

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»  
Факультет космических исследований

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета космических исследований  
МГУ имени М.В.Ломоносова



Д.ф.-м.н. Сазонов В.В.  
«\_\_\_\_\_» 2024 г.

## **ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА**

**(для осуществления приема на обучение по  
образовательным программам высшего образования -  
программам подготовки научных и научно-педагогических  
кадров в аспирантуре)**

**по специальности 1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ  
(по физико-математическим наукам)**

Рабочая программа утверждена  
Ученым советом факультета  
(протокол № 2  
от 27.03.2024 г.)

Москва 2024

## I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа вступительного экзамена в аспирантуру по научной специальности **1.2.2 математическое моделирование, численные методы и комплексы программ** предназначена для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования — программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре. Программа содержит основные и дополнительные вопросы к экзамену, списки литературы к основным и дополнительным вопросам, критерии оценивания.

## II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

### 1. Общая часть.

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Дифференцируемость функции одной переменной.
2. Функции многих переменных, их непрерывность и дифференцируемость. Полный дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости. Градиент, его геометрический смысл.
3. Определенный и неопределенный интеграл. Достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Несобственный интеграл (условная и абсолютная сходимость).
4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).
5. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана.
6. Функциональные ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
7. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций в степенной ряд.
8. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
9. Элементарные функции комплексного переменного:  $z^n, e^z, \frac{az+b}{cz+d}$  и отображения, которые они задают. Простейшие многозначные функции:  $\sqrt[n]{z}, \operatorname{Ln} z$ .

10. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
11. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.
12. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.
13. Линейные операторы в  $\mathbb{R}^n$ . Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора векторного пространства. Собственные значения и собственные векторы. Самосопряженные операторы.
14. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду. Закон инерции.
15. Евклидово пространство. Скалярное произведение, неравенство КБШ. Ортогональные преобразования в евклидовом пространстве и ортогональные матрицы.
16. Абстрактное гильбертово пространство. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве и их норма. Линейные операторы, норма линейного оператора.
17. Пространство  $L_2$ . Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье в пространстве  $L_2$ . Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Влияние гладкости функции на порядок коэффициентов Фурье.
18. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, системы уравнений первого порядка и уравнения  $n$ -го порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.
20. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).
21. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению.
22. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

23. Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова).
24. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

## 2. Дополнительная часть.

1. Итерационные методы решения уравнения  $f(x) = 0$  (хорд, Ньютона). Модификация на случай системы уравнений. Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применение.
2. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, оценки погрешностей. Методы Монте-Карло.
3. Итерационные методы решения задачи Коши для системы ОДУ. Явные и неявные методы. Методы Эйлера. Методы Рунге-Кутты. Схема «предиктор-корректор». Методы Адамса. Оценка погрешностей. Понятие о жестких и нежестких системах ОДУ.
4. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Теорема об устойчивости по первому приближению. Критерий Рауса-Гурвица. Запас устойчивости.
5. Понятие управляемости. Критерий управляемости для нестационарных и для стационарных систем.
6. Наблюдаемость линейных систем при наличии измерений. Критерий наблюдаемости нестационарной системы. Критерий наблюдаемости стационарной системы.
7. Понятие о методе Гаусса. Понятие о методе ортогональных вращений решения полной проблемы собственных значений. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (методы простой итерации и Зейделя).
8. Наблюдаемость линейных систем при наличии измерений. Критерий наблюдаемости нестационарной системы. Критерий наблюдаемости стационарной системы.
9. Вариация функции и вариация функционала. Общая форма необходимого условия экстремума в терминах вариации функционала. Основная лемма вариационного исчисления.
10. Необходимые условия слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с неголономными связями. Функция Лагранжа задачи минимизации функционала при наличии ограничений.
11. Определения сильного, слабого, локального, глобального экстремумов. Связь между сильным и слабым экстремумом. Необходимое условие сильного экстремума в задаче со свободным правым концом в форме

- принципа максимума. Схема доказательства с помощью одноигольчатой вариации.
12. Дифференцируемость в функциональных пространствах. Производные по направлению, по Фреше, по Гато. Связь между дифференцируемостью по Фреше и по Гато.
  13. Градиентные методы поиска экстремума. Метод градиентного спуска. Метод проекции градиента. Метод сопряженных градиентов.
  14. Метод стрельбы решения систем уравнений. Метод стрельбы решения краевой задачи. Краевая задача принципа максимума и метод стрельбы её решения.
  15. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.
  16. Структура и состав вычислительной системы (аппаратура + программное обеспечение). Физические и виртуальные ресурсы. Управление ресурсами в вычислительной системе. Потoki управляющей информации и данных в вычислительной системе. Проблемы дисбаланса производительности компонентов вычислительной системы и аппаратно-программные решения, предназначенные для сглаживания этого дисбаланса. Кеширование информационных потоков в вычислительной системе.
  17. Парадигмы программирования (функциональное, императивное, объектно-ориентированное программирование).
  18. Базы данных. Основные понятия реляционной модели данных. Реляционная алгебра. Средства запросов SQL.
  19. Операционные системы, основные функции. Типы операционных систем. Организация управления и взаимодействия процессов в Операционной системе. Модели и средства синхронизации. Программирование взаимодействующих процессов. Модели организации и управления ОЗУ.
  20. Архитектура многопроцессорных вычислительных систем. Графовая модель представления параллельных алгоритмов. Принципы построения параллельных программ с использованием технологий MPI и OpenMP.

### **III. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА**

Вступительный экзамен состоит из письменной и устной частей. Письменная часть включает пять задач по темам из списка вопросов. Устная часть включает в себя экзаменационный билет и собеседование по реферату по тематике будущего диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат предполагаемого научного руководителя)

## IV. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста (за основу принимается шрифт Times New Roman, 14 pt, полуторный межстрочный интервал). Реферат сопровождается отзывом предполагаемого научного руководителя, содержащим характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

## V. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов.

**Вопрос 1.** Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором.

**Вопрос 2.** Метод стрельбы решения систем уравнений. Метод стрельбы решения краевой задачи. Краевая задача принципа максимума и метод стрельбы её решения.

При формировании билетов первый вопрос билета выбирается из списка основных вопросов, второй – из списка дополнительных вопросов программы.

## VI. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 1. ЛИТЕРАТУРА К СПИСКУ ОСНОВНЫХ ВОПРОСОВ

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа, часть 1 и часть 2. М.: Физматлит, 2005 (часть 1) и 2002 (часть 2).
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, часть 1 и часть 2. М.: Дрофа, 2003 (часть 1) и 2004 (часть 2).
3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2008.
7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Изд-во МЦНМО, 1998.

8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2006.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
10. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: ГИТТЛ, 1956.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
13. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.
14. Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
17. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1 и том 2. М.: ГИФМЛ, 1962 (том 1) и 1959 (том 2).  
Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
18. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2010.
19. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986.
20. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
21. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

## 2. ЛИТЕРАТУРА К СПИСКУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. Москва: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2005. 376 с.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.
4. Григорьев К.Г., Григорьев И.С., Заплетин М.П. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления (<http://mech.math.msu.su/~iliagri/prak2007.htm>). М.: Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ Москва, 2007

5. В.В.Александров, С.С. Лемак, Н.А. Парусников. Лекции по механике управляемых систем М.: МАКСПресс, 2012, 240 с.
6. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
7. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.
8. Корухова Л.С., Шура-Бура М.Р. Введение в алгоритмы. Учебное пособие для студентов I курса, 2-е исправленное издание. — М. Издательский отдел факультета ВМиК МГУ (лицензия ИД № 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2010, <http://sp.cmc.msu.ru/info/1/vvedalg.pdf>
9. Э. Таненбаум, Т. Остин, Архитектура компьютера. 6-е издание, СПб: Питер, 2013.
10. Операционные системы. У. Столингс. Вильямс. 2002.
11. Э. Таненбаум, Х. Бос Современные операционные системы. 4-е издание, СПб: Питер, 2015.
12. Т. Пратт. М. Зелкович. Языки программирования. Разработка и реализация 4-е издание, СПб: Питер, 2002.
13. В. Ш. Кауфман. Языки программирования. Концепции и принципы. - М.: ДМК-Пресс, 2010.
14. К. Дейт. Введение в системы баз данных. М: Вильямс, 2006.
15. В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин "Параллельные вычисления", БХВ-Петербург, 2002, 608с.
16. А.С. Антонов Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP: Учеб пособие. Предисл. : В.А. Садовничий - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012. – 344 с. - (Серия "Суперкомпьютерное образование").

## VII. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Письменная часть экзамена оценивается по пятибалльной шкале. За каждую задачу абитуриент получает максимум 1 балл.

Устная часть экзамена оценивается по пятибалльной шкале как среднее арифметическое оценок за каждый из вопросов билета и за собеседование по реферату (минимальный балл за каждый вопрос равен 0, максимальный балл равен 5).

Таким образом, уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале.

При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Экзаменаторы дополнительно к вопросам билета могут задать вопросы по программе экзамена. Результаты сдачи вступительного экзамена сообщаются поступающим в течение трех дней со



дня проведения экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если поступающий получил семь баллов и выше.

### **VIII. АВТОРЫ**

д.ф.-м.н. А.М. Савчук, д.ф.-м.н. И.В. Садовнича, д.ф.-м.н. В.В. Сазонов,  
к.ф.-м.н. В.Е. Владыкина, к.ф.-м.н. И.А. Самыловский.