Девятый список задач по курсу Дополнительные главы Математического Анализа

Каждый должен научиться решать любую задачу из списка

24 апреля 2018

Определить, лежит ли данный вектор (функция) в данном пространстве. Если да, то найти его (ее) норму.

1. $x = (1, -1, 1, -1, \dots)$, $X = l_\infty$;
2. $x = (1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots)$, $X = l_1$;
3. $x = (1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots)$, $X = l_2$;
4. $x = (1, -1, 1, -1, \dots)$, $X = l_2(w)$ — весовое пространство l_2, $\|x\| = \left(\sum_1^\infty 2^{-n}|x_n|^2\right)^{1/2}$;
5. $x = (1, 1, 1, 1, \dots)$, $X = l_1(w)$ — весовое пространство l_1, $\|x\| = \sum_1^\infty n^{-1}|x_n|$;
6. $x(t) = \sin t$, $X = L_\infty(\mathbb{R})$;
7. $x(t) = t^{-1/2}$, $X = L_p[0, 1]$, исследовать все случаи $p \in [1, \infty]$;
8. $x(t) = t^\alpha$, $X = L_2[0, 1]$, исследовать все случаи $\alpha \in \mathbb{R}$;
9. $x(t) = t^{-1/2}$, $X = L_p[1, \infty]$, исследовать все случаи $p \in [1, \infty]$;
10. $x(t) = t^\alpha$, $X = L_2[1, \infty]$, исследовать все случаи $\alpha \in \mathbb{R}$;
11. $x(t) = t \ln t$, $X = C[0, 1]$;
12. $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, $X = C[0, 1]$;
13. $x(t) = \operatorname{sign} t$, $X = L_\infty[-1, 1]$;
14. $x(t) = |t|$, $X = C^1[-1, 1]$;
15. $x(t) = |t|$, $X = W_2^1[-1, 1]$;
16. $x(t) = \sin t$, $X = W_p^1[-\pi, \pi]$, исследовать все случаи $p \in [1, \infty]$.

Сходится ли данная последовательность в данном пространстве? Если да, то найти ее предел.

1. $x_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ единиц}}, 0, 0, \dots)$, $X = l_1$;
2. $x_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ единиц}}, 0, 0, \dots)$, $X = l_\infty$;
3. $x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ ноль}}, 1, 0, 0, \dots)$, $X = l_1$;
4. $x_n = (1, 1/2, 1/3 \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$, $X = l_\infty$;
5. $x_n = (1, 1/2, 1/3 \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$, $X = l_2$;
6. $x_n = (1, 1/2, 1/3 \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$, $X = l_1$;
7. $x_n(k) = \frac{k+n}{nk}$, $X = l_\infty$;

8. $x_n(k) = 2^{-nk}$, $X = l_2$;
9. $x_n(t) = t^n$, $X = C[0,1]$;
10. $x_n(t) = t^n$, $X = L_\infty[0,1]$;
11. $x_n(t) = t^n$, $X = L_1[0,1]$;
12. $x_n(t) = t^n(1-t)$, $X = C[0,1]$;
13. $x_n(t) = t^n(1-t)$, $X = C[0,1]$;
14. $x_n(t) = \sin(nt)$, $X = C[0,\pi]$;
15. $x_n(t) = \sin(nt)$, $X = L_2[0,\pi]$;
16. $x_n(t) = e^{-nt}$, $X = C^1[0,+\infty)$.

Является ли данное множество замкнутым в данном пространстве?

1. финитные последовательности в $X = l_1$;
2. финитные последовательности в $X = l_2$;
3. финитные последовательности в $X = l_\infty$;
4. параллелепипед $\{x \in l_\infty\colon\ |x(k)| \leqslant \frac{1}{k}\}$, $X = l_\infty$;
5. параллелепипед $\{x \in l_\infty\colon\ |x(k)| \leqslant \frac{1}{k}\}$, $X = l_2$;
6. многочлены в $X = C[0,1]$;
7. многочлены в $X = L_1[0,1]$;
8. эллипсоид $\{x \in l_2\colon\ \sum_{k=1}^\infty |kx(k)|^2 \leqslant 1\}$, $X = l_2$;
9. $\{x \in C[0,1]\colon\ x(0) = 0\}$, $X = C[0,1]$;
10. $\{x \in C[0,1]\colon\ x(0) = 0\}$, $X = L_1[0,1]$;
11. $\{x \in C[0,1]\colon\ \int_0^1 x(t)\,dt = 0\}$, $X = C[0,1]$;
12. $\{x \in C[0,1]\colon\ \int_0^1 x(t)\,dt = 0\}$, $X = L_1[0,1]$.

Найти ортогональное дополнение множества

1. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t) = 0$ при $t < 0\}$;
2. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ непрерывна в нуле и $x(0) = 0\}$;
3. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ четна $\}$;
4. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ нечетна $\}$;
5. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ непрерывна $\}$;
6. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ многочлен $\}$;
7. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ многочлен, причем $x(0) = 0\}$;
8. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ — ступенчатая функция $\}$;
9. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon x(t)$ — ломаная $\}$;
10. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon \|x(t)\| \leqslant 1\}$;
11. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon \|x(t)\|_{L_\infty} \leqslant 1\}$;
12. $M = \{x \in L_2[-1,1]\colon \int_{-1}^1 x(t)dt = 0\}$.