Задачи к экзамену

Первая часть (до коллоквиума)

Задача 1. *Докажите, что отношение является отображением тогда и только тогда, когда в каждой строке матрицы отношения не более одной единицы. Докажите, что это отображение является сюръекцией, когда вдобавок в матрице нет нулевых столбцов. Дайте критерий инъективности отображения в терминах матрицы отношения.*

Задача 2. *Приведите пример такого отношения эквивалентности на множестве* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел, которое разбивает* $\mathbb{N}$ *на фактор–классы мощности 1, 2, 3, и т.д. (для любого натурального числа* n *есть ровно один класс мощности* n*).*

Задача 3. *Пусть* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ *— многочлен. Скажем, что многочлен* P *делится нацело на многочлен* Q*, если найдется такой многочлен* R*, что* $P(x) = Q(x)R(x)$*. Например, многочлен* $x^3 + x^2 - x - 1$ *делится на* $x - 1$ *потому, что* $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x^2 + 2x + 1)$*. Докажите, что отношение «*$Q \leq P$*, если* P *делится нацело на* Q*» является отношением порядка.*

Задача 4. *Докажите, что*

$$\frac{4^{n-1}}{e^n} < C_n^{n/2} < 2^n$$

при всех четных $n \geq 2$ *(формулу Стирлинга использовать нельзя).*

Задача 5. *Пусть* $a_1 = a_2 = 1$*, а далее* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ *для любого* $n \geq 2$ *(числа Фибоначчи). По индукции докажите, что числа* a_{n+1} *и* a_n *взаимно просты (не имеют общих делителей, кроме единицы).*

Задача 6. *Пусть* $a_1 = a_2 = 1$*, а далее* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ *для любого* $n \geq 2$ *(числа Фибоначчи). По индукции докажите, что*

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}, \qquad a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1.$$

Задача 7. *Пусть* $\Phi(n,k)$ *— число разбиений множества из* n *элементов на* k *непустых подмножеств. Докажите, что* $\Phi(n,2) = 2^{n-1} - 1$ *при всех* $n \geq 1$*.*

Задача 8. *Сложность функции* f *в системе* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *— это минимально возможное число операций из указанного списка, которые необходимо применить для реализации* f*. Например, сложность функции* $g(x,y) = \overline{x} \cdot \overline{y}$ *равна 2, т.к.* $g(x,y) = \overline{x \vee y}$ *(а меньшим числом операций точно нельзя обойтись — получатся только три функции системы). Найдите сложность функции* $f(x,y) = (x \Rightarrow y)$*.*

Задача 9. *Сложность функции* f *в системе* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *— это минимально возможное число операций из указанного списка, которые необходимо применить для реализации* f*. Например, сложность функции* $g(x,y) = \overline{x} \cdot \overline{y}$ *равна 2, т.к.* $g(x,y) = \overline{x \vee y}$ *(а меньшим числом операций точно нельзя обойтись — получатся только три функции системы). Найдите сложность функции* $f(x,y) = x \mid y$*.*

Задача 10. *Сложность функции f в системе $\{\neg, \vee, \wedge\}$ — это минимально возможное число операций из указанного списка, которые необходимо применить для реализации f. Например, сложность функции $g(x,y) = \overline{x} \cdot \overline{y}$ равна 2, т.к. $g(x,y) = \overline{x \vee y}$ (а меньшим числом операций точно нельзя обойтись — получатся только три функции системы). Докажите, что сложность функции $f(x,y) = x \oplus y$ равна четырем.*

Задача 11. *Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если при любой перестановке своих аргументов, ее значение не меняется. Докажите, что если f — симметрическая функция, не равная константе, то f не имеет фиктивных переменных.*

Задача 12. *Докажите, что если переменная x_i является существенной для функции f, то эта переменная является существенной и для двойственной функции f^*.*

Задача 13. *Докажите, что переменная x_i является существенной для функции f тогда и только тогда, когда x_i входит хотя бы в одно слагаемое полинома Жегалкина функции f.*

Задача 14. *Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если при любой перестановке своих аргументов, ее значение не меняется. Докажите, что класс симметрических функций не замкнут.*

Задача 15. *Пусть A — класс всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, равных 1 на наборе из нулей. Докажите, что класс A не замкнут.*

Задача 16. *Докажите, что если класс A замкнут, $A \neq \varnothing$ и $A \neq P_2$, то дополнение этого класса $P_2 \setminus A$ — незамкнутый класс.*

Задача 17. *Найдите $|L|$ (количество различных линейных функций от n переменных) и $|S|$ (количество различных самодвойственных функций от n элементов).*

Задача 18. *Докажите, что система $\{1, \wedge, \oplus\}$ — базис в P_2.*

Задача 19. *Докажите, что система $\{0, 1, \wedge, f\}$, где $f(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$, полна в P_2.*

Задача 20. *Докажите, что система $\{\oplus, 1\}$ —базис в классе L.*

Задача 21. *Докажите, что система $\{f, \neg\}$, где $f(x,y,z) = x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot \overline{z}$, не является минимальной.*

Указание: внимательно просмотреть задачи §2 главы II задачника Гаврилова, Сапоженко.

Задача 22. *Докажите, что базисом системы $\{f, \neg, g\}$, где $f(x,y,z) = x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot \overline{z}$, $g(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$, является одна функция f.*

Указание: внимательно просмотреть задачи §2 главы II задачника Гаврилова, Сапоженко.

Задача 23. *Докажите, что система $\{f\}$, где $f(x,y,z) = x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot \overline{z}$, является базисом в S.*

Указание: внимательно просмотреть задачи §2 главы II задачника Гаврилова, Сапоженко.

Задача 24. *Доказать, что система* $\{f\}$, *где* $f(x, y, z) = xy \oplus z \oplus 1$, *— базис в классе* T_1.

Задача 25. *Доказать, что система* $\{0,\ 1,\ \wedge,\ \vee\}$ *— базис в классе* M *монотонных функций.*

Указание: записать СДНФ функции $f \in M$ и заметить, что наряду с каждой конъюнкцией вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ СДНФ обязательно содержит все конъюнкции вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1 \geq \sigma_1,\ \alpha_2 \geq \sigma_2, \ldots,\ \alpha_n \geq \sigma_n$.

Задача 26. *Доказать, что если* $f \in M$, *то и* $f^* \in M$.

Задача 27. *Является ли полной система* $\{\Rightarrow,\ \oplus\}$?

Задача 28. *Из системы* $\{0,\ \oplus,\ \Rightarrow\}$ *выделить все возможные базисы.*

Вторая часть (после коллоквиума)

Задача 29. *Пусть* G *— простой граф, причем* $|V| \geq 2$. *Докажите, что найдутся пара вершин с одинаковыми степенями.*

Задача 30. *Докажите, что для любого* $n \geq 3$ *найдется простой связный граф с* n *вершинами такой, что набор степеней его вершин* $\{d(v_1),\ d(v_2), \ldots,\ d(v_n)\}$ *состоит ровно из* $n-1$ *различных чисел.*

Задача 31. *Пусть* G *— простой граф, содержащий замкнутый маршрут* $v_1,\ (v_1, v_2),\ v_2, \ldots,\ v_1$. *Докажите, что если* n *нечетно, то этот маршрут обязательно содержит простой цикл. Приведите контрпример к этому утверждению, для четного* n.

Задача 32. *Пусть* G *— простой граф, не имеющий вершин степени* 0 *и* 1. *Докажите, что в этом графе обязательно есть цикл.*

Задача 33. *Пусть* G *— простой граф, а* $\overline{G}$ *— дополнительный граф к* G. *Докажите, что либо* G, *либо* $\overline{G}$ *связен.*

Задача 34. *Пусть* G *— простой граф с* ≥ 5 *вершинами, а* $\overline{G}$ *— дополнительный граф к* G. *Докажите, что либо* G, *либо* $\overline{G}$ *содержит цикл.*

Задача 35. *Пусть* T *— дерево с* ≥ 2 *вершинами. Докажите, что в* T *найдется пара вершин степени* 1.

Задача 36. *Пусть* T *— дерево с* n *вершинами, причем число вершин степени* 1 *равно* m, *а вершин степени* 2 *в дереве нет. Докажите, что* $2m - n \geq 2$.

Задача 37. *Найдите все графы* G, *для которых и* G, *и* $\overline{G}$ *есть дерево.*

Задача 38. *Докажите, что утверждение «Графы* G_1 *и* G_2 *изоморфны тогда и только тогда, когда для любого* $d \geq 0$ *число вершин степени* d *в графах* G_1 *и* G_2 *одинаково» неверно.*

Задача 39. *Приведите контрпример к утверждению «Деревья T_1 и T_2 изоморфны тогда и только тогда, когда для любого $d \geq 0$ число вершин степени d в деревьях T_1 и T_2 одинаково».*

Задача 40. *Докажите, что утверждение «Графы G_1 и G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда для любого $d \geq 0$ число вершин степени d в графах G_1 и G_2 одинаково» верно, если число вершин у каждого графа не превосходит 4.*

Задача 41. *Существует, ли простой граф с 6 вершинами, имеющий плоскую реализацию с 9 гранями?*

Задача 42. *Пусть G — простой планарный граф. Докажите, что в G найдется вершинами степени ≤ 5.*

Задача 43. *Докажите, что у любого дерева существует планарная реализация, т.е. дерево — планарный граф.*

Задача 44. *Пусть G — простой гамильтонов граф, причем степени всех вершин равны 3. Докажите, что хроматический индекс такого графа равен 3.*

Задача 45. *Пусть G — простой граф, причем степени всех его вершин $\leq d$. Докажите, что хроматическое число такого графа $\leq d+1$.*

Задача 46. *Приведите пример двух корневых деревьев, которые неизоморфны как корневые деревья, хотя изоморфны, как графы.*

Задача 47. *Приведите пример двух упорядоченных деревьев, которые неизоморфны как упорядоченные деревья, хотя изоморфны, как корневые деревья.*

Задача 48. *Докажите, что двоичный код любого дерева содержит одинаковое число нулей и единиц, всегда начинается с нуля и заканчивается единицей. Приведите пример двоичной последовательности, которая удовлетворяет этим двум свойствам, но не является кодом ни одного дерева.*

Задача 49. *Докажите, что при равномерном алфавитном кодировании и при префиксном (постфиксном) кодировании граф Маркова не содержит вершины $\wedge$.*

Задача 50. *Докажите, что кодирование $a \to 01$, $b \to 01101$ однозначно декодируемо. Предложите алгоритм декодирования.*

Задача 51. *Докажите, что в двоичном коде с минимальной избыточностью число кодовых слов максимальной длины четно.*

Задача 52. *Пусть все буквы алфавита $\mathcal{A}$ имеют одинаковые вероятности. Докажите, что в этом случае двоичный код с минимальной избыточностью является почти равномерным (т.е. длины кодовых слов отличаются макисмум на 1).*

Задача 53. *Пусть алфавит $\mathcal{A}$ имеет четное число букв и известно, что двоичный код с минимальной избыточностью является равномерным. Верно ли, что вероятности букв алфавита $\mathcal{A}$ одинаковы?*

Задача 54. *Пусть алфавит $\mathcal{A}$ имеет p букв. Докажите, что вне зависимости от набора вероятностей при двоичном кодировании с минимальной избыточностью максимальная длина кодового слова $\leq p-1$.*

Задача 55. *Приведите пример двоичного кодирования с минимальной избыточностью букв алфавита $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| = p$, такого что длины кодовых слов равны* $\{1, 2, 3, \ldots, p-2, p-1, p-1\}$.

Задача 56. *Пусть алфавит $\mathcal{A}$ имеет $p \geq 2$ букв. Докажите, что вне зависимости от набора вероятностей при двоичном кодировании с минимальной избыточностью сумма длин всех кодовых слов $\leq \frac{1}{2}(p+2)(p-1)$.*

Задача 57. *Докажите, что при кодировании алгоритмом Хэмминга двух различных сообщений одинаковой длины получаются два сообщения, различающиеся минимум в трех разрядах.*

Задача 58. *Пусть двоичное кодирование исправляет $n \geq 1$ ошибок. Верно ли, что в любом случае такое кодирование обнаруживает $2n+1$ ошибку?*

Задача 59. *Пусть $n = 2^k - 1$. Докажите, что двоичный куб размера n можно разбить на непересекающиеся шары радиуса 1. Сколько таких шаров получится?*

Задача 60. *Какую минимальную сложность имеет СФЭ в базисе $\{\neg, \vee, \wedge\}$ функция $f = (1001)$? Постройте эту схему.*

Задача 61. *Какую минимальную сложность имеет СФЭ в базисе $\{\neg, \vee\}$ функция $f = (0100)$? Постройте эту схему.*

Задача 62. *Какую минимальную сложность имеет СФЭ в базисе $\{\vee, \rightarrow\}$ функция $f = (1011)$? Постройте эту схему.*

Задача 63. *Ограниченно–детерминированная функция задана формулой*

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = 1, \\ x(t-1) \oplus y(t-1) \oplus x(t), & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Найдите остаточную функцию, порожадемую словом $A = (01)$.

Задача 64. *Ограниченно–детерминированная функция задана формулой*

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t = 1,\, 2, \\ y(t-2) \rightarrow \overline{x(t)}, & \text{при } t \geq 3. \end{cases}$$

Найдите слово A, порождающее остаточную функцию

$$y(t) = \begin{cases} \overline{x(t)}, & \text{если } t = 1,\, 2, \\ x(t) \rightarrow \overline{y(t-2)}, & \text{при } t \geq 3. \end{cases}$$

Задача 65. *Ограниченно–детерминированная функция задана формулой*

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ \overline{x(t)}, & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Докажите, что ее остаточной функцией не может быть функция

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ x(1) \to x(t-1), & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Задача 66. *Найдите вес ограниченно–детерминированной функции*

$$y(t) = \begin{cases} x(1), & \text{если } t = 1, \\ x(1) \cdot \overline{x(t)}, & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Задача 67. *Найдите вес ограниченно–детерминированной функции*

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ x(t) \to x(t-1), & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Задача 68. *Постройте наипростейшую диаграму Мура автомата, порождающего ограниченно–детерминированную функцию*

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = 1, \\ x(t-1) \vee x(t), & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Задача 69. *Постройте наипростейшую диаграму Мура автомата, порождающего ограниченно–детерминированную функцию*

$$y(t) = \begin{cases} x(1), & \text{если } t = 1, \\ y(t-1) \vee x(t), & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Задача 70. *Постройте диаграмму Мура автомата, который принимает на вход вектор* $(x_1(t), x_2(t))$, *а выдает* $y(t) = x_1(1) \cdot x_2(1) \oplus x_1(2) \cdot x_2(2) \oplus \cdots \oplus x_1(t) \cdot x_2(t)$.