КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 5, 6

1. Преподаватели математики поставили перед юным исследователем космоса следующую задачу. У некоторой дроби числитель и знаменатель являются различными натуральными числами. Числитель увеличили на 1, а знаменатель – на 100.

   а) Могла ли при этом исходная дробь увеличиться?

   б) Могла ли она увеличиться вдвое?

   в) Могла ли она уменьшиться вдвое?

   Приведите полное решение.

   Решение. а) Да, например дробь 1/10000.

   б) Нет. Пусть $\frac{n}{m}$ – исходная дробь, тогда получаем соотношение $\frac{n+1}{m+100} = \frac{2n}{m}$, откуда $nm + 200n = 1$, что невозможно для натуральных чисел.

   в) Да, например дробь 2/50.

2. Полученный из космоса снимок земной поверхности представляет собой прямоугольник (длины сторон различны), разделенный на одинаковые квадраты. Квадраты пронумерованы числами $1, 2, \dots n$. Сумма периметров квадратов с нечетными номерами на 24 больше суммы периметров квадратов с четными номерами. Периметр прямоугольника в 3 раза больше периметра каждого из квадратов. Найдите площадь прямоугольника.

   Ответ: 180.

   Решение. Разность периметров квадратов с четными и нечетными номерами равна периметру одного квадрата. Длина его стороны $24 : 4 = 6$.

   Периметр прямоугольника равен $24 \cdot 3 = 72$. Значит, сумма длины и ширины равна 36, при этом и длина, и ширина делятся на 6, поскольку должно поместиться целое число квадратов со стороной 6.

   Возможны три варианта для сторон прямоугольника: 6×30 (5 квадратов в ряд), 12×24 (не подходит, так как тогда имеем четное число квадратов) и 18×18 (но тогда длины сторон одинаковы, а по условию они различны). Значит, годится только первый вариант.

   Площадь прямоугольника $6 \cdot 30 = 180$.

3. Обозначим $P(n)$ – произведение всех цифр натурального числа n. Найдите сумму:
   $$P(1) + P(2) + \cdots + P(200).$$

   Ответ 4095.

   Решение. Для чисел от 1 до 9 очевидно $P(n) = n$, т.е. $P(1) + P(2) + \cdots + P(9) = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Для двузначных чисел -го десятка $P(10k + n) = kn$, т.е. $P(10k + 1) + P(10k + 2) + \cdots + P(10k + 9) = k(1 + 2 + \cdots + 9) = 45k$. Отсюда $P(1) + P(2) + \cdots + P(99) = 45 + 45 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + \cdots + 45 \cdot 9 = 45 \cdot 46 = 2070$. Для второй сотни рассуждаем аналогично и получаем $P(100) + \cdots + P(199) = 2025$.

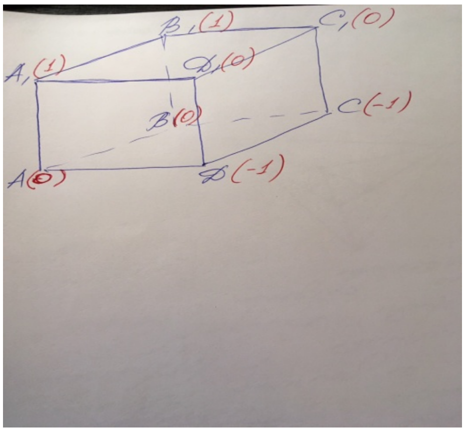
4. Три инвестора из трех государств строят космодром на нейтральной территории рядом с границей этих государств. Стоимость строительства: $N = 897$ миллиардов «фунтиков». Расстояния от столиц этих государств до места строительства равны $R_1 = 11$ км, $R_2 = 9$ км, $R_3 = 10$ км соответственно. Распределите стоимость строительства между инвесторами, исходя из условия, что вносимые инвесторами суммы N_1, N_2, N_3 удовлетворяют соотношениям: $N = N_1 + N_2 + N_3$, $N_1 : N_2 = R_2 : R_1$, $N_2 : N_3 = R_3 : R_2$, $N_1 : N_3 = R_3 : R_1$ (то есть больше вносит тот, чья столица ближе к космодрому).

Ответ $N_1 = 270, N_2 = 330, N_3 = 297$ миллиардов «фунтиков».

Решение. Согласно условию, $N_1 : N_2 = 9 : 11$, $N_1 : N_3 = 10 : 11$. Пусть $N_1 = 90x$, тогда $N_2 = 110x$, $N_3 = 99x$, $N = N_1 + N_2 + N_3 = 299x = 897$. Тогда $x = 3$, $N_1 = 270, N_2 = 330, N_3 = 297$.

5. Расставьте в вершинах куба числа $a_1, a_2, \ldots a_8$ (целые, не обязательно попарно различные, не все одновременно равные нулю) так, чтобы число в каждой вершине равнялось сумме чисел, стоящих в трех вершинах, соединенных с данной ребром куба (надо найти хотя бы одну такую расстановку).

   Ответ



6. Код состоит из различных цифр и образует число, которое делится без остатка на любую из этих цифр.

   а) Можно ли составить код из 7 цифр? Если да, приведите пример, если нет, объясните, почему.

   б) Можно ли составить код из 8 цифр? Если да, приведите пример, если нет, объясните, почему.

   в) Составьте код так, чтобы полученное натуральное число было наибольшим из возможных, удовлетворяющих приведенным условиям. Объясните свой ответ.

   Решение. а) Да, например, 1289736

   б) Нет. Если такое число есть, то оно не содержит 0 и заканчивается на четную цифру. Значит, не содержит 5. Тогда сумма цифр не кратна 9.

   в) Из пунктов а), б) следует, что такой код должен состоять из 7 цифр. Очевидно, он не может содержать цифру 0. Если он содержит цифру 5, то должен делиться на 5. Значит, оканчивается на 5 или на 0. На 0 нельзя, значит, на 5. Тогда это число нечетное, следовательно, не может содержать цифр 2, 4, 6, 8. Значит, в нем меньше 7 цифр – не подходит. Итак, отбрасываем цифру 5.

   Чтобы число было как можно больше, начнем его с цифры 9. Тогда оно должно делиться на 9, то есть сумма его цифр должна делиться на 9.

   1+2+3+4+6+7+8+9=40. Ближайшее число, которое меньше 40 и делится на 9 – это 36. Значит, отбрасываем 4. Искомое число состоит из цифр 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9. Заметим, что 98 делится на 7, а делимость на 8 не зависит от первых двух цифр. Значит, начнем наше число с 98 и будем подбирать оставшиеся пять цифр. Самое большое возможное число равно 76321, но оно не делится на 8. Переставим две последние цифры, получим 76312 – оно делится на 8, но не делится на 7. Переставим местами 7 и 6 – число 67312 делится на 7 и на 8. Докажем, что это число действительно наибольшее. Наше число должно делиться на 7, 8 и 9, то есть на 504. Будем двигаться от 67312 вверх с шагом 504. Получим числа:

   67816, 68320, 68824, 69328, 69832, 70336, 70840, 71344, 71848, 72352, 72856, 73360, 73864, 74368, 74872, 75376, 75880 (дальше уже получим больше, чем 76321). Ни одно из этих чисел не подходит.

   Ответ: 9867312.

Критерии

«п.б.» - «первичный балл»

Задача 1а)

1. Верное решение 5 п.б.

2. Есть верные мысли, но не более того 1 п.б.
3. Рассуждение верное, но правильного примера нет 3 п.б.

Задача 1б)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Есть верные мысли, но не более того 1 п.б.
3. Есть верная идея, но вывод ошибочный 2 п.б.
4. Недостаточное обоснование 3 п.б.

Задача 1в)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Есть верная идея, но пример ошибочный или отсутствует 3 п.б.
3. Есть верные мысли, но не более того 1 п.б.

Задача 2

1. Верное решение 10 п.б.
2. Верные рассуждения, но забыто условие, что прямоугольник не является квадратом 9 п.б.
3. Верный ответ, но нет достаточного обоснования того, что стороны прямоугольника 6 и 30 8-9 п.б.
4. Верные рассуждения, но забыто условие, что прямоугольник не является квадратом. Второй (верный) случай упущен. 6 п.б.
5. Верный ответ, но решение содержит существенные пробелы 5 п.б.
6. Есть верные продвижения 2-4 п.б.

Задача 3

1. Верное решение 10 п.б.
2. Почти верно, но есть арифметическая ошибка 8 п.б.
3. Серьезная арифметическая ошибка 5 п.б.
4. Верная идея, но не доведено до ответа 3 п.б.
5. Неверно понято условие, что привело к более простой задаче 2 п.б.

Задача 4

1. Верное решение 10 п.б.
2. Верная идея, но ошибка при работе с пропорциями 7 п.б.
3. Есть верные продвижения 2-3 п.б.

Задача 5

1. Верное решение 10 п.б.
2. Есть понимание и верное продвижение. Ответ неверный 4 п.б.
3. Есть верная идея, но не более того 2 п.б.

Задача 6а)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Верное рассуждение, ошибка при записи ответа 4 п.б.
3. Обоснованно нашел верные цифры, дальше решение отсутствует, или неверное 3 п.б.
4. Есть верные рассуждения, но не доведено до ответа 2 п.б.
5. Есть верные мысли, но не более того 1 п.б.

Задача 6б)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Недостаточное обоснование 3 п.б.
3. Есть верные мысли, но не более того 1 п.б.

Задача 6в)

1. Верное решение 10 п.б.
2. Верный ответ, обоснованы цифры, но нет обоснования максимальности 8 п.б.
3. Обоснованно нашел верные цифры, дальше решение отсутствует, или неверное 3 п.б.

4. Есть верные мысли, но не более того 1 п.б.