Ответы к задачам для подготовки к первой контрольной работе

Задача 1. Ответ $8 \cdot 7 = 56$.

Задача 2. Ответ $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

Задача 3. Ответ $3'999'960$.

Решение. Таких чисел $5! = 120$. Из них 24 начинаются с единицы, еще 24 с двойки, 24 с тройки, 24 с четверки и 24 с пятерки. Просуммируем вначале старший разряд: $24 \cdot 1 + 24 \cdot 2 + ... + 24 \cdot 5 = 360$. Аналогично, 360 по каждому разряду. Тогда общая сумма

$$360 \cdot 10^4 + 360 \cdot 10^3 + 360 \cdot 10^2 + 360 \cdot 10 + 360 = 360 \cdot 11111 = 3999960.$$

Задача 4. Ответ 8!

Решение. На каждой горизонтали стоит одна ладья. Ладью на первой горизонтали можно поставить 8 способами, на второй 7 и т.д.

Задача 5. Ответ 36

Задача 6. Ответ C_{48}^{8}

Задача 7. Ответ $C_7^{1,2,1,1,1,1} = \frac{7!}{1!2!1!1!1!1!} = 2520$

Решение. Считая все буквы различными, получим 7! вариантов. Теперь заметим, что перестановка букв 'и' не меняет слова, т.е. надо раделить полученное число на 2!.

Задача 8. Ответ C_n^2

Задача 9. Ответ C_n^3

Задача 10. Ответ $C_{12}^5\left(C_{12}^5-1\right)$

Задача 11. Ответ 20

Решение. Сразу же дадим каждому по одному ореху. Теперь кому-то надо отдать третий орех (два варианта). Теперь надо раздать конфеты. Они все различны, значит имеем выборку. Порядок выдачи не важен. Тогда выбираем две из пяти и отдаем тому, у которого два ореха. Оставшиеся отдаем второму мальчику. Итого, $2C_5^2 = 20$ вариантов.

Задача 12. Ответ 796‘999‘680

Решение. Порядок в выборке не важен. Тогда зафиксируем раздачу при которой мы вначале выбираем по карте из каждой масти. Имеем 8^4 вариантов. Теперь остается доложить 4 карты произвольно из 48. Итого, $8^4 \cdot C_{48}^4$.

Задача 13. Ответ $C_{25}^3 \cdot C_{20}^3$.

Задача 14. Ответ $C_8^2 = 28$.

Решение. Зарезервируем восемь мест и на два произвольных места поместим символ $\to$. Он будет означать переход к следующему фрукту. Теперь каждый салат однозначно задан: берем столько яблок, сколько мест до первого $\to$, затем столько груш, сколько мест до второго $\to$, а потом столько бананов, сколько мест осталось до конца. Всего получим 6 мест, как и требуется. Поставить два символа $\to$ на какие-либо из 8 мест можно C_8^2 способами.

Задача 15. Ответ C_8^5

Решение. Каждый вариант характеризуется шестью числами — количеством выпадений 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Зарезервируем восемь мест и на пять произвольных мест поместим символ $\to$. Он будет означать переход к следующей цифре от 1 до 6.

Задача 16. Ответ C_{n+2}^{2}.

Задача 17. Ответ C_{n-1}^2.

Решение. Вначале каждому слагаемому дадим единицу. Осталось разложить число $n-1$ в сумму трех неотрицательных слагаемых. Береме ответ из предыдущей задачи.

Задача 18. Ответ $C_{12}^2 \cdot C_{17}^2 \cdot C_{22}^2$.

Решение. Сначала распределим розы. Надо число 10 представить в виде суммы трех слагаемых. Затем распределим нарцисы, затем тюльпаны

Задача 19. Ответ $C_{45}^{15} \cdot C_{30}^{15}$.

Решение. Для первой девушки отбираем 15 цветов из 45. Затем для второй 15 из 30. Остальные цветы отдаем третьей девушке.

Задача 20. Ответ $\frac{C_{45}^{15} \cdot C_{30}^{15}}{3!}$

Решение. Букеты, в отличие от девушек, можно переставлять.

Задача 21. Ответ 9!

Решение. Имеем 10! перестановок, но хоровод можно вращать по кругу, не меняя его. Для каждого хоровода таких поворотов 10. Это означает, что каждые 10 перестановок дают нам один и тот же хоровод. Итого, $10!/10 = 9!$.

Задача 22. Ответ $\frac{9!}{2}$.

Решение. См. предыдущую задачу, только ожерелье, в отличие от хоровода, можно еще и переворачивать.

Задача 23. Ответ 8.

Решение. По формуле включений–исключений сотрдуников, которые знают хотя бы один язык $47+35-23=59$. Тогда тех, кто не знает ни того, ни другого языка $67-59=8$.

Задача 24. Ответ

$$67 - (47 + 35 + 20 - 12 - 11 - 23 + 5) = 6.$$

Задача 25.

Решение. Введем три множества: все мальчики класса, все хорошие ученики класса (те, кто учатся без троек), все спортсмены класса. Тогда объединение этих множеств насчитывает $25 + 30 + 28 - 16 - 18 - 17 + 15 = 47$ человек — это больше, чем всего учеников в классе. Противоречие.

Задача 26. Ответ 228.

Решение. Четных чисел $[999/2] = 499$ (символом $[\cdot]$ обозначаем целую часть числа). Чисел, кратных трем $[999/3] = 333$ и так далее. Например, в пересечении этих множеств лежат числа кратные шести; их $[999/6] = 166$. Итого,

$$999 - (499 + 333 + 199 + 142 - 166 - 99 - 71 - 66 - 47 - 28 + 33 + 23 + 14 + 9 - 4) = 228$$

чисел.

Задача 27. Ответ 25.

Задача 28. Ответ 3600.

Решение. Сначала устанавливаем порядок секционных докладов (не определяем для них время, а только решаем, какой доклад первый среди секционных, какой будет вторым и так далее). Это можно сделать $5! = 120$ способами. Теперь в промежутки между секционными докладами ставим пленарные. Причем в каждый промежуток можно поставить не более одного пленарного доклада (они не должны повторяться). Значит мы выбираем из 6 промежутков (промежуток перед всеми секционными и промежуток после всех секционных тоже считаются) 4 с учетом порядка и без повторений. Это можно сделать $(6)_4 = 30$ способами.

Задача 29. Ответ 24.

Решение. Сначала определяем порядок букв ‘М‘, ‘Л‘, ‘К‘ (6 вариантов). Потом в промежутки ставим буквы ‘О‘ (в отличие от предыдущей задачи, буквы здесь неразличимы, т.е. имеем $C_4^3 = 4$ способа).

Задача 30. Ответ 17280.

Решение. Сначала расставляем в произвольном порядке баскетболистов и гандболистов; получим $5! = 120$ способов. Теперь решаем, в каком порядке встанут футболисты по отношению друг к другу; получим $4! = 24$ способа. Теперь всю группу футболистов (как единое целое) ставим в один из пропусков, между уже стоящими баскетболистами и гандболистами; получим 6 вариантов.

Задча 31. Ответ C_8^4.

Решение. Лестница должна иметь длину 9, так что нижний ряд состоит ровно из 9 плитое. Осталось сделать 4 ступеньки (первая ступенька уже стоит на 9 месте), для которых имеем 8 мест. При этом номера мест в выборке должны строго убывать. Значит нам надо образовать убывающую последовательность с 4 элементами, выбирая значения членов последовательности из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Таких последовательностей C_8^4 (читайте лекцию).

Задача 32. Ответ C_{10}^{5}.

Задача 33. Ответ $\begin{cases} C_{n+1}^{m}, & \text{если } m \leq n+1; \\ 0, & \text{если } m > n+1. \end{cases}$

Решение. Рисуем n единиц подряд (у нас 1 способ, т.к. единицы не различимы:). Теперь ставим нули в пропуски между единицами, т.е. выбираем m мест из $n+1$ без учета порядка (нули тоже неразличимы) и без повторений.

Задача 34. Ответ $(8)_5 = 6720$.

Решение. Представим себе 7 фантомных книг и мысленно расставим их в ряд (1 способ — фантомы неразличимы). Теперь в пропуски между ними ставим наши книги, т.е. проводим выборку 5 пропусков из 8 без повторений, но с учетом порядка.

Задача 35. Ответ $(9)_4 + (11)_5 = 58464$.

Решение. Назовем одного из гостей ‘председателем‘. Есть две возможности — включить его в выборку или не включать. Если мы его включаем, то соседей его брать уже нельзя, так что нам надо добрать 4 человека из 9 так, чтобы никакие из выбранных не сидели рядом. Берем ответ из предыдущей задачи: $(9)_4$ способов. Во второй ситуации (когда ‘председателя‘ мы не берем) надо надо выбирать 5 человек из 11; получаем $(11)_5$ способов.

Задача 36. Ответ $C_5^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! - C_5^2 \cdot C_5^3 \cdot 5! = 60000$.

Решение. Выбираем три четные цифры без учета порядка без воторений C_5^3 способами. Точно так же выбираем три нечетные цифры. Теперь переставляем 6 полученных цифр (они все различны) произвольным образом. Итого $C_5^3 \cdot C_5^3 \cdot 6!$ способов. Теперь вспоминаем, что на первое место нельзя ставить ноль. Предположим, мы его поставим на первое место. Тогда надо выбрать две четные цифры, три нечетные цифры, и переставить их в произвольном порядке. Получаем $C_5^2 \cdot C_5^3 \cdot 5!$ способов.

Задача 37. Ответ C_{n+m}^{n}.

Решение. Сначала притворимся, что мы различаем все буквы a и буквы b. Тогда имеем $(n+m)!$ слов (все перестановки). Теперь введем отношение эквивалентности на составленных словах: два слова эквивалентны, если они отличаются перестановкой букв a и/или перестановкой букв b. Для любого составленного слова можем переставить буквы a между собой $n!$ способами, а буквы b — $m!$ способами. Всего можем сделать $n!m!$ перестановок, не выходя из класса экивалентности. Значит, каждый класс содержит $n!m!$ элементов. Значит всего классов $\frac{(n+m)!}{n!m!}$.

Задача 38. Ответ $5^6C_6^3 - 5^5C_5^3$.

Решение. Закодируем вначале четные числа нулями, а нечетные единицами. Составим слово из трех нулей и трех единиц. Таких слов C_6^3 (см. предыдущую задачу). Теперь на те места, где стоят нули ставим четные цифры, т.е. проводим выборку 3 элементов из 5 с учетом порядка и с повторениями. Получим 5^3 способов. Аналогично, для нечетных цифр. Итого $5^6C_6^3$ способов. Теперь вспоминаем, что на первое место нельзя ставить ноль. Предположим, мы его поставим на первое место. Тогда надо выбрать две четные цифры и три нечетные цифры. Получаем $5^5C_5^3$ способов.

Задача 39. Ответ 43200.

Решение. Сажаем тех, кто хочет ехать по ходу на соответствующий диван. Т.е. проводим выборку 4 мест из 5 без повторений (сидеть друг у друга на коленях нельзя:) с учетом порядка (места различны, люди различны). Получим $(5)_4 = 120$ способов. Аналогично, со вторым диваном $(5)_3 = 60$ способов. На оставшиеся три места произвольным образом сажаем троих оставшихся; $(3)_3 = 6$ способов.

Задача 40. Ответ $C_{22}^5 - C_{10}^5 - C_{10}^4 \cdot C_{12}^1$. Или можно так: $C_{12}^5 + C_{12}^4 \cdot C_{10}^1 + C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 + C_{12}^2 \cdot C_{10}^3$.

Решение. Не более 3 — это 0 либо 1, либо 2, либо 3. Проще считать через отрицание. Сначала составляем команду произвольным образом: выбираем 5 человек из 22 без учета порядка и без повторений C_{22}^5 способами. Теперь вычитаем неправильные варианты. Команд, содержащих ровно 5 юношей, получим C_{10}^5 (выбираем 5 юношей из 10). Команд, содержащих ровно 4 юноши, получим $C_{10}^4 \cdot C_{12}^1$ (сначала выбираем 4 юноши из 10, затем одну девушку из 12).

Задача 41. Ответ 36, $4C_{13}^5$, $36 \cdot 4^4$.

Решение. Сначала выбираем масть 4 способами. Теперь выбираем карту наименьшего достоинства 9 способами (не 13, потому, что надо оставить место для следующих по старшинству в выборке). Остальные определяются автоматически. Итого, 36 вариантов.

Сначала выбираем одну из четырех мастей. Теперь делаем выборку карт имеенно этой масти.

Сначала выбираем карту наименьшего достоинства $4 \cdot 9 = 36$ способами. Каждую следующую выбираем точно определенного достоинства, но произвольной масти

Задача 42. Ответ 265.

Решение. Пусть есть карточки с буквами a_1, $a_2, \dots$, a_s, причем буква a_1 повторяется n_1 раз, буква a_2 — n_2 раз и т.д. Из этих карточек требуется составить слово длины k, где $k \le n_1 + \dots + n_s$. Сколько различных слов можно составить? Пусть букву a_1 мы возьмем $k_1 \le n_1$ раз, букву a_2 возьмем $k_2 \le n_2$ раз и т.д. При этом надо взять числа k_j так, чтобы $k_1 + k_2 + \dots + k_s = k$. Сколько таких слов мы можем составить? Сначала расставим буквы как угодно, а потом заметим, что одинаковые буквы можно переставлять, не меняя слово. Получаем $\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$ вариантов. Мы решили задачу для фиксированных параметров k_j. Перебираем все варианты выбора этих параметров — получаем итоговый ответ

$$\sum_{\substack{0\le k_1\le n_1,\dots 0\le k_s\le n_s\\ k_1+\dots+k_s=k}} \frac{k!}{k_1!\dots k_s!}.$$

Для нашей задачи имеем ‘буквы‘ ‘1‘, ‘2‘, ‘3‘ и ‘5‘ с кратностями 1, 2, 4 и 1 соответственно. Составлять надо пятибуквенные слова. Чтобы не запутаться, перебираем наборы (k_1, k_2, k_3, k_4) в порядке возрастания, т.е. $(0, 0, 4, 1)$, $(0, 1, 3, 1)$, $(0, 1, 4, 0)$, $(0, 2, 2, 1)$, $(0, 2, 3, 0)$, $(1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 4, 0)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, 1, 3, 0)$, $(1, 2, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 0)$. Получим

$$\sum_{\substack{0\le k_1\le 1,\ 0\le k_2\le 2,\ 0\le k_3\le 4,\\ 0\le k_4\le 1,\ k_1+k_2+k_3+k_4=5}} \frac{5!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = 5!\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!2!}\right) = 5+20+5+30+10+20+5+60+20+60+30 = 265.$$

Задача 43. Ответ 0, $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, $\frac{1}{n+1}$.

Задача 44. Ответ $C_{50}^{12} \cdot A_{40}^{12}$.

Решение. Сначала выбираем кавалеров. Имеем C_{50}^{12} способов (повторяться нельзя, а порядок пар не важен). Теперь выбираем дам. Теперь уже порядок важен (ведь это важно, с каким именно кавалером ты танцуешь:). Получаем $(40)_{12}$ способов.