

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»  
Факультет космических исследований

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета космических исследований  
МГУ имени М.В. Ломоносова



Д.Ф.М.Н. Сазонов В.В.

«                    »                    2024 г.

## **ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА**

**(для осуществления приема на обучение по  
образовательным программам высшего образования -  
программам подготовки научных и научно-педагогических  
кадров в аспирантуре)**

**по специальности 1.1.7. Теоретическая механика, динамика  
машин  
(по физико-математическим наукам)**

Рабочая программа утверждена  
Ученым советом факультета  
(протокол № 2  
от 27.03.2024 г.)

# I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа вступительного экзамена в аспирантуру по научной специальности **1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин** предназначена для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования — программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре. Программа содержит основные и дополнительные вопросы к экзамену, списки литературы к основным и дополнительным вопросам, критерии оценивания.

## II. ОСНОВНЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

### 1. Общая часть

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Дифференцируемость функции одной переменной.
2. Функции многих переменных, их непрерывность и дифференцируемость. Полный дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости. Градиент, его геометрический смысл.
3. Определенный и неопределенный интеграл. Достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Несобственный интеграл (условная и абсолютная сходимость).
4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).
5. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана.
6. Функциональные ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
7. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций в степенной ряд.
8. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
9. Элементарные функции комплексного переменного:  $z^n, e^z, \frac{az+b}{cz+d}$  и отображения, которые они задают. Простейшие многозначные функции:  $\sqrt[n]{z}, \text{Ln } z$ .
10. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

11. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.
12. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.
13. Линейные операторы в  $\mathbb{R}^n$ . Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора векторного пространства. Собственные значения и собственные векторы. Самосопряженные операторы.
14. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду. Закон инерции.
15. Евклидово пространство. Скалярное произведение, неравенство КБШ. Ортогональные преобразования в евклидовом пространстве и ортогональные матрицы.
16. Абстрактное гильбертово пространство. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве и их норма. Линейные операторы, норма линейного оператора.
17. Пространство  $L_2$ . Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье в пространстве  $L_2$ . Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Влияние гладкости функции на порядок коэффициентов Фурье.
18. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, системы уравнений первого порядка и уравнения  $n$ -го порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.
20. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).
21. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению.
22. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.
23. Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова).
24. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

## 2. Дополнительная часть

1. Угловая скорость абсолютно твердого тела. Формула Эйлера для поля скоростей точек абсолютно твердого тела. Теоремы сложения скоростей и ускорений в сложном движении точки; ускорение Кориолиса. Теорема сложения угловых скоростей.
2. Инерциальные системы отсчета, принцип относительности Галилея. Принцип детерминированности для системы материальных точек. Аксиома освобождения от связей. Идеальные связи. Принцип Даламбера–Лагранжа. Движение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета. Силы инерции.
3. Внутренние и внешние силы для системы материальных точек. Заданные силы и реакции связей. Теоремы об изменении импульса, кинетического момента и кинетической энергии системы материальных точек. Законы сохранения.
4. Задача Кеплера о движении материальной точки в гравитационном поле неподвижного притягивающего центра. Классификация орбит в зависимости от значения постоянной интеграла энергии. Первая и вторая космические скорости.
5. Движение точки относительно Земли с учетом вращения Земли: вес, падение точки. Маятник Фуко.
6. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Теорема об устойчивости по первому приближению. Критерий Рауса–Гурвица. Запас устойчивости.
7. Понятие управляемости. Критерий управляемости для нестационарных и для стационарных систем.
8. Плоская ограниченная круговая задача трех тел. Точки либрации, исследование их устойчивости.
9. Понятие о методе Гаусса. Понятие о методе ортогональных вращений решения полной проблемы собственных значений. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (методы простой итерации и Зейделя).
10. Итерационные методы решения уравнения  $f(x) = 0$  (хорд, Ньютона). Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применение.
11. Уравнение Гамильтона–Якоби и его полный интеграл. Теорема Якоби об интегрировании канонических уравнений Гамильтона. Отыскание полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби методом разделения переменных в автономном случае, при наличии циклической координаты, при отделении переменных в функции Гамильтона.
12. Управляемые механические системы. Принцип программного управления и управление с обратной связью. Управляемость, наблюдаемость и стабилизируемость.
13. Вариация функции и вариация функционала. Общая форма необходимого условия экстремума в терминах вариации функционала. Основная лемма вариационного исчисления.

14. Необходимые условия слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с неголономными связями. Функция Лагранжа задачи минимизации функционала при наличии ограничений.
15. Оценивание переменных в механических системах. Асимптотически устойчивый алгоритм оценивания.
16. Определения сильного, слабого, локального, глобального экстремумов. Связь между сильным и слабым экстремумы. Необходимое условие сильного экстремума в задаче со свободным правым концом в форме принципа максимума. Схема доказательства с помощью одноигольчатой вариации.
17. Принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении для задач с ограничениями типа равенства и неравенства. Понятие об особом управлении. Задача быстрогодействия в линейных системах.
18. Принцип оптимальности Беллмана. Задача управления с квадратичным критерием.
19. Задача оптимального оценивания траекторий механических систем. Фильтр Калмана в непрерывном и дискретном времени.
20. Случай Лагранжа движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Первые интегралы, редукция к одномерному движению. Качественный анализ Пуассона.

### **III. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА**

Вступительный экзамен состоит из письменной и устной частей. Письменная часть включает пять задач по темам из списка вопросов. Устная часть включает в себя экзаменационный билет и собеседование по реферату по тематике будущего диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат предполагаемого научного руководителя)

### **IV. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ**

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста (за основу принимается шрифт Times New Roman, 14 pt, полуторный межстрочный интервал). Реферат сопровождается отзывом предполагаемого научного руководителя, содержащим характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

## V. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов.

**Вопрос 1.** Линейные операторы в  $R^n$ . Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора векторного пространства. Собственные значения и собственные векторы. Самосопряженные операторы.

**Вопрос 3.** Угловая скорость абсолютно твердого тела. Формула Эйлера для поля скоростей точек абсолютно твердого тела. Теоремы сложения скоростей и ускорений в сложном движении точки; ускорение Кориолиса. Теорема сложения угловых скоростей.

При формировании билетов первый вопрос билета выбирается из списка основных вопросов, второй – из списка дополнительных вопросов программы.

## VI. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 1. ЛИТЕРАТУРА К СПИСКУ ОСНОВНЫХ ВОПРОСОВ

- Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа, часть 1 и часть 2. М.: Физматлит, 2005 (часть 1) и 2002 (часть 2).
- Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, часть 1 и часть 2. М.: Дрофа, 2003 (часть 1) и 2004 (часть 2).
- Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
- Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
- Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009.
- Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2008.
- Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Изд-во МЦНМО, 1998.
- Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2006.
- Колмолгоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
- Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: ГИТТЛ, 1956.
- Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
- Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
- Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.
- Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
- Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1 и том 2. М.: ГИФМЛ, 1962 (том 1) и 1959 (том 2).  
Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

19. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2010.
20. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986.
21. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
22. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

## 2. ЛИТЕРАТУРА К СПИСКУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

1. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. М.: Академия, 2010. 432 с.
2. Вильке В.Г. Механика систем материальных точек и твердых тел. М.: Физматлит, 2013. 268 с.
3. Влахова А.В., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В. Колебания и фракционный анализ. М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020. 412 с.
4. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2019. 728 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
6. Зорич В.А. Математический анализ. М.: Изд-во МЦНМО, 2012. Ч. 1. 702 с.; Ч. 2. 818 с.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994. 320 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 592 с.
10. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.
11. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005. 254 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский В.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
13. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
14. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
15. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. М.: Академия, 2010. 432 с.
16. Вильке В.Г. Механика систем материальных точек и твердых тел. М.: Физматлит, 2013. 268 с.
17. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2005. 264 с.
18. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2019. 728 с.

19. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 592 с.
20. Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 296 с.
21. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005. 376 с.
22. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. М.: КУРС, 2018. 288 с.
23. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Изд-во Московского университета, 2020. 160 с.
24. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Ленанд, 2018. 320 с.
25. Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П., Тихомиров В.В. Лекции по теории гироскопов. М.: МАКС Пресс, 2013. 296 с.
26. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.
27. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Едиториал УРСС, 2004. 64 с.
28. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

## VII. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Письменная часть экзамена оценивается по пятибалльной шкале. За каждую задачу абитуриент получает максимум 1 балл.

Устная часть экзамена оценивается по пятибалльной шкале как среднее арифметическое оценок за каждый из вопросов билета и за собеседование по реферату (минимальный балл за каждый вопрос равен 0, максимальный балл равен 5).

Таким образом, уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале.

При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Экзаменаторы дополнительно к вопросам билета могут задать вопросы по программе экзамена. Результаты сдачи вступительного экзамена сообщаются поступающим в течение трех дней со дня проведения экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если поступающий получил семь баллов и выше.

## VIII. АВТОРЫ

д.ф.-м.н. А.М. Савчук, д.ф.-м.н. И.В. Садовничая, д.ф.-м.н. В.В. Сазонов, д.ф.-м.н. Ю.В. Болотин, д.ф.-м.н. А.В. Влахова, д.ф.-м.н. А.А. Зобова, д.ф.-м.н. Е.И. Кугушев, д.ф.-м.н. В.А. Самсонов, к.ф.-м.н. В.Е. Владыкина, к.ф.-м.н. И.А. Самыловский, к.ф.-м.н. Т.В. Шахова.