Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова

факультет космических исследований

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по профилю (направленности)

**01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»**

по физико-математическим наукам

Москва

**Введение**

Настоящая экзаменационная программа соответствует утвержденному паспорту научной специальности "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление". В основу программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ, спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными.

Программа разработана экспертным советом факультета космических исследований МГУ имени М.В.Ломоносова и утверждена Ученым советом факультета космических исследований.

**1.Функциональный анализ**

1. Основные структуры функционального анализа: метрические и нормированные пространства, пространства со скалярным произведением.

2. Топологические пространства: сравнение топологий, индуцированная топология, замыкание, отделимость, полнота метрического пространства, базы топологии, сходимость в топологических пространствах.

3. Компактность в топологических и метрических пространствах: свойства компактов, связь с аксиомами отделимости, критерии компактности в конкретных нормированных пространствах.

4. Конструкция пространств Лебега. Пространства $L\_{1}, L\_{2}$ и $L\_{\infty }$.

5. Нормированные и банаховы алгебры. С\*-алгебры. Примеры классических банаховых алгебр.

**2. Спектральная теория дифференциальных операторов**

1. Оператор Штурма-Лиувилля на отрезке. Невозмущенный оператор. Регулярные и сильно регулярные краевые условия.
2. Оператор Штурма-Лиувилля с разделенными краевыми условиями. Существование и единственность решения задачи Коши. Асимптотическое представление функций ФСР.
3. Полуограниченность оператора Штурма-Лиувилля с вещественным потенциалом. Асимптотика собственных значений.
4. Асимптотика собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с разделенными краевыми условиями.
5. Нули собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Теорема Штурма и теорема сравнения.
6. Лемма о непрерывной зависимости нулей от спектрального параметра. Теорема осцилляции.
7. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля. Теорема о разложении по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля с вещественным потенциалом.
8. Представление для функции Грина в случае комплексного потенциала. Оценка функции Грина.
9. Теорема о разложении для случая комплексного потенциала.
10. Базисность Рисса системы СПФ оператора Штурма-Лиувилля с комплексным потенциалом и разделенными краевыми условиями.

 **3. Обыкновенные дифференциальные уравнения**

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.
3. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования
решения, фундаментальная система решений, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).
4. Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные
циклы.
5. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости
положения равновесия по первому приближению.

 **4.Уравнения с частными производными**

1. Обобщенные производные. Неравенство Фридрихса. След функций из пространств Соболева.
2. Обобщенная задача Дирихле с однородными граничными условиями. Вариационный метод доказательства теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле.
3. Задача Дирихле с неоднородными граничными условиями.
4. Неравенство Пуанкаре. Разрешимость 2-ой и 3-ей краевой задачи для уравнения Пуассона.
5. Вариационный принцип для собственных функций оператора Лапласа. Точная постоянная в неравенстве Фридрихса.
6. Теорема о первой собственной функции оператора Лапласа. Теорема Реллиха.
7. Обоснование метода Фурье для гиперболических уравнений в пространстве Соболева.
8. Обоснование метода Фурье для неоднородного гиперболического уравнения.

**Основная литература**

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Седьмое издание. Москва: Физматлит. 2019.
2. В.И. Богачёв, О.Г. Смолянов. *Действительный и функциональный анализ. Университетский курс.* Москва: Регулярная и хаотическая динамика. 2009.
3. А.Я. Хелемский. *Лекции по функциональному анализу.* Второе издание. Москва: МЦНМО. 2014.
4. Р. Энгелькинг. *Общая топология.* Москва: Мир. 1986.
5. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.*  Москва: Физматлит. 1965.
6. Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака*. Москва: Мир, 1988.
7. М.А. Наймарк. *Линейные дифференциальные операторы*, Москва: Прогресс-Традиция, 2010.
8. Л.С. Понтрягин *Обыкновенные дифференциальные уравнения,* М.: УРСС, 2019 г.
9. О.А. Олейник. *Лекции об уравнениях с частными производными*, Москва, Бином, 2005.
10. В.Н. Масленникова. *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Москва, РУДН, 1997.
11. В.П. Михайлов, А.К. Гущин. *Дополнительные главы курса «Уравнения математической физики»*, Москва, 2007.

### Дополнительная литература

1. К. Иосида *Функциональный анализ.* Москва: URSS. 2007.
2. А.М. Савчук, И.В. Садовничая *Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентами – распределениями.* Совр. математика. Фунд. направления. Т. 66 № 3, 2020, с. 373-530.
3. В.И. Арнольд *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, М.: Наука, 2014 г.
4. И.Г. Петровский *Лекции об уравнениях с частными производными*, Москва, Физматлит, 2009.