Дополнительные главы математического анализа
лекции 1—7

лектор - В. Н. Денисов

Факультет космических исследований

2018-2019 учебный год

Движение ракеты. Формула Циолковского

Ракета массы $M(t)$ движется со скоростью $v(t)$. Скорость истечения топлива $\omega = \text{const}$. Импульс ракеты в момент времени t:

$$I(t) = M(t)v(t);$$

в момент времени $(t+h)$:

$$I(t+h) = M(t+h)v(t+h).$$

Изменение массы: $|\Delta M| = M(t) - M(t+h)$. Импульс выброшенной массы: ΔI удовлетворяет неравенствам

$$(v(t)-\omega)|\Delta M| \leqslant \Delta I \leqslant (v(t+h)-\omega)|\Delta M|.$$

Тогда

$$\Delta I = (v(t)-\omega)|\Delta M| + \alpha(h)|\Delta M|, \quad \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0.$$

С другой стороны,

$$\Delta I = -I(t+h) + I(t).$$

Движение ракеты. Формула Циолковского

Значит,

$$-M(t+h)v(t+h) + M(t)v(t) =$$

$$= (v(t)-\omega)(M(t)-M(t+h)) + \alpha(h)(M(t)-M(t+h)).$$

Отсюда

$$M(t+h)(v(t)-v(t+h)) =$$

$$= -\omega(M(t)-M(t+h)) + \alpha(h)(M(t)-M(t+h))$$

Разделим обе части на h и возьмем предел при стремлении h к нулю:

$$M(t)v'(t) = -\omega M'(t), v(t) = -\omega \ln(M(t)) + C.$$

Если $v(0) = v_0$, $M(0) = M_0$, то

$$v(t) = \omega \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right) + v_0.$$

Движение ракеты. Формула Циолковского

Обозначим m_k – масса корпуса ракеты без топлива, m_t – масса топлива, v – скорость после полной отработки топлива. Тогда

$$v = \omega \ln\left(1 + \frac{m_t}{m_k}\right) + v_0 - \text{*формула К.Э.Циолковского.*}$$

Если $v_0 = 0$, то для достижения скорости v нужно затратить топливо массы

$$m_T = m_k\left(e^{V/\omega} - 1\right).$$

Чтобы тело стало спутником Земли:

$$m_k \frac{v_1^2}{R} = m_k g,$$

R — радиус орбиты, v_1 — первая космическая скорость. Поскольку $R \approx R_0$ — радиус Земли, то

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx \sqrt{gR_0} \approx 8\text{км/с}.$$

Конструкция ракеты для космических полётов

Пусть $m_k = m_p + m_s$, где m_p – полезная масса (масса спутника), m_s – структурная масса (ракетная конструкция). Обозначим $m_0 = m_k + m_t$. Тогда

$$v(t) = \omega \ln \left(\frac{m_0}{m_p + m_s} \right).$$

Модель трёхступенчатой ракеты: пусть m_i – масса i-й ступени, λm_i — соответствующая структурная масса.

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3.$$

Когда первая ступень полностью отработала:

$$v_1 = \omega \ln \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda_{m_1} + m_2 + m_3} \right)$$

Когда вторая ступень полностью отработала:

$$v_2 = v_1 + \omega \ln \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda_{m_2} + m_3} \right)$$

Конструкция ракеты для космических полётов

Когда третья ступень полностью отработала:

$$v_3 = v_2 + \omega \ln \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda_{m_3}} \right)$$

Окончательно:

$$v_3 = \omega \ln \left(\frac{m_p + m_1 + m_2 + m_3}{m_p + \lambda_{m_1} + m_2 + m_3} \cdot \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda_{m_2} + m_3} \cdot \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda_{m_3}} \right)$$

Обозначим

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}; \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}; \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}$$

Получаем следующую задачу:

$$v_3 = \omega \ln \left(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \cdot \frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \cdot \frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)} \right) =$$

$$= f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \to \max$$

при условии

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{m_0}{m_p}.$$

Конструкция ракеты для космических полётов

Обозначим $\alpha = \left(\dfrac{m_0}{m_p}\right)^{1/3}$. Условный максимум достигается при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Таким образом,

$$v_3 = \omega \ln \left(\frac{\alpha^3}{(1 + \lambda(\alpha - 1))^3} \right).$$

Введём обозначение:

$$\frac{\alpha}{1 + \lambda(\alpha - 1)} = e^{v_3/3\omega} = 1/p$$

Тогда

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{p-\lambda}, \quad \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^3$$

Аналогично для n ступеней:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^n, \quad p = \exp - \left(\frac{v_n}{n\omega}\right).$$

Подъём тела над поверхностью Земли

Пусть тело массы m движется над поверхностью Земли. Траектория движения описывается вектором

$$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

$\overrightarrow{F}(p(t))$ — сила, действующая на тело в точке $p(t)$ в момент времени t,
$A(\alpha, \beta)$ — работа этой силы, $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$.
Тогда $A(\alpha, \beta)$ — аддитивная функция интервала (α, β):

$$A(\alpha, \beta) = A(\alpha, \gamma) + A(\gamma, \beta), \quad \alpha, \beta, \gamma \in [a, b].$$

Естественно предположить, что

$$\inf_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} (\overrightarrow{F}(p(t)), \overrightarrow{v}(t))(\beta - \alpha) \leqslant A(\alpha, \beta) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} (\overrightarrow{F}(p(t)), \overrightarrow{v}(t))(\beta - \alpha).$$

Тогда

$$A(a, b) = \int_a^b (\overrightarrow{F}(t), \overrightarrow{v}(t))dt, \quad \overrightarrow{F(t)} = G\frac{mM}{|\overrightarrow{r(t)}|^3}\overrightarrow{r(t)}.$$

Подъём тела над поверхностью Земли

Лемма: Пусть $I(a,b)$ – аддитивная функция, удовлетворяющая условию:

$$\inf_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} f(t)\cdot(\beta-\alpha) \leqslant I(\alpha,\beta) \leqslant \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} f(t)\cdot(\beta-\alpha)\,\forall(\alpha,\beta)\subset(a,b).$$

Тогда

$$I(a,b) = \int_a^b f(t)dt, \qquad (*)$$

если f интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство Пусть $T = t_0, t_1, .., t_n$ – произвольное разбиение $[a,b]$. Тогда $\forall k \in 1\dots n$:

$$\inf_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k} f(t)\cdot\Delta t_k \leqslant I(t_{k-1},t_k) \leqslant \sup_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k} f(t)\cdot\Delta t_k.$$

Суммируем по k, получаем (в силу аддитивности):

$$s(T) \leqslant I(a;b) \leqslant S(T),$$

где $s(T), S(T)$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу. Отсюда и из определения интеграла Римана следует $(*)$. Лемма доказана.

Подъём тела над поверхностью Земли

Получаем, что работа

$$A(a,b) = \frac{GmM}{2}\int_a^b \frac{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))'}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{3/2}}dt =$$

$$= -GMm \cdot \left(\frac{1}{|\overrightarrow{r(b)}|} - \frac{1}{|\overrightarrow{r(a)}|}\right)$$

зависит только от начальной и конечной точек. Пусть

$$U(r) = \frac{MG}{r} - \text{потенциал Ньютона.}$$

Тогда

$$A_{r_0r_1} = m(U(r_0) - U(r_1)).$$

Если R – радиус Земли, то $U(r) = \dfrac{gR^2}{r}$. Чтобы отправить тело с поверхности Земли на «бесконечное расстояние», требуется совершить работу:

$$A_{R\infty} = \lim_{r\to\infty} A_{Rr} = mgR.$$

Падение тела в атмосфере

Тело массы m падает, сопротивление воздуха пропорционально скорости падения с коэффициентом α:

$$mv'(t) = mg - \alpha v(t)$$

$$v' = g - \beta v, \quad \text{обозначим} \quad \beta = \alpha/m.$$

$$v' = -\beta v \quad \Rightarrow \quad v = Ce^{-\beta t}.$$

С помощью метода вариации постоянных находим:

$$C(t) = \frac{ge^{\beta t}}{\beta} + C;$$

$$v = \left(\frac{ge^{\beta t}}{\beta} + C\right) e^{-\beta t} = \frac{g}{\beta} + Ce^{-\beta t}.$$

Пусть $v(0) = v_0$, тогда

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t} + \frac{mg}{\alpha}(1 - e^{-\beta t}).$$

При $t \to \infty$: $v_\infty = \dfrac{mg}{\alpha}$ — стационарный режим.

Барометрическая формула

Пусть $p(h)$ – давление столба воздуха на площадку $S = 1$ кв. см на высоте h. Рассмотрим параллелепипед П, две стороны которого находятся на высоте h и $h+\Delta$. Масса воздуха, заключенного в П, равна

$$\rho(\xi) \cdot 1 \cdot \Delta, \quad \xi \in [h, h + \Delta].$$

Тогда

$$p(h) - p(h + \Delta) = g\rho(\xi)\Delta.$$

Разделив на Δ и переходя к пределу при $\Delta \to 0$:

$$p'(h) = -g\rho(h)$$

В силу закона Клайперона

$$p(h) = \lambda\rho(h),$$

где $\lambda = \dfrac{RT}{M}$, T — температура воздуха, R — универсальная газовая постоянная, M — молярная масса. Тогда

$$p'(h) = \frac{-gp(h)}{\lambda} \Rightarrow p(h) = p_0 e^{-gh/\lambda}, \quad p_0 = p(0).$$

Криволинейные интегралы

Пусть $L = \{(x,y)|\, x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a,b]\}$ — гладкая кривая, $\varphi, \psi \in C^1[a,b]$, $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$. Функция $g(x,y)$ определена на L.
Обозначим $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ — разбиение $[a,b]$, $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1 \dots n$, $x_k = \varphi(\xi_k), y_k = \psi(\xi_k)$. Заметим, что длина образа отрезка $[t_{k-1}, t_k]$:

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Определение 1. *Криволинейным интегралом 1-го рода от функции* $g(x,y)$ *по кривой L* называется предел при стремлении диаметра разбиения к 0 интегральных сумм вида: $\sigma_1(T) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k)\Delta l_k$. Обозначается

$$I_1 = \int_L g(x,y) dl.$$

(Т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall T$, $\Delta_T =< \delta$ и любого выбора точек $\xi_1, .., \xi_n$: $|\sigma_1(g) - I_1| < \varepsilon$.)

Определение 2. *Криволинейным интегралом 2-го рода от функции* $g(x, y)$ *в направлении от точки* $A(\varphi(a), \psi(a))$ *до точки* $B(\varphi(b), \psi(b))$ *по переменной* x называется предел при $\Delta_T \to 0$ интегральных сумм вида:

$$\sigma_2(T) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k)\Delta x_k.$$

Обозначается

$$I_2 = \int_{AB} g(x, y)dx.$$

Аналогично можно определить:

$$I_3 = \int_{AB} g(x, y)dy.$$

Определение 3. *Общим криволинейным интегралом 2-го рода* называется выражение:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Криволинейные интегралы

Теорема 1. Пусть функция $g(x, y)$ непрерывна на L. Тогда интегралы I_1, I_2, I_3 существуют и

$$I_1 = \int_a^b g(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt;$$

$$I_2 = \int_a^b g(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt;$$

$$I_3 = \int_a^b g(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt.$$

Теорема 2. Пусть L - гладкая кривая с началом в точке A и концом в точке B; функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на L. Интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда существует $U(x, y)$ такая, что

$$dU = Pdx + Qdy.$$

Криволинейные интегралы

Функция $U(x, y)$ называется *потенциалом векторного поля* $(P(x, y), Q(x, y))$. В этом случае

$$\int_{AB} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = U(B) - U(A).$$

В этом случае говорят, что дифференциальная форма $Pdx + Qdy$ является *полным дифференциалом.*

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - выпуклая область. Дифференциальная форма $Pdx + Qdy$ является в Ω полным дифференциалом тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Колебания стержня

Рассмотрим тонкий стержень с плотностью $\rho(x)$. Тогда его масса

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Выясним, как уравновесить стержень. Закон рычага:

$$\frac{d\mu}{dm} = \frac{x}{R} \Rightarrow \mu R = \int_a^b x\rho(x)dx \left(= \int_a^b x dm(x) \right).$$

Если вся масса стержня сосредоточена в одной точке x_c, то

$$\mu R = m x_c \Rightarrow x_c = \int_a^b x\rho(x)dx.$$

Выберем систему координат так, чтобы начало совпадало с центром тяжести:

$$x_c = \int_a^b x\rho(x)dx = 0.$$

Колебания стержня

Потенциальная энергия стержня в произвольном положении:

$$U = \int_a^b gz\rho(x)dx = \int_a^b g(z_c + x\cos(\alpha))\rho(x)dx =$$

/в качестве переменной интегрирования возьмем расстояние от x_c до x/

$$= \int_a^b gz_c\rho(x)dx + g\cos(\alpha)\int_a^b x\rho(x)dx =$$

$$= \left(\int_a^b x\rho(x)dx = 0\right) = gz_c m,$$

то есть потенциальная энергия зависит только от центра тяжести.

Вращение стержня

Пусть теперь стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω (рад/с). Вычислим его кинетическую энергию. Имеем

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad dl = xd\varphi = x\omega dt - \text{\textit{длина стержня.}}$$

Поэтому *линейная скорость*

$$v(x) = \frac{dl}{dt} = \frac{xd\varphi}{dt} = x\omega.$$

Кинетическая энергия элемента массы dm (от x до $x + dx$) равна $dE = \dfrac{dm \cdot v^2}{2}$.

Отсюда кинетическая энергия всего стержня

$$E = \int_a^b \frac{v^2}{2} dm = \int_a^b \frac{x^2\omega^2}{2} \rho(x) dx = \frac{\omega^2}{2} \int_a^b x^2 \rho(x) dx,$$

где $I = \int_a^b x^2 \rho(x) dx$ — *момент инерции*.

Понятие интеграла Римана-Стилтьеса

Пусть, например, на стержень «подвешены» точечные массы. Тогда плотность $\rho(x)$ элемента стержня может быть представлена в виде

$$\rho(x)dx = dg(x),$$

где $g(x)$, вообще говоря, не дифференцируемая функция. Такая конструкция приводит к понятию интеграла *Римана-Стилтьеса*.

Введем сначала понятие *функции ограниченной вариациии.*
Определение 1. Пусть функция f определена на $[a, b]$. Говорят, что f *имеет на* $[a, b]$ *ограниченную вариацию*, если существует C>0: $\forall T = \{x_0, x_1, .., x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — разбиения $[a, b]$:

$$V(f, T) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant C.$$

Понятие интеграла Римана-Стилтьеса

Величина
$$\sup_T (V(f,T)) = V_a^b f$$
называется *полной вариацией* $f(x)$ на $[a,b]$. Говорят, что функция f имеет на $[a,b]$ *ограниченную вариацию* и пишут $f \in BV[a,b]$.

Свойства. 1) Если $f, g \in BV[a,b]$, то $f \pm g \in BV[a,b]$.

2) Если f монотонна и ограничена на $[a,b]$, то $f \in BV[a,b]$ и
$$V_a^b f = |f(b) - f(a)|.$$

3) Если $f \in BV[a,b]$, $a < c < b$, то $f \in BV[a,c]$, $f \in BV[c,b]$ и
$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f.$$

4) Если $f \in BV[a,b]$, то $f = \varphi - \psi$, где φ, ψ ограничены и возрастают на $[a,b]$.

Понятие интеграла Римана-Стилтьеса

Определение 2. Пусть функция f определена на [a, b]; $g \in BV[a;b]$. Возьмём произвольное $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ — размеченное разбиение отрезка и обозначим

$$\Delta_k g = g(x_k) - g(x_{k-1}).$$

Выражение

$$\sigma_g(V) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k g$$

называется *интегральной суммой Римана-Стилтьеса.*

Определение 3. Если существует число $I_g(f)$ такое, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$: для любого размеченного разбиения V отрезка $[a, b]$ $\Delta_V < \delta$ выполнено

$$|\sigma_g(V) - I_g(f)| < \varepsilon,$$

то $I_g(f)$ называется *интегралом Римана-Стилтьеса* от функции f по функции g и обозначается

$$(RS)\int_a^b f(x)dg(x).$$

Понятие интеграла Римана-Стилтьеса

Теорема 1. Если $f \in C[a,b]$, $g \in BV[a,b]$, то f интегрируема по g на $[a,b]$.
Определение 4. Пусть g возрастает на $[a,b]$, f ограничена на $[a,b]$. T — произвольное разбиение $[a,b]$. Обозначим

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x).$$

Выражения

$$S_g(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k g \quad \text{и} \quad s_g(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k g$$

называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу - Стилтьеса.* Свойства сумм Дарбу-Стилтьеса аналогичны свойствам соответствующих сумм Дарбу для интеграла Римана.

Числа $I_g^*(f) = \inf\limits_T S_g(T)$ и $I_{*g}(f) = \sup\limits_T s_g(T)$ называются *верхним и нижним интегралами Римана-Стилтьеса*.

Понятие интеграла Римана-Стилтьеса

Теорема 2. Пусть функция f ограничена на $[a,b]$, g возрастает на $[a,b]$. Интеграл $I_g(f)$ существует тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0$ найдётся T — разбиение $[a,b]$:

$$S_g(T) - s_g(T) < \varepsilon.$$

Следствие. $I_g(f)$ существует тогда и только тогда, когда $I_g^*(f) = I_{*g}(f)$.

Теорема 3. Пусть $f \in R[a,b]$, $g \in Lip[a,b]$. Тогда $I_g(f)$ существует.

Пример: Вычислим $\int_0^3 xd\{x\}$, $\{x\}$ — дробная часть x.

$$\int_0^3 xd\{x\} = \int_0^1 xd\{x\} + \int_1^2 xd\{x\} + \int_2^3 xd\{x\} =$$

$$= \int_0^1 xdx + 1\cdot(-1) + \int_1^2 xdx + 2\cdot(-1) + \int_2^3 xdx + 3\cdot(-1) = -3/2.$$

Свойства интеграла Римана-Стилтьеса

1) Если $f, g' \in R[a,b]$, то $(RS)\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$.
2) Если f_1, f_2 интегрируемы по g на $[a,b]$, то

$$\int_a^b \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) dg(x) = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dg(x).$$

Если f интегрируема по g_1 и g_2 на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)d(\beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x)) = \beta_1 \int_a^b f(x)dg_1(x) + \beta_2 \int_a^b f dg_2(x).$$

3) $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$, $a < c < b$, если все три интеграла существуют.
Замечание. Обратное, вообще говоря, не верно. Пусть, например,

$$f(x) = \begin{cases} 1, -1 \leqslant x < 0, \\ 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^1 f(x)dg(x) = 0, \quad \int_{-1}^0 f(x)dg(x) = 0.$$

Свойства интеграла Римана-Стилтьеса

При этом

$$\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$$

не существует, так как при произвольном разбиении значение интегральных сумм зависит от выбора точек разбиения, а значит, предела интегральных сумм нет.

4) Пусть f интегрируема по g на $[a,b]$, f', $g \in R[a,b]$. Тогда

$$(RS)\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

5)Пусть g возрастает на $[a,b]$; f, h интегрируемы по g на $[a,b]$. Если $f(x) \leqslant h(x)$ $\forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dg(x) \leqslant \int_a^b h(x)dg(x).$$

Свойства интеграла Римана-Стилтьеса

6)Пусть g возрастает на $[a,b]$, f ограничена и интегрируема по g на $[a,b]$; $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Тогда существует $\nu \in [m;M]$:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \nu(g(b) - g(a)).$$

Теорема 4 (об общем виде линейного функционала в $C[a,b]$).
1) Если $g \in BV[a,b]$, то $I_g(f)$ представляет собой линейный функционал в пространстве $C[a,b]$.
2) Пусть $\phi(f)$ — произвольный линейный функционал в пространстве $[a,b]$. Тогда найдётся $g \in BV[a,b]$ такая, что $\phi(f) = \int_a^b f(x)dg(x)$.

Малые колебания струны

Струна с плотностью ρ_0 длиной l и толщиной $\ll l$ совершает малые колебания. Сила натяжения $\overrightarrow{F_0}$ направлена по касательной в каждой точке. Будем рассматривать струну как множество примыкающих друг к другу N материальных точек. Пусть m_i — масса i-той точки, $i = 1, \ldots, N$. Тогда

$$m_i = \rho_0 \Delta x_i = \rho_0 \frac{l}{N}.$$

По горизонтальной оси струна не движется:

$$v_{x_i} = \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (*).$$

При $N \to \infty$ получаем кривую $y = y(x, t)$.

Цель — вывести уравнение этой кривой в каждый момент времени t.

Малые колебания струны

Кинетическая энергия i-ой массы (в силу $(*)$):

$$T_i = \frac{1}{2}m_i(v_{y_i})^2 = \frac{1}{2}m_i\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2.$$

Кинетическая энергия всей системы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_i^2 \Delta x.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — сила, действующая на i-тую массу. Тогда $\mathcal{F}_{ix} = 0$,

$$\mathcal{F}_{iy} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_- = -F_0\sin(\alpha) + F_0\sin(\beta) \approx (\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha)$$

$$\approx F_0\left(y'_x(x_i - \frac{\Delta x}{2}) - y'_x(x_i + \frac{\Delta x}{2})\right)\Delta x \approx (\text{в силу малости}\,\Delta x)$$

$$\approx -F_0\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2}\right)\Delta x = -F_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x}\right)_i\right)\Delta x$$

$$= -F_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i \Delta x = -\frac{F_0}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)\Delta x.$$

Малые колебания струны

Потенциальная энергия i-той массы:

$$V_i = -\frac{1}{2} F_0 \left(\frac{\partial y}{x}\right)_i^2 \Delta x.$$

Потенциальная энергия всей системы:

$$V_i = -\frac{1}{2} F_0 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{x}\right)_i^2 \Delta x$$

Лагранжиан системы:

$$L(y, \dot{y}, t) = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} \left(\rho_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_i^2 + F_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i^2\right) \Delta x.$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Малые колебания струны

Получаем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \rho_0 \cdot 2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_i \Delta x;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_i \Delta x;$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i^2 \Delta x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i^2 \frac{1}{\frac{\partial y_i}{\partial x}}\Delta x =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_0 \cdot 2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}\right)_i \Delta x = \sum_{i=1}^{N} F_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i \Delta x.$$

При $N \to +\infty$:

$$\int_0^l \left(-\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx = 0.$$

Следовательно, уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2};\ t > 0;\ x \in (0, l); \quad a_0^2 = \frac{\rho_0}{F_0}.$$

Простейшая вариационная задача

Функционал — это отображение $I(y) : \Omega \to \mathbb{R}$, определенное на некотором множестве Ω функций $y(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, и принимающее значения в множестве $\mathbb{R}$. Простейшие функционалы задаются формулами вида

$$I(y) = \int\limits_M F(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (1)$$

где $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $n = 1$, $M = [a, b]$. Функция $F(x, y, y_x)$ считается заданной, если ее выбор определяет функционал (1). Примеры функциональных пространств:

1. $C(M)$ — пространство функций, непрерывных на M,
$$\|y(\cdot)\|_{C(M)} = \max_{x \in M} |y(x)|.$$
2. $C^{(1)}(M)$ — пространство функций, непрерывных на M вместе со своей производной,
$$\|y(\cdot)\|_{C^{(1)}(M)} = \max_{x \in M} |y(x)| + \max_{x \in M} |y'(x)|.$$

Простейшая вариационная задача

Основная (простейшая) задача вариационного исчисления: поиск минимума функционала (1) на классе

$$\Omega = \{y(x),\, x \in M,\, y(x) \in C^{(1)}(M),\, y(a) = \alpha_1,\, y(b) = \alpha_2\}.$$

При этом $F \in C^{(2)}(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $M = [a, b]$.
Определение. Функционал $\varphi(y) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *непрерывным* в точке y_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \|y - y_0\| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

Лемма 1. Если $a(x) \in C[a, b]$ и $\int\limits_a^b a(x)h(x)dx = 0$ для любой функции $h(x) \in C^{(1)}[a, b]$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $a(x) \equiv 0$.

Следствие. Если $b(x) \in C[a, b]$ и $\int\limits_a^b b(x)h'(x)dx = 0$ для любой функции $h(x) \in C^{(1)}[a, b]$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $b(x) \equiv const$.

Лемма 2. Если

$$\int_a^b (a(x)h(x) + b(x)h'(x))dx = 0 \qquad (2)$$

для любой функции $h(x) \in C^{(1)}[a, b]$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $b(x) \in C^{(1)}[a, b]$ и $a(x) - b'(x) \equiv 0$.

Рассмотрим некоторый функционал $J(y)$ и его приращение

$$\Delta J(y) = J(y + h) - J(y),$$

отвечающее приращению h переменной y. Если

$$\Delta J(y) = \varphi(h) + o(\|h\|), \quad \|h\| \to 0,$$

то $\varphi(h)$ — *вариация* (первый дифференциал) функционала J. Обозначение: $\delta J|_{y_0} := \varphi(h)$.

Простейшая вариационная задача

Теорема 1. Если функционал $J(y)$ достигает экстремума в точке y_0, то $\delta J|_{y_0} = 0$.

Определение 1. Функция $\widehat{y}(x) \in C^{(1)}[a,b]$ доставляет *слабый экстремум* функционалу $J(y)$, если существует $\delta > 0$, т.ч. $\forall y \in C^{(1)}[a,b]$, $\|y - \widehat{y}\|_1 < \delta$: $J(\widehat{y}) \geqslant J(y)$ $(\leqslant J(y))$, где

$$\|f\|_1 = \sup_{[a,b]} |f(x)| + \sup_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Определение 2. Функция $\widehat{y}(x) \in KC^{(1)}[a,b]$ (пространство кусочно-дифференцируемых функций) доставляет *сильный экстремум* функционалу $J(y)$, если существует $\delta > 0$, т.ч. $\forall y \in KC^{(1)}[a,b]$, $\|y - \widehat{y}\|_0 < \delta$: $J(\widehat{y}) \geqslant J(y)$ $(\leqslant J(y))$, где

$$\|f\|_0 = \sup_{[a,b]} |f(x)|.$$

Теорема 2. Для того, чтобы функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

определенный на множестве функций $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$, достигал на данной функции $\widehat{y}(x)$ (слабого) экстремума, необходимо, чтобы функция $\widehat{y}(x)$ удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right) = 0. \qquad (3)$$

Пример. $J(y) = \int_0^1 (xy^2 + x^2yy' + (1 + x^2)y'^2)dx \to extr$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Уравнение Эйлера:

$$y''(1 + x^2) + 2xy' = 0.$$

Получаем, что $\widehat{y}(x) = \dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x$ доставляет минимум функционала $J(y)$ (проверяется непосредственно).

Задача со свободными концами

$J(y) \to extr$, условия на концах отсутствуют. Вариация функционала (1) имеет вид

$$\delta J = \int\limits_a^b (F'_y h(x) + F'_{y'} h'(x))dx.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\delta J = \int\limits_a^b \left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right) h(x)dx + F'_{y'}|_{x=b} h(b) + F'_{y'}|_{x=a} h(a).$$

Если $y = y(x)$ — допустимая экстремаль, то интегральный член равен нулю и, в силу произвольности $h(x)$, имеем:

$$F'_{y'}|_{x=b} = 0, \qquad F'_{y'}|_{x=a} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, для решения задачи о свободными концами следует найти общий интеграл уравнения Эйлера (3) и затем определить произвольные постоянные из условий (4).

Задача Больца

Постановка задачи:

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx + l(y(a), y(b)) \to extr,$$

$y \in C^{(1)}[a, b]$ (или $y \in KC^{(1)}[a, b]$). Необходимые условия: выполнение уравнения Эйлера и *условия трансверсальности*:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=a} = \frac{\partial l}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=b} = -\frac{\partial l}{\partial y_1},$$

где $y_0 = y(a)$, $y_1 = y(b)$.

Пример. $J(y) = \int_0^1 (y'^2 - y)dx + y^2(1) \to extr$.

Уравнение Эйлера: $2y''(x) = -1$. Условия трансверсальности: $\widehat{y}'(0) = 0$, $\widehat{y}'(1) = -\widehat{y}(1)$. Отсюда $\widehat{y}(x) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{4}$.

Далее,

$$\Delta J(\widehat{y}) = J(\widehat{y} + h) - J(\widehat{y}) = \int_0^1 h'^2 dx + h^2(1) > 0,$$

значит, $\widehat{y}(x)$ доставляет минимум.

Сильный и слабый экстремум

Пример. $J(y) = \int_0^1 (y'^3)dx \to extr$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Уравнение Эйлера: $y'(x) = C$, значит, $\widehat{y} = x$. Проверка:

$$\Delta J(\widehat{y}) = J(\widehat{y} + h) - Y(\widehat{y}) = \int_0^1 h'(x)^2(3 + h'(x))dx.$$

Поскольку $\|h\|_1 < 3$, то $\widehat{y}(x)$ доставляет слабый минимум. С другой стороны, пусть

$$g_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{n}, 0 \leqslant t < 1/n, \\ 0, \quad 1/n \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 2/\sqrt{n}, 1/2 \leqslant t < 1, \end{cases} \qquad h_n(x) = \int_0^x g_n(t)dx \in KC^{(1)}[0, 1].$$

Тогда $h_n(x) = 0, h_n(1) = 0$, $\|h_n\|_0 \leqslant 1/\sqrt{n} \to 0, n \to +\infty$. Положим $y_n(x) = \widehat{y}(x) + h_n(x) = x + h_n(x)$, тогда

$$J(y_n) = \int_0^{1/n} (1 - \sqrt{n})^3 dx + \int_{1/n}^{1/2} 1 dx + \int_{1/2}^1 (1 + 2/\sqrt{n})^3 dx =$$

$= -\sqrt{n} + O(1) \to -\infty$, значит, сильного экстремума нет.

Примеры Гильберта и Вейерштрасса

Пример Гильберта.

$$J(y)=\int_0^1 x^{2/3}(y'^2)dx \to extr, \quad y(0)=0, y(1)=1.$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^{2/3}y'(x)\right)=0,$$

следовательно, допустимая экстремаль $\widehat{y}=x^{1/3}$ не принадлежит пространству $C^1[0,1]$. При этом

$$\Delta J(\widehat{y})=J(\widehat{y}+h(x))-Y(\widehat{y})=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}h'^2(x)dx>0$$

значит, $\widehat{y}(x)$ доставляет минимум.

Пример Вейерштрасса.

$$J(y) = \int_0^1 x^2 (y'^2) dx \to extr, \quad y(0) = 0,\, y(1) = 1.$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx}\Big(x^2 2y'(x)\Big) = 0.$$

Его решение $y = C/x$, но $y(0)$ не существует, значит, нет допустимых экстремалей.

Покажем, что при этом точная нижняя грань существует. Очевидно, что $0 \leqslant Y(y)$. С другой стороны, рассмотрим последовательность $y_n(x) = \dfrac{\text{arctg}(nx)}{\text{arctg}(n)}$. Получаем, что

$$Y(y_n) = \int_0^1 \frac{x^2 n^2}{arctg^2(n)} \cdot \left(\frac{1}{1+(nx)^2}\right)^2 dx \leqslant \frac{1}{n} \to 0.$$