Задачи ко второй контрольной работе

Все задачи даны по задачнику Гаврилова и Сапоженко.

Задача 1. *Глава I. Задача 1.28. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 5). Определить все существенные переменные функции f.

Функция задана вектором значений (0101111101011111). Вектор содержит 16 элементов, значит функция зависит от 4 аргументов $f = f(x, y, z, t)$. Видим, что $f(0000) = 0$, $f(0001) = 1$. Значит t — существенная переменная. Видим, что

$$f(0000) = f(0010) = 0,\ f(0001) = f(0011) = 1,\ f(0100) = f(0110) = 1,\ f(0101) = f(0111) = 1,$$
$$f(1000) = f(1010) = 0,\ f(1001) = f(1011) = 1,\ f(1100) = f(1110) = 1,\ f(1101) = f(1111) = 1.$$

Значит, переменная z фиктивная. Видим, что $f(0000) = 0$, $f(0100) = 1$. Значит, переменная y существенная. Видим, что

$$f(0000) = f(1000) = 0,\ f(0001) = f(1001) = 1,\ f(0010) = f(1010) = 0,\ f(0011) = f(1011) = 1,$$
$$f(0100) = f(1100) = 1,\ f(0101) = f(1101) = 1,\ f(0110) = f(1110) = 1,\ f(0111) = f(1111) = 1.$$

Значит переменная x фиктивная. □

Другое решение пункта 5). Заметим, что первая половина вектора значений функции f повторяет вторую половину. Значит, переменная x фиктивная. Составим полином Жегалкина функции f методом неопределенных коэффициентов.

$$f(x, y, z, t) \quad = \quad c_0 \oplus c_1 t \oplus c_2 z \oplus c_3 zt \oplus c_4 y \oplus c_5 yt \oplus c_6 yz \oplus c_7 yzt.$$

Имеем $f(0000) = c_0 = 0$, $f(0001) = c_1 = 1$, $f(0010) = c_2 = 0$, $f(0011) = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = 1$, откуда $c_3 = 0$. Далее, $f(0100) = c_4 = 1$, $f(0101) = c_1 \oplus c_4 \oplus c_5 = 1$, откуда $c_5 = 1$. Далее, $f(0110) = c_2 \oplus c_4 \oplus c_6 = 1$, откуда $c_6 = 0$. Далее,

$$f(0111) = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = 1,$$

откуда $c_7 = 0$. Итак,

$$f(x, y, z, t) = t \oplus y \oplus yt.$$

Отсюда видим, что x и z — фиктивные переменные, а y и t — существенные. □

Задача 2. *Глава I. Задача 1.30. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 8). Найти все существенные переменные функции

$$f(x, y, z) = ((x \vee y\overline{z}) \to (y \to (xz))) \to (x \vee z).$$

Помним, что $a \to b = \overline{a} \vee b$. Еще помним, что $\overline{a \to b} = a\overline{b}$. Тогда

$$f(x,y,z) = \overline{(x \vee y\overline{z}) \to (y \to (xz))} \vee x \vee z = (x \vee y\overline{z})\overline{(y \to (xz))} \vee x \vee z =$$
$$= (x \vee y\overline{z}) \cdot y \cdot \overline{(xz)} \vee x \vee z = (x \vee y\overline{z}) \cdot y \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \vee x \vee z = xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee y\overline{z} \vee x \vee z =$$
$$= x \vee y\overline{z} \vee z.$$

Видим, что все переменные существенны. Действительно, $f(000) = 0$, а $f(100) = 1$ (переменная x существенная); $f(000) = 0$, а $f(010) = 1$ (переменная y существенная); $f(000) = 0$, $f(001) = 1$ (переменная z существенная). □

Задача 3. *Глава I. Задача 2.3. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 6). Записать СДНФ функции

$$f(x,y,z,t) = (x \to yzt) \cdot (z \to x\overline{y}).$$

Имеем

$$f = (\overline{x} \vee yzt) \cdot (\overline{z} \vee x\overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{z}.$$

Тогда вектор значений функции f равен (11111010). Значит СДНФ равна

$$f = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot \overline{z}$$

□

Задача 4. *Глава I. Задача 2.4. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 4). Записать СКНФ функции $f(x,y,z) = xy \oplus z$.

Запишем вначале СДНФ функции $g = \overline{f}$. Имеем

$$g(x,y,z) = \overline{xy \oplus z} = (xy \sim z) = xyz \vee \overline{xy} \cdot \overline{z} = xyz \vee (\overline{x} \vee \overline{y})\overline{z} = xyz \vee \overline{x} \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot \overline{z} =$$
$$= xyz \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}.$$

Теперь посчитаем функцию

$$f = \overline{g} = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (x \vee \overline{y} \vee z) \cdot (x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee y \vee z).$$

□

Задача 5. *Глава I. Задача 2.12. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 1). Построить СДНФ функции $f(x,y,z) = xy \vee \overline{z}$.

Имеем

$$f = xy(z \vee \overline{z}) \vee (xy \vee x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y \vee \overline{x} \cdot \overline{y})\overline{z} = xyz \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}.$$

□

Задача 6. *Глава I. Задача 2.22. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Задача 7. *Глава I. Задача 2.24. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 5). Составить полином Жегалкина функции $f(x, y, z) = x \downarrow ((x \to \overline{y}) \vee \overline{z})$ с помощью преобразований.

Запишем функцию с помощью конъюнкций и отрицаний. Помним, что $a \downarrow b = \overline{a} \cdot \overline{b}$. Еще помним, что $\overline{a \to b} = a \cdot \overline{b}$. Тогда

$$f = \overline{x} \cdot \overline{(x \to \overline{y}) \vee \overline{z}} = \overline{x} \cdot (\overline{x \to \overline{y}} \cdot z) = \overline{x} \cdot z \cdot x \cdot y = 0.$$

Это и есть полином Жегалкина: $f = 0$. $\square$

Задача 8. *Глава II. Задача 2.1. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 12). Выяснить, является ли функция $f(x, y, z) = xyz \oplus xy \oplus yz \oplus xz$ самодвойственной.

Составим ее таблицу истинности, а точнее, вектор значений $f(x, y, z) = (00010110)$. Теперь прочтем этот вектор справа налево, меняя все значения на противоположные. Получим (10010111) — это вектор значений двойственной функции f^*. Видим, что она не совпадает с f. $\square$

Задача 9. *Глава II. Задача 2.2. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Задача 10. *Глава II. Задача 2.3. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Задача 11. *Глава II. Задача 2.4. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 11). Определить какие переменные функции $f = (1010\,1110\,1100\,1010)$ следует заменить на x, а какие на $\overline{x}$, чтобы получить константу.

Поскольку вектор значений имеет длину 16, то функция зависит от четырех переменных $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Прочтем вектор значений функции f справа налево, меняя все значения на противоположные — получим вектор значений двойственной функции $f^* = (1010\,1100\,1000\,1010)$. Сравним векторы функций f и f^* и найдем какое-нибудь расхождение. В нашей задаче, например, отличаются седьмые координаты. Седьмая координата — это значение функции f на наборе 0110. В соответствие с этой последовательностью, подставляем $x_1 = \overline{x}$, $x_2 = x$, $x_3 = x$, $x_4 = \overline{x}$. Получаем функцию $g(x) = f(\overline{x}, x, x, \overline{x})$. Проверяем: $g(0) = f(1001) = 1$, $g(1) = f(0110) = 1$, т.е. $g(x) \equiv 1$. $\square$

Задача 12. *Глава II. Задача 2.19. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 7). Выяснить, является ли множество $A = \{x \oplus y \oplus z,\ \overline{x}\}$ самодвойственным.

Функция $f(x) = \overline{x}$ самодвойственная, т.к. $f^*(x) = \overline{f}(\overline{x}) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x} = f(x)$. Проверим функцию $g(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$ на самодвойственность. Имеем

$$g^*(x, y, z) = \overline{\overline{x} \oplus \overline{y} \oplus \overline{z}} = ((x \oplus 1) \oplus (y \oplus 1) \oplus (z \oplus 1)) \oplus 1 = x \oplus y \oplus z = g(x, y, z).$$

Ответ: «да». □

Задача 13. *Глава II. Задача 3.1. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Задача 14. *Глава II. Задача 3.2. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Задача 15. *Глава II. Задача 3.4. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете. Задание поменяйте следующим образом: «Подставляя в нелинейную функцию f функции из множества $\{0,\ 1,\ x,\ y,\ \overline{x},\ \overline{y}\}$, получить одну из функций xy или $\overline{xy}$.»*

Решение пункта 11). Преобразуем функцию к полиному Жегалкина

$$\begin{aligned} f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) = \overline{(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})} \cdot \overline{(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})} = \\ = ((x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1) \cdot (x_1 x_2 x_3 (x_4 \oplus 1) \oplus 1) = \\ = (x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \cdot (x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus 1) = \\ = x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \end{aligned}$$

Зафиксируем конъюнкцию $x_1 x_2$. Подставим x вместо x_1, y вместо x_2, 1 вместо остальных множителей конъюнкции (их в нашем случае нет) и 0 — вместо остальных переменных. Получим функцию $g(x, y) = f(x, y, 0, 0) = xy \oplus x \oplus y$. Теперь рассмотрим функцию

$$h(x, y) = f(\overline{x}, \overline{y}, 0, 0) = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus x \oplus 1 \oplus y \oplus 1 = xy \oplus 1 = \overline{(xy)}.$$

□

Задача 16. *Глава II. Задача 6.1. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 8). Выяснить, полна ли система функций $A = \{f,\ g\}$, $f = xy(x \oplus z)$, $g = 1$.

Заметим, что $f = xy \oplus xyz$, $g^* = 0$, $f(000) = 0$, $f(110) = 1$, $f(111) = 0$. Проверим функции f и g на принадлежность пяти основным классам.

$$\begin{aligned} f \in T_0, &\qquad g \notin T_0; \\ f \notin T_1, &\qquad g \in T_1; \\ f \notin L, &\qquad g \in L; \\ f \notin S, &\qquad g \notin S; \\ f \notin M, &\qquad g \in M. \end{aligned}$$

Видим, что в системе есть функция, выпадающая из каждого из пяти классов. По теореме Поста, система A полна. □

Задача 17. *Глава II. Задача 6.4. Решайте не более трех пунктов, пока не поймете, что все понимаете.*

Решение пункта 7). Выяснить, является ли в P_2 базисом система $A = \{x \oplus y,\ x \sim yz\}$.

Проверим систему на полноту. Решение повторяет решение предыдущей задачи. Первая функция (назовем ее f) не лежит в T_1, M, S. Вторая функция (назовем ее g) не лежит T_0, L. По теореме Поста, система полна.

Можно ли получить функцию f суперпозициями функции g? Нет, т.к. $g \in T_1$, то и все ее суперпозиции лежат в T_1, а $f \notin T_1$. Можно ли получить функцию g суперпозициями функции f? Нет, т.к. $f \in T_0$, то и все ее суперпозиции лежат в T_0, а $g \notin T_0$. Значит, система минимальна.

Система полна и минимальна, т.е. она базис. $\square$