

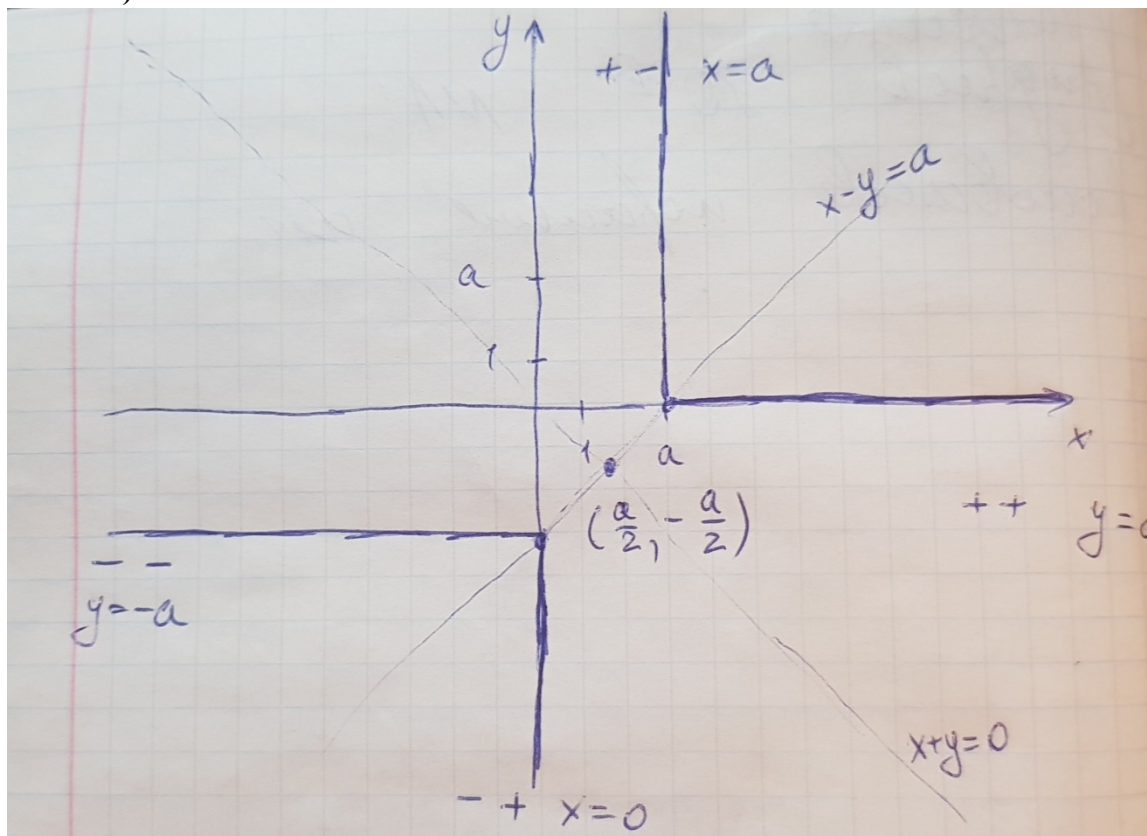
## КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 10 и 11

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения

$$|x + y| - |x - y - a| = a, \quad a > 0.$$

- б) Выпишите координаты центра симметрии и уравнения всех осей симметрии получившейся фигуры.

**Ответ. а)**



- б) Оси симметрии  $x + y = 0$  и  $x - y = a$ . Центр симметрии  $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ .

**Решение. а)** Разбиваем плоскость на 4 части прямыми  $x + y = 0$  и  $x - y - a = 0$ . В каждой из частей раскрываем модули. Получаем уравнения четырех лучей  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = -a$  и  $x = 0$ .

б) Очевидно, смена знака выражения под каждым из модулей не нарушает равенства. Значит, каждая из прямых  $x + y = 0$  и  $x - y - a = 0$  является осью симметрии. Аналогично находим центр симметрии. Других осей симметрии нет: при симметрии относительно оси луч переходит в луч. Значит, например, для луча  $y = 0$  имеем только три варианта – его симметричным отражением может быть луч  $x = a$ ,  $y = -a$  или  $x = 0$ . Первый и третий вариант реализованы, а второй невозможен: прямые  $y = 0$  и  $y = -a$  параллельны, так что ось симметрии обязана быть либо перпендикулярна, либо параллельна им. Легко видеть, что оба варианта не подходят.

2. Точка  $K$  является серединой стороны  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ . Отрезки  $DK$  и  $AC$  пересекаются в точке  $L$ .

а) Докажите, что  $DL = 2KL$ .

б) Пусть  $M$  – середина отрезка  $LD$ . Луч  $CM$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $N$ , а диагональ  $BD$  – в точке  $Q$ . Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ , если площадь треугольника  $NQD$  равна 2.

**Ответ. б)** 80.

**Решение. а)** Пусть  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма. В треугольнике  $BCD$  отрезки  $DK$  и  $CO$  являются медианами, а значит, делятся точкой пересечения  $L$  в отношении 2:1, считая от вершины.

**б)** Применяя теорему Менелая к треугольнику  $BKD$  и секущей  $CN$ , находим  $BQ = 4QD$ . Отсюда  $OQ:QD = 3:2$ . Применяя теорему Менелая к треугольнику  $AOD$  и секущей  $CN$ , находим  $AN = 3DN$ . Отсюда  $DN = \frac{1}{4}DA$ ,  $DQ = \frac{1}{5}DB$ , а значит, площадь треугольника  $DNQ$  есть  $\frac{1}{20}$  площади треугольника  $DAB$  и  $\frac{1}{40}$  площади всего параллелограмма.

3. Найдите радиус  $r$  стационарной орбиты планеты, то есть круговой орбиты, для которой период обращения искусственного спутника планеты  $T$  равен в точности одному периоду обращения планеты. Радиус планеты примите равным  $R = 3400$  км, длительность периода обращения 24 ч 40 мин, а ускорение свободного падения у поверхности  $g = 3,71$  м/с<sup>2</sup>. Ответ приведите в километрах, округлив до целых.

**Ответ.**

$$r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \approx 20461 \text{ км}$$

**Решение.** Уравнение движения спутника массой  $m$  по круговой орбите радиуса  $r$  имеет вид  $\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$ , где  $v$  – скорость спутника,  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса планеты. Отсюда период обращения спутника  $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$ . Учитывая, что по закону всемирного тяготения ускорение свободного падения у поверхности планеты  $g = \frac{GM}{R^2}$ , это выражение можно переписать в виде  $T = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{R\sqrt{g}}$ . Выражая отсюда  $r$ , получаем ответ.

4. По заданному числу  $C$  найдите такое число  $x$ , что  $x^2 + \sqrt{x} = C$ , с точностью не менее 3 знаков после точки.

**Входные данные**

В единственной строке содержится вещественное число  $1 \leq C \leq 100$

**Выходные данные**

Выведите одно число — искомый  $x$ .

**Примеры**

**входные данные**

2.0

**выходные данные**

1.000

**входные данные**

18

**выходные данные**

4.000

5. Два искусственных спутника Земли движутся в одной плоскости по круговым орбитам высотой 800 и 460 км. Они находятся в прямой видимости ровно тогда, когда отрезок, соединяющий их, не пересекает земную поверхность. В начальный момент времени спутники находились на общем луче с вершиной в центре Земли. Через некоторый промежуток времени они снова оказались на подобном луче.

Какую часть времени от этого промежутка спутники были в прямой видимости? Считайте Землю идеальным шаром радиуса 6400 км.

**Ответ.**

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{R^2 - \sqrt{(2Ra + a^2)(2Rb + b^2)}}{ab} \approx 0,2687$$

**Решение.** Введем полярную систему координат с центром  $O$  в центре Земли и полярным лучом, направленным на первый спутник. Спутники движутся с постоянными угловыми скоростями. Значит, в этой системе второй спутник будет описывать окружность с постоянной угловой скоростью. Тогда искомая доля времени (вне зависимости от того, сколько полных оборотов совершит за промежуток времени второй спутник, и вне зависимости от того, вращаются ли спутники в одну сторону или в разные) совпадает с долей дуги, находясь на которой второй спутник находится в прямой видимости с точкой  $A = (6860, 0)$ , по сравнению с длиной полной окружности. Пусть второй спутник находится в точке  $B$ . Связь пройдет тогда, когда отрезок  $AB$  коснется поверхности Земли, т.е. когда высота  $OH$  в треугольнике  $OAB$  равна 6400. По теореме Пифагора тогда  $AO = 2469,737$ ,  $BO = 3298,485$ ,  $AB = 5768,221$ . По теореме косинусов находим  $\cos AOB = 0,664351$ . Поскольку угол  $AOB$  равен половине искомой дуги, то ответ – его радианная мера, деленная на  $\pi$ .

6. Спутник дистанционного зондирования осуществляет съемку поверхности Земли с орбиты фотокамерой с ПЗС-матрицей.

а) Пусть спутник снял поле прямоугольной формы (дан список координат пикселей, образующих на снимке это поле). Поскольку съемка



проводилась под углом  $\alpha$  градусов к вертикали, на снимке поле имеет форму параллелограмма. Опишите алгоритм, позволяющий найти точку привязки – координаты центра поля. Входные данные: неупорядоченный список пар чисел ( $x$  и  $y$  координат пикселей). Выходные данные: два числа – координаты пикселя центра. Влиянием атмосферы пренебрегаем, считаем, что поле настолько мало, что поверхность можно считать плоской, а угол, под которым видны точки поля, постоянным.

б) Если бы съемка того же поля проводилась под нулевым углом к вертикали, то площадь поля  $S$  находилась бы по формуле  $S = k \cdot N$ , где  $N$  – число пикселей, образующих на снимке поле, а  $k$  – известный коэффициент (он зависит от разрешения камеры, высоты съемки и т.д.). Считая, что этот коэффициент и угол съемки  $\alpha$  известны, предложите способ вычисления площади поля  $S$ . Входные данные: неупорядоченный список пар чисел ( $x$  и  $y$  координат) пикселей. Выходные данные: одно число – площадь поля  $S$ .

**Ответ. а)** Координата  $x$  центра есть среднее арифметическое всех  $x$ -координат данных нам пикселей. Аналогично для второй координаты.

**б)** 
$$S = \frac{k \cdot N}{\cos^2 \alpha}$$

**Решение. а)** При съемке прямоугольника, на снимке получим параллелограмм (примем этот факт без доказательства – именно так мы видим прямоугольники, а человеческий глаз и фотокамера устроены по одному и тому же принципу). При этом, центр прямоугольника проектируется в центр параллелограмма. Заметим, что

эта точка является центром симметрии. Сумму всех векторов  $(x, y)$  сгруппируем по парам (симметричный с симметричным). Для каждой пары полусумма равна координатам центра. Отсюда получаем алгоритм нахождения центра. Его достоинствами являются малое число операций (порядка  $N$ ) и устойчивость к погрешностям (несколько ошибочных пикселей дадут малый вклад в ответ, т.к. в знаменателе находится большое число  $N$ ).

**б)** Как в любой камере, лучи света, перед тем как попасть на ПЗС-матрицу, проходят через объектив. Объектив может иметь различное устройство, но в целом, он действует как обычная собирающая линза. Предположим, что при съемке нашего поля камера нацелена и сфокусирована в точности на точку  $A$  – центр поля. Тогда лучи, испускаемые источником, расположенным в точке  $A$  будут собраны на расстоянии  $x$  за линзой, где

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d}$$

(здесь  $f$  - фокальное расстояние линзы, а  $d$  – расстояние от линзы до точки  $A$ ). Мы предположили, что камера сфокусирована на поле, т.е. ПЗС-матрица находится именно на расстоянии  $x$  за линзой. Пусть теперь точка  $B$  лежит на границе поля. Обозначим длину отрезка  $AB$  через  $l$ . Поскольку  $l$  много меньше, чем  $d$ , то можно считать, что лучи, испускаемые точкой  $B$ , собираются также на расстоянии  $x$  за линзой (т.е. на ПЗС-матрице – все поле «в фокусе»). Проследив за лучом, исходящим из  $B$ , и проходящим через центр линзы, получим два подобных треугольника. Таким образом, в первом приближении, размер изображения отрезка  $AB$  на снимке равен дроби

$$\frac{xl}{d} = \frac{fl}{d-f} \approx \frac{fl}{d}$$

Мы получили хорошо известный факт – если объект расположен далеко от нас, то его видимые размеры прямо пропорциональны его величине и обратно пропорциональны расстоянию до него. Так происходит с каждым линейным размером, а значит, площадь поля на снимке обратно пропорциональна  $d^2$ . Разница при вертикальной и косой съемке состоит только в изменении расстояния до поля. Если спутник находится на высоте  $h$ , то  $d = h \cos \alpha$ . Отсюда получаем итоговый ответ.

## Критерии

«п.б.» - «первичный балл»

### Задача 1а)

- |  |        |
|--|--------|
| 1. Верное решение  | 5 п.б. |
| 2. Неверно раскрывает модули или ошибка при сборке случаев, но ответ похож на верный | 3 п.б. |
| 3. Неверно раскрывает модули и ответ не похож на верный                              | 2 п.б. |

### Задача 1б)

- |   |         |
|---|---------|
| 1. Верное решение   | 5 п.б.  |
| 2. Если решение верное, но нет никакого объяснения, почему найденные оси являются осями симметрии, а других нет | 3 п.б.  |
| 3. Если решение верное, но объясняет, почему найденные оси являются осями симметрии, а других нет, из графика   | 4 п.б.. |
| 4. Неверные решения:  |         |
| а. Найдена только одна правильная ось или кроме верных есть лишние  | 2 п.б.  |

- b. Ошибка в пункте а) из-за чего задача стала существенно проще (например, получился квадрат), но далее решение верное, но без объяснений 2 п.б.
- с. Если ошибка в пункте а) из-за чего задача стала существенно проще, далее решение верное, причем есть объяснение, почему оси такие 3 п.б.

**Задача 2а)**

1. Задача решена 5 п.б.
2. Задача не решена 0 п.б.

**Задача 2б)**

1. Задача решена 10 п.б.
2. Все доказано, но ответ неверный из-за арифметической ошибки 8 п.б.
3. Есть пробел в доказательстве, но ход рассуждений и ответ верный 8 п.б.
4. Запутался в доказательствах и получил неверный ответ 5 п.б.
5. Есть разумные продвижения, но решение обрывается 3 п.б.

**Задача 3**

1. Задача решена 10 п.б.
2. Приведена только верная буквенная формула, но явно выписаны все ее операнды в правильных размерностях 10 п.б.
3. Приведена верная буквенная формула, явно выписаны все ее операнды в правильных размерностях, а при подстановке арифметическая ошибка (но ответ разумный по порядку) 10 п.б.
4. Есть верная буквенная формула, нет или неверный численный ответ, а один или несколько операндов указаны в неверных размерностях 8 п.б.
5. Приведена верная буквенная формула, явно выписаны все ее операнды в правильных размерностях, а при подстановке арифметическая ошибка, причем ответ неразумен по порядку 8 п.б.
6. Разумные рассуждения, верные законы, но буквенная формула неверная (спутал радиусы, ошибся) 6 п.б.
7. Есть продвижения, но ошибается по сути (считает ускорение на орбите равным ускорению на поверхности планеты или ошибка в формулах) 4 п.б.
8. Есть разумные продвижения, но далее решение обрывается или совсем ошибочно 3 п.б.

**Задача 4**

1. Верное решение 20 п.б.  
Замечания к каждой программе прописываются и учитываются индивидуально.

**Задача 5**

1. Задача решена 15 п.б.
2. Если решение верное, но есть огрехи, то из 15 п.б. вычитаем (возможны суммы пунктов а, одного из b-c-d, одного из e-f-g-h, одного из i-j)
- a. Не рассмотрен случай, когда между стартом и финишем прошло несколько синодических периодов 1 п.б.
- b. Перешел к относительной системе координат, говорит, что будет некоторое  $\omega$ , но не упоминает про два случая (вращение в одну или в разные стороны) 1 п.б.
- с. Перешел к относительной системе координат и явно пишет, что  $\omega$  есть разность  $\omega_1$  и  $\omega_2$  или сумма (явно рассматривает вращение только в одну сторону) 2 п.б.

- d. Не переходит к относительной системе координат, а честно решает, взяв  $\omega$  равной разности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  или вообще не упоминает о скоростях 3 п.б.
  - e. Переходит к относительной системе координат, выписывает  $\omega$ , но не объясняет, почему доля времени равна доле дуги 1 п.б.
  - f. Переходит к относительной системе координат, но не выписывает  $\omega$  вообще, а сразу без объяснения говорит, что доля времени равна доле дуги 2 п.б.
  - g. Не переходит к относительной системе координат, выписывает скорости, но не объясняет, почему доля дуги равна доле времени 3 п.б.
  - h. Не переходит к относительной системе координат, не выписывает скорости, но объясняет почему доля дуги равна доле времени 4 п.б.
  - i. Геометрические формулы верные, есть верная итоговая формула, но ошибка при подсчете – не наказывается 0 п.б.
  - j. Геометрические формулы верные, но ошибка в итоговой формуле (забыл двойку, нашел дополнительный угол и т.п.) 2 п.б.
  - k. Ошибка в геометрии или физических формулах, из-за чего формульный ответ неверен 4 п.б.
3. Есть разумные продвижения, но решение обрывается 3-5 п.б.

**Задача 6а)**

- 1. Задача решена (доказательство того, что на снимке получится параллелограмм, не требуется – его может не быть или оно может быть неверным) 15 п.б.
- 2. Если есть верный (почти верный) метод или алгоритм решения, но есть огрехи, то из 15 п.б. вычитаем
  - a. Используется «алгоритм поиска крайних точек» - неустойчив к погрешностям данных 3 п.б.
  - b. Используется алгоритм сортировки и затем выбора медианы – неоптимальный по количеству операций 3 п.б.
  - c. В алгоритме «крайних точек» нет обсуждения выбора крайней точки при нескольких одинаковых значениях 3 п.б.
  - d. Полуразность вместо полусуммы в алгоритме «крайних точек» 3 п.б.
  - e. Нет алгоритма в виде кода или хотя бы четкой последовательности действий с переменными – только описательный метод 1-5 п.б. (в зависимости от подробности описания)
  - f. Применяется метод среднего арифметического, но нет обоснования 3 п.б.
- 3. Есть понимание верного ответа на уровне описания 4 п.б.

**Задача 6б)**

- 1. Задача решена 15 п.б.
- 2. Есть разумные продвижения (косинус  $\alpha$  появляется, говорится о проекции и т.п.) 3-4 п.б.