

Задачи к пятой контрольной работе

Все задачи даны по задачнику Гаврилова и Сапоженко.

**Задача 1.** Глава IV. Задачи 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10. Советую прорешать по три–четыре пункта.

*Доказательство.* Решение задачи 1.1.3).

$$y(t) = x(1) \cdot x(2) \cdot \dots \cdot x(t-1) \implies x(t) \text{ при всех } t \geq 1.$$

Непосредственно из задания функции видим, что значение  $y(t)$  определяется только переменными  $x(1), \dots, x(t)$ .

Решение задачи 1.2.9).

Функция  $f$  на последовательности  $\vec{x}$  равна самой последовательности, если  $\sum_{i=1}^t x(i) \geq t/2$  для всех  $t \geq 1$ . В противном случае функция выдает последовательность нулей.

Докажем, что изменение координаты  $x(2)$  может поменять  $y(1)$ , т.е. что функция не является детерминированной. Действительно, если  $x = (1000\dots)$ , то  $f(x) = (000\dots)$ . Если же  $x = (111111\dots)$ , то  $f(x) = (111\dots)$ .

Решение задачи 1.7.4б)

Известно, что

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Эквивалентны ли остаточные функции, определенные словами  $x_1 = (0110)$  и  $x_2 = (0101)$ ?

Если  $x = (0110x(5), x(6), x(7), \dots)$ , то  $y = (0101, x(5), x(5) \oplus x(6), x(6) \oplus x(7), \dots)$ . Если же  $x = (0101x(5), x(6), x(7), \dots)$ , то  $y = (0111, 1 \oplus x(5), x(5) \oplus x(6), x(6) \oplus x(7), \dots)$ . Видно, что пятая координата различается. Значит, остаточные функции различны.

Решение задачи 1.8.1)

$$f_0 : \begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = x(1) \oplus \bar{x}(t), \quad t \geq 2, \end{cases} \quad f_1 : \begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(1) \oplus \bar{x}(t), \quad t \geq 2. \end{cases}$$

Доказать, что  $f_1$  не является остаточной функцией для  $f_0$ .

Прежде всего,  $f_1 \neq f_0$ , т.е. пустое слово не породит остаточную функцию вида  $f_1$ . Пусть дано какое-то слово  $A = (a_1 \dots a_p)$ . Тогда остаточная функция, построенная по этому слову последовательность  $x(1)x(2)\dots$  преобразует в  $y(1)y(2)\dots$ , где  $y(1) = a_1 \oplus \bar{x}(1)$ . Видно, что как не подбери координату  $a_1$ , эта сумма не будет тождественно равна 1, как это требуется в определении координаты  $y(1)$  для функции  $f_1$ .  $\square$

**Задача 2.** Глава IV. Задачи 2.1 и 2.2. Советую прорешать по пять–шесть пунктов

*Доказательство.* Задача 2.1.33)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ x(t-1) \implies x(t), & \text{если } t \text{ четно,} \\ \bar{x}(t), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Видно, что для работы автомата необходимо помнить предыдущее значение входного вектора — бит  $x(t-1)$  и следить за четностью  $t$ . При этом, если  $t$  нечетно, то величина  $x(t-1)$  роли не играет. И еще отдельно выделяется стартовое состояние. Обозначим  $S$  — стартовое состояние автомата;  $E0$  — состояние автомата при четном  $t$  и  $x(t-1) = 0$ ;  $E1$  — состояние автомата при четном  $t$  и  $x(t-1) = 1$ ;  $O$  — состояние автомата при нечетном  $t$ . Тогда из вершины  $S$  ведет ребро кратности два в  $E0$  с пометками  $x = 1, y = 1$  и  $x = 0, y = 0$ . Из вершины  $E0$  ведет ребро кратности два в вершину  $O$  с пометками  $x = 1, y = 1$  и  $x = 0, y = 0$ . Из вершины  $E1$  также ведет ребро кратности два в вершину  $O$  с пометками  $x = 1, y = 0$  и  $x = 0, y = 1$ . Наконец, из вершины  $O$  ведет одно ребро в  $E0$  с пометкой  $x = 0, y = 1$  и одно ребро в  $E1$  с пометкой  $x = 1, y = 0$ .

Таблица составляется из этих данных очевидным образом. □