

**ЭКЗАМЕН**  
**для поступающих в аспирантуру по направлению**  
**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**  
**демонстрационный вариант**  
**ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

**Задача 1.** Найдите область абсолютной и условной сходимости интеграла  $\int_3^{+\infty} \frac{\sin(x^3)}{x (\ln(\sqrt[3]{x}))^{3\alpha}} dx$ , зависящего от вещественного параметра  $\alpha$ .

**Задача 2.** Пространство симметрично отразили относительно прямой  $\ell$ , проходящей через точку  $(1, -1, 3)$  и имеющую направляющий вектор  $\vec{e} = (1, 2, -2)$ . Затем пространство сдвинули вдоль этой прямой на 1, затем растянули в 2 раза вдоль и в 3 раза перпендикулярно прямой. Напишите итоговое преобразование.

**Задача 3.** Запишите дизъюнктивную нормальную форму формулы

$$(x_1 \vee x_3) \Rightarrow (x_2 \oplus x_3).$$

**Задача 4.** Решите дифференциальное уравнение  $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$ .

**Задача 5.** Вычислите интеграл  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x+2} dx$  при помощи вычетов.

**Задача 6.** Решите задачу Коши 
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} + \sin^2 t \cos x \cos y, & x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = 2, & x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Задача 7.** Решите задачу вариационного исчисления  $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 0$ .

**Задача 8.** В пространстве параметров  $(k_1, k_2)$  укажите область устойчивости с запасом 2 тривиального решения системы 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}$$
 при управлении вида  $u_1 = k_1 x_1$ ,  $u_2 = k_2 x_2$ .