

Пятый список задач по курсу **Дополнительные главы**
Математического Анализа

Каждый должен научиться решать любую задачу из списка

01 декабря 2017

Найти решение задачи Коши для уравнений

1. $u_{tt} = u_{xx} + 6$, $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = 4x$;
2. $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$, $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = x$;
3. $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$, $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = 0$;
4. $u_{tt} = u_{xx} + e^x$, $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = x + \cos x$;
5. $u_{xy} = 0$, $u|_{y=x^2} = 0$, $u_y|_{y=x^2} = |x|$;
6. $u_{xy} + u_x = 0$, $u|_{y=x} = \sin x$, $u_x|_{y=x} = 1$;
7. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$, $u|_{y=0} = x$, $u_y|_{y=0} = 0$.

Проверить на гиперболичность и решить следующие уравнения

1. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$;
2. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$;
3. $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$;
4. $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$;
5. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$;
6. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0$.

Разложить функцию f по базису $\{\varphi_n\}$.

1. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ при $n \leq -1$, $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,
 $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ при $n \geq 1$;
2. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ при $n \leq -1$, $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,
 $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ при $n \geq 1$;
3. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ при $n \leq -1$, $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,
 $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ при $n \geq 1$;
4. $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ при $n \geq 1$;
5. $f(x) = 1$, $x \in [0, \pi]$, $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ при $n \geq 1$;
6. $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx)$ при $n \geq 1$, $\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$;
7. $f(x) = e^x$, $x \in [0, \pi]$, $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx)$ при $n \geq 1$, $\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$;

Найти ортонормированный базис из собственных функций оператора

1. $Ly = -y'', y(0) = y(1) = 0;$
2. $Ly = -y'', y(-1) = y'(1) = 0;$
3. $Ly = -y'', y'(0) = y'(4) = 0;$
4. $Ly = -y'', y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi);$
5. $Ly = -y'', y(-\pi) = -y(\pi), y'(-\pi) = -y'(\pi).$

Решить следующие задачи методом Фурье

1. $u_t = 16u_{xx}, 0 < x < 3, t > 0, u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0, u(x, 0) = x;$
2. $u_t = 16u_{xx} + 2, 0 < x < 7, t > 0, u_x(0, t) = u_x(7, t) = 0, u(x, 0) = 0;$
3. $u_t = 25u_{xx} + 3x^2, 0 < x < 6, t > 0, u(0, t) = 0, u_x(6, t) = 1, u(x, 0) = \sin x;$
4. $u_{tt} = 25u_{xx} + x(3 - x) \sin t, 0 < x < 3, t > 0, u(0, t) = u(3, t) = 0, u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0;$
5. $u_{tt} = 9u_{xx}, -1 < x < 1, t > 0, u(-1, t) = u(1, t) = 0, u(x, 0) = 1 - x^2, u_t(x, 0) = 0;$
6. $u_{tt} = 9u_{xx}, -1 < x < 1, t > 0, u(-1, t) = u(1, t) = 0, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 1;$
7. $u_{tt} = 9u_{xx}, -1 < x < 1, t > 0, u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, u(x, 0) = 1 - x^2, u_t(x, 0) = 0;$
8. $u_{tt} = 9u_{xx}, -1 < x < 1, t > 0, u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x;$
9. $u_t = 4u_{xx}, -1 < x < 1, t > 0, u(-1, t) = u(1, t) = 0, u(x, 0) = 1 - x^2;$
10. $u_t = 4u_{xx}, -1 < x < 1, t > 0, u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, u(x, 0) = \chi_{[0,1]}(x);$
11. $u_t = u_{xx}, -1 < x < 1, t > 0, u(-1, t) = u(1, t) = \sin t, u(x, 0) = 0;$