

**Третий список задач по курсу Дополнительные главы  
Математического Анализа**

Каждый должен научиться решать любую задачу из списка

21 марта 2019

Разложить функцию  $f(z)$  в ряд Тейлора в точке  $a$

1.  $f(z) = \cos \sqrt{z}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
2.  $f(z) = e^z + e^{-z} + 2 \cos z$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
3.  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
4.  $f(z) = \frac{1}{(1+z)^3}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
5.  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
6.  $f(z) = \frac{1}{(64-z^6)^2}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
7.  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
8.  $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
9.  $f(z) = \frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
10.  $f(z) = \sin^2 z$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
11.  $f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
12.  $f(z) = \cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
13.  $f(z) = \cos z \cdot \operatorname{ch} z$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
14.  $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
15.  $f(z) = \sqrt{1+z^2}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
16.  $f(z) = \ln(1+z) + \sqrt{1+z^2}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
17.  $f(z) = \operatorname{arctg} z$ ,  $f(0) = 0$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
18.  $f(z) = \operatorname{arcsin} z$ ,  $f(0) = 0$ ,  $a = 0$ , выписать первые пять ненулевых коэффициентов;
19.  $f(z) = \operatorname{tg} z$ ,  $a = 0$ , выписать первые три ненулевых коэффициента;
20.  $f(z) = e^{z \cos z}$ ,  $a = 0$ , выписать первые три ненулевых коэффициента;
21.  $f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $a = 0$ , выписать первые три ненулевых коэффициента;
22.  $f(z) = \frac{z}{\operatorname{arctg} z}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $a = 0$ , выписать первые три ненулевых коэффициента;
23.  $f(z) = \frac{z}{\operatorname{arcsin} z}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $a = 0$ , выписать первые три ненулевых коэффициента.

Разложить функцию  $f(z)$  в ряд Лорана в точке  $a$ , сходящийся в кольце  $\mathfrak{D}$

- $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ,  $a = 0$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : |z| > 1\}$ , выписать коэффициенты  $c_0, c_{-1}, c_{-2}$ ;
- $f(z) = \frac{1}{4+z^2}$ ,  $a = 0$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : |z| > 2\}$ , выписать коэффициенты  $c_0, c_{-1}, c_{-2}$ ;
- $f(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2$ ,  $a = 0$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : |z| > 1\}$ , выписать коэффициенты  $c_0, c_{-1}, c_{-2}$ ;
- $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z-2}$ ,  $a = 0$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : 1 < |z| < 2\}$ , выписать коэффициенты  $c_0, c_{-1}, c_1, c_{-2}, c_2$ ;
- $f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$ ,  $a = 0$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : 0 < |z| < 3\}$ , выписать коэффициенты  $c_{-1}, c_0, c_1$ ;
- $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-9)}$ ,  $a = 1$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : 1 < |z-1| < 2\}$ , выписать коэффициенты  $c_{-1}, c_0, c_1$ ;
- $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-9)}$ ,  $a = 1$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : 2 < |z-1| < 3\}$ , выписать коэффициенты  $c_{-1}, c_0, c_1$ ;
- $f(z) = \frac{z+i}{z^2}$ ,  $a = i$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : |z-i| > 1\}$ , выписать коэффициенты  $c_0, c_{-1}, c_{-2}$ ;
- $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ ,  $a = 1$ ,  $\mathfrak{D} \ni \{2i\}$ , выписать коэффициенты  $c_0, c_{-1}, c_{-2}$ ;
- $f(z) = z^3 e^{1/z}$ ,  $a = 0$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : 0 < |z| < \infty\}$ , выписать коэффициенты  $c_3, c_2, c_1, c_0, c_{-1}$ ;
- $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)}$ ,  $a = 0$ ,  $\mathfrak{D} = \{z : 1 < |z| < \infty\}$ , выписать коэффициенты  $c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2$ .

Найти главную часть ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $a$

- $f(z) = \frac{z}{(z+2)^2}$ ,  $a = -2$ ;
- $f(z) = \frac{e^z+1}{e^z-1}$ ,  $a = 2\pi i$ ;
- $f(z) = \frac{z-1}{\sin^2 z}$ ,  $a = 0$ ;
- $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$ ,  $a = 3i$ ;
- $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^3+1)}$ ,  $a = \infty$ ;
- $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$ ,  $a = -2$ ;
- $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$ ,  $a = 3$ ;
- $f(z) = \sqrt{z^4+1}$ ,  $a = \infty$ , естественная ветвь;
- $f(z) = z^3 \operatorname{arctg} z$ ,  $a = 0$ , естественная ветвь;
- $f(z) = \frac{\sqrt{z} \ln z}{(1+z)^2}$ ,  $a = -1$ , естественная ветвь;
- $f(z) = \frac{\cos z}{z-\pi/4}$ ,  $a = \pi/4$ ;
- $f(z) = \operatorname{th} z$ ,  $a = i\pi/2$ .

Вычислить интеграл с помощью вычетов

- $\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}$ ,  $D = \{|z-1| < 1\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(1+z^2)}$ ,  $D = \{|z-1-i| < 2\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^2} dz$ ,  $D = \{|x|+|y| < 2\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ ,  $D = \{2 < |z| < 4\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{3/z} dz$ ,  $D = \{|z| > 4\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^9-2)}$ ,  $D = \{|z| < 2\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2(1/z)}{(z-1)(z-2)} dz$ ,  $D = \{|z| < 3\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{z^2 dz}{z^4-1}$ ,  $D = \{|z| < 2\}$ ;
- $\int_{\partial D} \sin \frac{z}{1+z} dz$ ,  $D = \{|z| > 3\}$ ;
- $\int_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1} dz$ ,  $D = \{|z-1| > 1\}$ ;
- $\int_{\partial D} z \cos \frac{z}{1+z} dz$ ,  $D = \{|z| < 2\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{\sin z dz}{z(z-1)(z-i)}$ ,  $D = \{|z-1| < 1\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} dz$ ,  $D = \{|z| > 1\}$ ;
- $\int_{\partial D} \frac{e^{\pi z}}{2z-i} dz$ ,  $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ .