Десятый список задач по курсу Дополнительные главы Математического Анализа

Каждый должен научиться решать любую задачу из списка

16 мая 2019

Найти ядро и норму функционала

1. $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $X = l_\infty$;
2. $f(x) = \sum_1^\infty 2^{-n} x_n$, $X = c_0$;
3. $f(x) = \lim x_n$, $X = c$;
4. $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x_n}{n}$, $X = l_2$;
5. $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x_n}{n}$, $X = l_1$;
6. $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $X = L_2[-1, 1]$;
7. $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $X = L_1[-1, 1]$;
8. $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $X = L_\infty[-1, 1]$;
9. $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $X = C[-1, 1]$;
10. $f(x) = x(1) - x(-1)$, $X = C[-1, 1]$;
11. $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt - 2x(0)$, $X = C[-1, 1]$;
12. $f(x) = \int_{-1}^0 x(t)\,dt - \int_0^1 x(t)\,dt$, $X = C[-1, 1]$;
13. $f(x) = \int_0^1 tx(\sqrt{t})\,dt$, $X = L_\infty[0, 1]$;
14. $f(x) = \int_0^1 tx(t^2)\,dt$, $X = L_\infty[0, 1]$;
15. $f(x) = \int_0^1 \sqrt{t}x(t)\,dt$, $X = L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$;
16. $f(x) = \int_0^1 tx(\sqrt{t})\,dt$, $X = L_2[0, 1]$.

Найти норму, ядро и образ операторов

1. $Jx = x$, $J : l_1 \to l_2$ (оператор вложения);
2. $Jx = x$, $J : l_1 \to l_\infty$ (оператор вложения);
3. $Jf = f$, $J : C[-1, 1] \to L_1[-1, 1]$ (оператор вложения);
4. $Hf = f$, $H : C(\mathbb{R}) \to C[-1, 1]$ (оператор срезки);
5. $\mathcal{C}f = f \cdot I_{[-1,1]}$, $\mathcal{C} : L_1[-1, 1] \to L_1(\mathbb{R})$ (оператор продолжения);
6. $Df = u$, где $f(\xi)$ — непрерывная на окружности $|\xi| = 1$ функция, а $u(\xi)$ — гармоническая в открытом круге $|\xi| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|\xi| \leqslant 1$ функция, равная f на $|\xi| = 1$, $D : C(|\xi| = 1) \to C(|\xi| \leqslant 1$ (оператор продолжения);
7. $P(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots)$, $P : l_2 \to l_2$ (оператор проектирования);

8. $Pf = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$, $P : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$ (оператор проектирования);
9. $Px = (x, y)y$ $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ — произвольное гильбертово пространство, y — произвольный фиксированный вектор (оператор одномерного проектирования);
10. $Uf = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right\}$, $U : L_2[-\pi, \pi] \to l_2$ (оператор дискретизации, дискретного преобразования Фурье);
11. $V(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x_n e^{int}$, $V : l_2 \to L_2[-\pi, \pi]$ (оператор восстановления);
12. $F[f] = \hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$, $F : L_1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ (оператор преобразования Фурье);
13. $Af = \int_{-1}^{1}(1 + ts)f(s)\,ds$, $A : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$ (двумерный оператор);
14. $A(x_1, x_2, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, где $\{\lambda_n\}$ — ограниченная последовательность, $A : l_1 \to l_1$ (диагональный оператор);
15. $T_r(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $T_r : l_2 \to l_2$ (оператор правого сдвига);
16. $T_l(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3 \dots)$, $T_r : l_2 \to l_2$ (оператор левого сдвига);
17. $Af = f(t) \sin t$, $A : C[0, \pi] \to C[0, \pi]$ (оператор умножения на данную функцию);
18. $Kf = \int_0^t f(s)\,ds$, $K : L_1[0, 1] \to L_1[0, 1]$ (интегральный оператор).