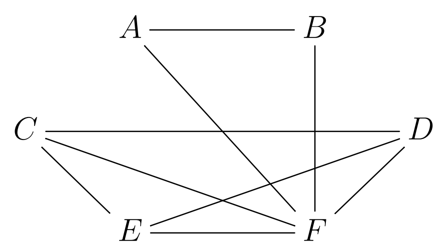
Задачи ко второй контрольной работе

Все задачи даны по задачнику Гаврилова и Сапоженко.

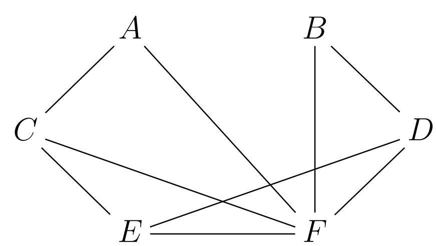
Задача 1. *Глава IV. Задачи 1.2 — 1.8.*

Доказательство. Решение задачи 1.6.

У такого графа шесть вершин. Одна из них (назовем ее F) имеет степень 5, значит она соединена со всеми другими вершинами. Удалим вершину F. Получим граф со степенями вершин (1, 1, 2, 2, 2). Назовем его вершины A, B, C, D, E. Возможны два варианта: либо есть ребро AB, либо нет.
Если ребро AB есть, то вершины A и B не могут быть связаны ни с какой другой вершиной. Тогда граф распадается на отрезок AB и треугольник CDE. Возвращаем вершину F, получаем ответ



Если ребра AB нет, то A надо соединять с одной из вершин C, D или E. Их всегда можно назвать так, чтобы это была вершина C. Удалим ребро вершину A. Получим граф с вершинами B, C, D, E со степенями (1, 1, 2, 2). Опять два варианта. Либо ребро BC есть, либо его нет.
Если BC есть, то вершины D и E придется соединять кратным ребром. Противоречие. Этот вариант отпадает.
Итак, ребра BC нет. Всегда можно назвать вершины D и E так, чтобы из B ребро шло к D. Удалим вершину B. Получим граф с вершинами C, D, E со степенями (1, 1, 2). Тут уже очевидно, что надо соединять CE и DE. Возвращаем все удаленные вершины. Получаем второй ответ



□

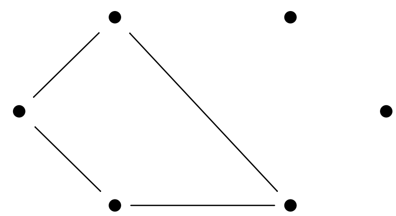
Задача 2. *Глава IV. Задача 1.34.*

Доказательство. Решение первого и последнего пункта см. на семинаре. □

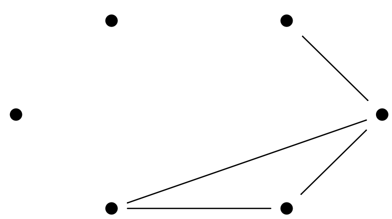
Задача 3. *Глава IV. Задача 1.21.*

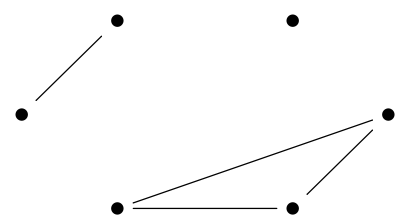
Доказательство. Решение пункта 1).

Перейдем к дополнительному графу. У полного графа на 6 вершинах $6\dot{5}/2 = 15$ ребер. Значит у дополнительного графа всего 4 ребра. Воспользуемся простым соображением: два графа изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнительные графы (кстати, почему?). Остается перебрать все варианты. Перебор устроим, считая циклы в графе. Самый длинный цикл, который можно сделать из 4 ребер — цикл длины 4. Получаем граф

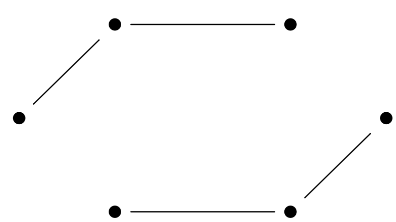


Если цикла длины 4 нет, то слдеующий по длине — цикл длины 3 (треугольник). На два треугольника не хватает ребер. Значит, треугольник может быть только один. Четвертое ребро либо присоединено к нему, либо нет

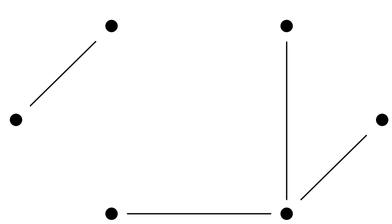


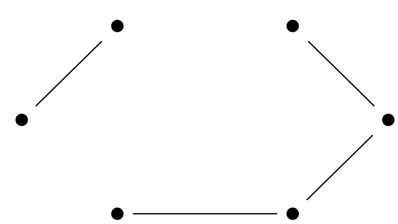


Если треугольника нет, то и циклов вообще нет. Тогда подумаем, сколько компонент связности может быть в этом ациклическом графе. Вообще–то есть формула: число компонент связности в ациклическом графе равно $p - q$ (докажите!). Значит имеем 2 компоненты, т.е. два дерева. Перебирем варианты. Пусть каждое дерево состоит из 3 вершин. Тогда имеем граф

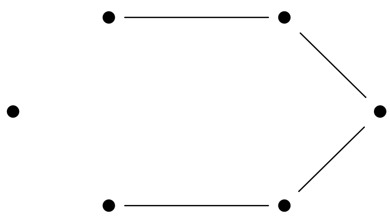


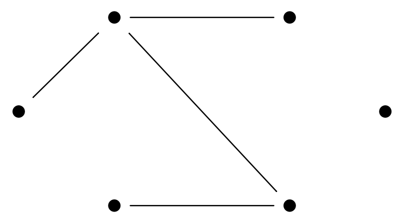
Пусть одно дерево с двумя вершинами, а другое с четырьмя. Имеем два варианта

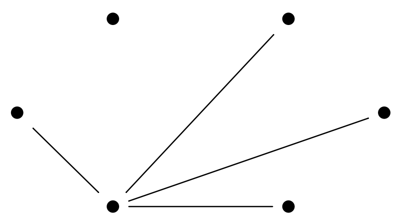




Последний вариант — одно дерево состоит из изолированной вершины. Перебираем все деревья с 4 ребрами







Итого, 9 графов. □

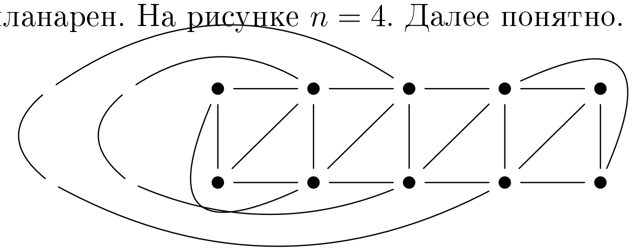
Задача 4. *Глава IV. Задача 1.36.*

Задача 5. *Глава IV. Задачи 3.1–3.4.*

Задача 6. *Глава IV. Задачи 2.1–2.8.*

Доказательство. Решение задачи 2.2 а).

Этот граф всегда планарен. На рисунке $n = 4$. Далее понятно.



□

Задача 7. *Глава IV. Задачи 2.18, 2.19.*