Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Факультет космических исследований

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета космических исследований
МГУ имени М.В.Ломоносова

Д.ф.-м.н. Сазонов В.В.
«_____» ________ 2024 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
(по физико-математическим наукам)

Рабочая программа утверждена
Ученым советом факультета
(протокол № 2
от 27.03.2024 г.)

Москва - 2024

I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа предназначена для организации приема вступительного экзамена в аспирантуру по научной специальности **1.1.2 дифференциальные уравнения и математическая физика** и содержит основные темы и вопросы к экзамену, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания. (все темы и вопросы должны быть не выше ФГОС ВО магистратуры и специалитета)

II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Общая часть.

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Дифференцируемость функции одной переменной.
2. Функции многих переменных, их непрерывность и дифференцируемость. Полный дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости. Градиент, его геометрический смысл.
3. Определенный и неопределенный интеграл. Достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Несобственный интеграл (условная и абсолютная сходимость).
4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).
5. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана.
6. Функциональные ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
7. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций в степенной ряд.
8. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
9. Элементарные функции комплексного переменного: $z^n, e^z, \frac{az+b}{cz+d}$ и отображения, которые они задают. Простейшие многозначные функции: $\sqrt[n]{z}, \operatorname{Ln} z$.
10. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

11. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.
12. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.
13. Линейные операторы в $\mathbb{R}^n$. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора векторного пространства. Собственные значения и собственные векторы. Самосопряженные операторы.
14. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду. Закон инерции.
15. Евклидово пространство. Скалярное произведение, неравенство КБШ. Ортогональные преобразования в евклидовом пространстве и ортогональные матрицы.
16. Абстрактное гильбертово пространство. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве и их норма. Линейные операторы, норма линейного оператора.
17. Пространство L_2. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье в пространстве L_2. Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Влияние гладкости функции на порядок коэффициентов Фурье.
18. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, системы уравнений первого порядка и уравнения n-го порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.
20. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).
21. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению.
22. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.
23. Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова).
24. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

2. Дополнительная часть.

1. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, оценки погрешностей. Итерационные методы решения уравнения $f(x) = 0$ (хорд, Ньютона). Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применение.
2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Гаусса–Остроградского и Стокса.
3. Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства.
4. Компактные множества. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела.
5. Компактные операторы. Линейные уравнения с компактным оператором. Интегральные уравнения Фредгольма 2-ого рода. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричным ядром.
6. Понятие о методе Гаусса. Понятие о методе ортогональных вращений решения полной проблемы собственных значений. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (методы простой итерации и Зейделя).
7. Основные понятия механики управляемых систем. Физическая и математическая модели системы. Измерительные устройства и модели инструментальных ошибок. Функциональная схема управляемой системы. Программное управление и управление при помощи обратной связи.
8. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Теорема об устойчивости по первому приближению. Критерий Рауса-Гурвица. Запас устойчивости.
9. Понятие управляемости. Критерий управляемости для нестационарных и для стационарных систем.
10. Наблюдаемость линейных систем при наличии измерений. Критерий наблюдаемости нестационарной системы. Критерий наблюдаемости стационарной системы.
11. Вариация функции и вариация функционала. Общая форма необходимого условия экстремума в терминах вариации функционала. Основная лемма вариационного исчисления.
12. Необходимые условия слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с неголономными связями. Функция Лагранжа задачи минимизации функционала при наличии ограничений.
13. Определения сильного, слабого, локального, глобального экстремумов. Связь между сильным и слабым экстремумы. Необходимое условие сильного экстремума в задаче со свободным правым концом в форме принципа максимума. Схема доказательства с помощью одноигольчатой вариации.
14. Дифференцируемость в функциональных пространствах. Производные по направлению, по Фреше, по Гато. Связь между дифференцируемостью по Фреше и по Гато.

15. Градиентные методы поиска экстремума.
16. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Гиперболические уравнения и их основные свойства (характеристики, бегущие волны, задача Коши).
17. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Параболические уравнения. Задача Коши. Интеграл Пуассона. Свойства решений.
18. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Эллиптические уравнения. Краевые задачи, потенциалы, функция Грина.
19. Задача Кеплера о движении материальной точки в гравитационном поле неподвижного притягивающего центра. Классификация орбит в зависимости от значения постоянной интеграла энергии. Первая и вторая космические скорости.
20. Движение точки относительно Земли с учетом вращения Земли: вес, падение точки. Маятник Фуко.

III. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА

Вступительный экзамен состоит из письменной и устной частей. Письменная часть включает пять задач по темам из списка вопросов. Устная часть включает в себя экзаменационный билет и собеседование по реферату по тематике будущего диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат предполагаемого научного руководителя)

IV. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста (за основу принимается шрифт Times New Roman, 14 pt, полуторный межстрочный интервал). Реферат сопровождается отзывом предполагаемого научного руководителя, содержащим характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

V. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов.

Вопрос 1. Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором.

Вопрос 2. Необходимые условия слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с неголономными связями. Функция Лагранжа задачи минимизации функционала при наличии ограничений.

При формировании билетов первый вопрос билета выбирается из списка основных вопросов, второй – из списка дополнительных вопросов программы.

VI. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. ЛИТЕРАТУРА К СПИСКУ ОСНОВНЫХ ВОПРОСОВ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, часть 1 и часть 2. М.: Физматлит, 2005 (часть 1) и 2002 (часть 2).
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, часть 1 и часть 2. М.: Дрофа, 2003 (часть 1) и 2004 (часть 2).
3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2008.
7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Изд-во МЦНМО, 1998.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2006.
9. Колмолгоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
10. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: ГИТТЛ, 1956.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
13. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.
14. Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.

16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
17. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1 и том 2. М.: ГИФМЛ, 1962 (том 1) и 1959 (том 2).
Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
18. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2010.
19. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986.
20. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
21. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2.ЛИТЕРАТУРА К СПИСКУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. Москва: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2005. 376 с.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.
5. Григорьев К.Г., Григорьев И.С., Заплетин М.П. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления (http://mech.math.msu.su/~iliagri/prak2007.htm). М.: Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ Москва, 2007
6. В.В.Александров, С.С. Лемак, Н.А. Парусников. Лекции по механике управляемых систем М:, МАКСПресс, 2012, 240 с.
7. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
8. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.
9. Корухова Л.С., Шура-Бура М.Р. Введение в алгоритмы. Учебное пособие для студентов I курса, 2-е исправленное издание. — М. Издательский отдел факультета ВМиК МГУ (лицензия ИД № 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2010, http://sp.cmc.msu.ru/info/1/vvedalg.pdf
10. Э. Таненбаум, Т. Остин, Архитектура компьютера. 6-е издание, СПб: Питер, 2013.
11. Операционные системы. У. Столингс. Вильямс. 2002.
12. Э. Таненбаум, Х. Бос Современные операционные системы. 4-е издание, СПб: Питер, 2015.
13. Т. Пратт. М. Зелкович. Языки программирования. Разработка и реализация 4-е издание, СПб: Питер, 2002.
14. В. Ш. Кауфман. Языки программирования. Концепции и принципы. - М.: ДМК-Пресс, 2010.

15. К. Дейт. Введение в системы баз данных. М: Вильямс, 2006.
16. В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин "Параллельные вычисления", БХВ-Петербург, 2002, 608с.
17. А.С. Антонов Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP: Учеб пособие. Предисл. : В.А. Садовничий - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012. – 344 с. - (Серия "Суперкомпьютерное образование").

VII. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Письменная часть экзамена оценивается по пятибалльной шкале. За каждую задачу абитуриент получает максимум 1 балл.

Устная часть экзамена оценивается по пятибалльной шкале как среднее арифметическое оценок за каждый из вопросов билета и за собеседование по реферату (минимальный балл за каждый вопрос равен 0, максимальный балл равен 5).

Таким образом, уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале.

При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Экзаменаторы дополнительно к вопросам билета могут задать вопросы по программе экзамена. Результаты сдачи вступительного экзамена сообщаются поступающим в течение трех дней со дня проведения экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если поступающий получил семь баллов и выше.

VIII. АВТОРЫ

д.ф.-м.н. А.М. Савчук, д.ф.-м.н. И.В. Садовничая, д.ф.-м.н. В.В. Сазонов, к.ф.-м.н. В.Е. Владыкина, к.ф.-м.н. И.А. Самыловский.