестве перестановок групповую операцию — перестановка $\sigma \circ \tau$ есть результат последовательного применения перестановки τ, а затем перестановки σ (в разных учебниках используются разные соглашения, но мы придерживаемся здесь чтения «справа налево»). Например, если $n = 4$ и
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
то $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Действительно, число 1 вначале поставили на место $4 = \tau(1)$, а потом с 4 места вернули на первое, т.к. $\sigma(\tau(1)) = \sigma(4) = 1$. И так со всеми остальными числами. Проверьте сами, что получилась ассоциативная операция. Нейтральным элементом является тождественная перестановка $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, а обратным элементом для каждой перестановки является перестановка, полученная чтением снизу вверх. Например, $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau$, а $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Построенную группу обозначают S_n и называют *симметрической группой степени n*.

Определение 35. *Кольцом называется множество K с операциями сложения и умножения, обладающее следующими свойствами:*

1. *относительно операции сложения K есть абелева группа (она называется аддитивной группой кольца K);*

2. *для любых $a, b, c \in K$ выполнено: $a(b+c) = ab + ac$ и $(a+b)c = ac + bc$ — дистрибутивность умножения относительно сложения;*

Кольцо называется ассоциативным, если умножение в нем ассоциативно: $(ab)c = a(bc)$, и коммутативным, если умножение в нем коммутативно: $ab = ba$. Элемент 1 кольца называется единицей, если $1a = a1 = a$ для любого $a \in K$.

Заметим, что нейтральный элемент по сложению (обозначим его 0) определен единственным образом и удовлетворяет соотношению $0a = a0 = 0$ при всех $a \in K$. Если в кольце существует единица, то она определена единственным образом (но может и не существовать).

Примеры.

1. Числовые множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ являются ассоциативными коммутативными кольцами с единицей относительно обычных операция сложения и умножения.

2. Множество $2\mathbb{Z}$ всех четных чисел является ассоциативным коммутативным кольцом без единицы.

3. Множество всех функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей относительно обычных операций поточечного сложения и умножения функций.

4. Множество всех векторов трехмерного пространства с операциями сложения и векторного умножения является неассоциативным некоммутативным кольцом.

5. На множестве матриц размера $n \times n$ введем операцию сложения и умножения, которые мы уже хорошо знаем. Получим ассоциативное, некоммутативное кольцо с единицей E — единичной матрицей.

6. На множестве $\mathbb{Z}_n$ кроме уже введенной операции сложения, введем операцию умножения: будем перемножать числа, а затем у произведения вычислять остаток от деления на n. Получим ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей 1.

Определение 36. *Полем называется ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый элемент, кроме нулевого, имеет обратный. Кольцо, состоящее из одного нуля, полем не считается.*

Примеры.

1. Числовые множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ являются полями. Кольцо $\mathbb{Z}$ полем не является: в нем обратимы только элементы ± 1.

2. Множество, состоящее из двух элементов: $\{0, 1\}$ является полем относительно операций сложения и умножения, если положить:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Кольцо матриц размера $n \times n$ полем не является (если только $n > 1$). Действительно, обратная матрица определена не для всех матриц, а только для матриц с ненулевым определителем.

4. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ является полем в точности тогда, когда n — простое число. Действительно, если $n = p \cdot q$ составное, то перемножая (в смысле $\mathbb{Z}_n$) числа p и q получаем ноль. Если бы у p был обратный элемент, то $(p^{-1}p)q = 1 \cdot q = q = p^{-1}(pq) = p^{-1} \cdot 0 = 0$ — противоречие! Если же n — простое, то никакое произведение (в смысле $\mathbb{Z}_n$) не может дать ноль. Сейчас мы докажем, что из этого следует обратимость каждого элемента.

Определение 37. *Элементы a и b кольца K называются делителями нуля, если $a \cdot b = 0$, хотя $a \neq 0$ и $b \neq 0$.*

Теорема 18. *В поле делителей нуля нет. Кольцо из конечного числа элементов, в котором нет делителей нуля, является полем.*

Доказательство. Если в поле $ab = 0$, но $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то

$$a = a \cdot 1 = a(b \cdot b^{-1}) = (ab)b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} = 0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$$

— приходим к противоречию.
Пусть K — кольцо из n элементов, не имеющее делителей нуля. Представим себе, что элемент $a \neq 0$ не имеет обратного. Составим отображение $\varphi(b) = ab$, где $b \in K$. Образ отображения φ не содержит единицы кольца e, т.е. φ — не сюръекция. Но на конечных множетвах сюръективность эквивалентна инъективности, т.е. φ — не инъекция. Тогда $ab = ac$ для некоторых $b \neq c$, а значит, $a(b - c) = 0$ — противоречие! □

Для колец с бесконечным числом элементов утверждение теоремы, вообще говоря, не является верным. Например, кольцо $\mathbb{Z}$ не имеет делителей нуля, но полем не является. Приведем еще один пример.

Пример. Рассмотрим кольцо всех функций на отрезке $[0, 1]$. Оно является коммутативным и асссоциативным, однако в нем есть делители нуля. Действительно, рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что обе они не являются нулевыми элементами кольца, однако их произведение — тождественно нулевая функция.

Определение 38. *Ненулевые элементы поля K образуют абелеву группу относительно операции умножения. Она называется мультипликативной группой поля K и обозначается K^*.*